Opgavesæt 1

Opgave 1
To circler C_1 og C_2 har en fælles tangent som rører C_1 i P og C_2 i Q. De to cirkler skærer hinanden i punkterne N og M således at N er tættest på den fælles tangent gennem P og Q. Linjen gennem P og N skærer yderligere C_2 i punktet R. Vis at linjen MQ halverer vinklen $\angle PMR$

Opgave 2
Vis at hvis a, b, c er positive reelle tal og $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, da er

$$(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8.$$

Opgave 3
Vi siger at to positive hele tal a og b er et skridt fra hinanden hvis $ab+1$ er et kvadrattal, og at a og b er n skridt fra hinanden hvis der findes en følge af positive hele tal $a = c_0, c_1, \ldots, c_n = b$ således at c_i og c_{i+1} er et skridt fra hinanden, mens der ikke findes en kortere følge med denne egenskab.

a) Vis at to vilkårlige positive hele tal a og b er et endeligt antal skridt fra hinanden.

b) Bestem antallet af skridt mellem de positive hele tal m og $m+1$.

Opgave 4
For hvilke hele tal a har $p(x) = x^3 - x + a$ tre heltallige rødder.

Opgavesæt 2

Opgave 1

Vis at vis a, b, c er reelle tal hvor $a+b+c=0$, da er $a^3+b^3+c^3>0$ netop når $a^5+b^5+c^5>0$.

Opgave 2

Vis at hvis der findes en trekant med sidelængderne a, b og c, da findes også en trekant med sidelængderne $\frac{a}{a+1}$, $\frac{b}{b+1}$ og $\frac{c}{c+1}$.

Opgave 3

Bestem alle positive hele tal m for hvilke der findes et positivt helt tal n så

$$\lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \cdots \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor = m.$$

Opgave 4

Lad $ABCD$ være en firkant indskrevet i en cirkel med centrum O således at diagonalerne står vinkelret på hinanden. Vis at firkant $ABCO$ har samme areal som firkant $ADCO$.