

## Lektie til træningsweekend april 2009

### Opgave 1

Vis at der findes uendeligt mange positive hele tal  $n$  så cifrene i  $18 + 23n$  udelukkende er 9-taller.

### Opgave 2

I en cirkel med diameter  $AB$  er  $PQ$  en korde med midtpunkt  $R$ , og  $S$  og  $T$  er projektionen af henholdsvis  $P$  og  $Q$  på diameteren  $AB$ . Vis at trekant  $RST$  er ligesidet netop når  $2|PQ| = |AB|$ .

### Opgave 3

Vis at hvis  $a$  er et helt tal som ikke er delelig med 5, da er  $f(x) = x^5 - x + a$  ikke et produkt af to polynomier med heltallige koefficienter og grad mindst en.

### Opgave 4

Tre skoler har præcis  $n$  elever hver, og hver elev er samlet ven med  $n + 1$  elever fra de to andre skoler. Vis at det er muligt at vælge en elev fra hver skole således at alle tre er venner med hinanden.

### Opgave 5

Vis at der for alle positive hele tal  $n$  og  $m$  gælder at

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \dots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}.$$