

Opvarmningsopgaver i algebra

1. Hvad forstås ved et rationalt tal? Bevis at sum, differens, produkt og kvotient af to rationale tal igen er rationale tal.
2. Bevis at summen af et rationalt og et irrationalt tal er et irrationalt tal. Gælder det samme om produktet?
3. Lad a og b være to forskellige reelle tal. Bevis at der ligger et rationalt tal mellem a og b . Bevis at der ligger et irrationalt tal mellem a og b .
4. Lad a og b være to forskellige reelle tal. Bevis at der mellem a og b ligger uendelig mange rationale tal og uendelig mange irrationale tal.
5. Lad a og b være rationale tal. Bevis at hvis $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ er rational, så er også $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ rational.
6. Hvordan lyder sætningen om røddernes sum og produkt i et normeret andengradspolynomium? Og beviset? Er der en tilsvarende sammenhæng med koefficienterne i normerede polynomier af højere grad? Bevis?
7. Hvordan lyder formlen for kvadratet på en treleddet størrelse? Og beviset?
8. Bevis at forholdet mellem siderne på et A4-ark er $\sqrt{2}$. (Om A4-papir ved du at det er rektangulært og lignedannet med A5-papir, der fremkommer ved halvering af den lange side af et stykke A4-papir.)
9. Udregn 698^2 i hovedet.
10. Som bekendt siges et punkt P at dele et liniestykke AB i det gyldne snit hvis $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|}$, og denne fælles værdi af forholdet kaldes det gyldne snit. Bevis at det gyldne snit er lig med $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
11. Et hurtigt bevis for at $a^2 + b^2 \geq 2ab$ for alle reelle tal a og b ?
12. Hvad forstås ved det geometriske gennemsnit af to tal? Er der noget "geometrisk" over det geometriske gennemsnit? Samme to spørgsmål for det harmoniske gennemsnit.
13. Har du mødt geometrisk gennemsnit og harmonisk gennemsnit i andre sammenhænge end her ved matematiktræningen?
14. Hvordan lyder Q-A-G-H-ulighederne i tilfældet $n = 2$?
15. Hvis x og y er positive tal med sum 1, hvad kan man så sige om a) værdien af deres produkt, b) værdien af summen af deres reciprokke værdier, c) værdien af summen af deres kvadrater?
16. Bevis at $\sqrt{\frac{s}{t}} + \sqrt{\frac{t}{s}} \geq 2$ for alle positive tal s og t .
17. Hvordan er det nu formlen for summen af en endelig kvotientrække ser ud? Og beviset?