Opvarmningsopgaver i kombinatorik

Dette opgavesæt består af 23 blandede kombinatorikopgaver. Nogle af opgaverne er ret lette, andre er superlette, - og et par enkelte er noget besværlige. I nogle af opgaverne vil du få lyst til at præcisere forudsætningerne. Gør det endelig! Det er vigtigt at være sikker på præcis hvilken opgave du løser.

1. Hvor mange forskellige menuer med to retter kan sammensættes ud fra et spisekort med fire forretter, seks hovedretter og tre desserter?

2. Opskriv de første syv rækker i Pascals trekant.

3. På hvor mange forskellige måder kan tallene fra 1 til 9 skrives i et 3×3-skema?

4. Hvor mange diagonaler er der i en regulær tikant?

5. Bevis på to forskellige måder formlen
$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad .$$

6. På hvor mange måder kan man udfylde et skema med fem rubrikker, hvor der i hver rubrik skal skrives et to-cifret tal?

7. På hvor mange måder kan fire ens hatte fordeles mellem ni forskellige mænd? (NB: Max. én hat pr. mand.)

8. På hvor mange forskellige måder kan et 30-binds leksikon stilles op på en hylde når det kræves at lige og ulige numre ikke må stå ved siden af hinanden?

9. Som bekendt er $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Hvordan lyder de tilsvarende formler for $(a+b)^4$ og $(a+b)^5$? Hvad har disse formler med kombinatorik at gøre?

10. På hvor mange forskellige måder kan ti personer stille sig i rundkreds?

11. Udregn $\binom{40}{38}$ uden lommeregner.

12. I a-klassen er der 18 drenge og 7 piger, i b-klassen er der 10 drenge og 16 piger. Der skal nedsættes et elevudvalg bestående af to drenge og to piger. På hvor mange måder kan det gøres hvis udvalget skal indeholde lige mange medlemmer fra hver af de to klasser?

13. Hvor mange delmængder har en mængde på 10 elementer? Hvad har denne opgave med kombinatorik at gøre?

14. På hvor mange forskellige måder kan der i en gruppe på 8 personer nedsættes to udvalg på hhv. 6 og 5 personer således at hver person sidder i mindst et af udvalgene?

15. Hvordan kan et resultat i kombinatorik bruges til at argumentere for at tallet $n(n+1)(n+2)(n+3)$, hvor $n \in N$, altid er deleligt med 24?

16. Tyve matematikbøger, hvoraf otte er nyindkøbte og tolv er gamle og slidte, skal deles ud til eleverne i en klasse på tyve elever. På hvor mange måder kan det gøres?

17. Hvor mange forskellige isvafler med op til fem kugler is (vanille, jordbær, chokolade) kan der laves?

18. På hvor mange forskellige måder kan en gruppe på tyve personer deles i fire lige store hold?

19. Hvor mange normerede andengradspolynomier har to forskellige heltallige rødder med numerisk værdi højst 10?

20. Hvor mange divisorer har tallet 360? Hvad har denne opgave med kombinatorik at gøre?

21. I et koordinatsystem tegnes trekanter med vinkelspidser i gitterpunkter (n, m), $0 \leq n \leq 3$, $0 \leq m \leq 3$. Hvor mange sådanne trekanter findes der?

22. Peter skriver tal $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, hvor $a_0 = 600$ og $a_n = 1$, efter følgende system: a_i fremkommer af a_{i-1} ved division med et primtal som går op i a_{i-1}. Hvor mange forskellige opskrivninger $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ kan der laves?

23. Spillebrikkerne i et spil er regulære sorte tetraedre, hvor hver sideflade er forsynet med en rød, en blå, en gul eller en grøn prik. Det oplyses uden på æsken at alle brikkerne er forskellige. Hvad er efter disse oplysninger det størst mulige antal brikker i spillet?