Løsninger til opvarmningsopgaver i kombinatorik

1. Hvor mange forskellige menuer med to retter kan sammensættes ud fra et spisekort med fire forretter, seks hovedretter og tre desserter?
   Svar: $4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 54$.

2. Opskriv de første syv rækker i Pascals trekant.

3. På hvor mange forskellige måder kan tallene fra 1 til 9 skrives i et 3×3-skema? *Svar:* $9!$.

4. Hvor mange diagonaler er der i en regulær tikant?
   Svar: $\binom{10}{2} - 10 = 35$.

5. Bevis på to forskellige måder formlen $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
   Svar: a) Hvert valg af r elementer svarer til et (fra)valg af de resterende $n - r$ elementer. b) $\frac{n!}{(n-r)!\ r!} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$

6. På hvor mange måder kan man udfylde et skema med fem rubrikker, hvor der i hver rubrik skal skrives et to-cifret tal? *Svar:* 90^5.

7. På hvor mange måder kan fire ens hatte fordeles mellem ni forskellige mænd? (NB: Max. én hat pr. mand.) *Svar:* $\binom{9}{5} = 126$.

8. På hvor mange forskellige måder kan et 30-binds leksikon stilles op på en hylde når det kræves at lige og ulige numre ikke må stå ved siden af hinanden?
   Svar: $2 \cdot (15!)^2$ (vælg først om der startes med lige eller ulige, vælg derefter den indbyrdes rækkefølge af hhv. lige og ulige numre).

9. Som bekendt er $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. Hvordan lyder de tilsvarende formler for $(a+b)^4$ og $(a+b)^5$? Hvad har disse formler med kombinatorik at gøre?
   Svar: Tænk på $(a+b)^n$ som $(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)$ og hent koefficienterne fra Pascals trekant:
   $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$,
   $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

10. På hvor mange forskellige måder kan ti personer stille sig i rundkreds?
    Svar: $9!$.

11. Udregn $\binom{40}{38}$ uden lommeregner.
    Svar: $\binom{40}{38} = \frac{40!}{38! \cdot 2!} = \frac{40 \cdot 39}{2} = 780$.

12. I a-klassen er der 18 drenge og 7 piger, i b-klassen er der 10 drenge og 16 piger. Der skal nedsættes et elevudvalg bestående af to drenge og to piger. På hvor mange måder kan det gøres hvis udvalget skal indeholde lige mange medlemmer fra hver af de to klasser?
    $\binom{18}{2} \cdot \binom{16}{2} + \binom{7}{2} \cdot \binom{10}{2} + 18 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 16$.

13. Hvor mange delmængder har en mængde på 10 elementer? Hvad har denne opgave med kombinatorik at gøre?
    Svar: 2^{10} (udvælg en delmængde ved for hvert enkelt element at vælge om det skal med eller ikke med).

14. På hvor mange forskellige måder kan der i en gruppe på 8 personer nedsættes to udvalg på hhv. 6 og 5 personer således at hver person sidder i mindst et af udvalgene?
Svar: $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} = 560$.

15. Hvordan kan et resultat i kombinatorik bruges til at argumentere for at tallet $n(n+1)(n+2)(n+3)$, hvor $n \in N$, altid er deleligt med 24?
Svar: Tallet $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{4!} = \frac{(n+3)!}{4!(n-1)!}$ er en binomialkoefficient: $\binom{n+3}{4}$ og dermed helt.

16. Tyve matematikbøger, hvoraf otte er nyindkøbte og tolv er gamle og slidte, skal deles ud til eleverne i en klasse på tyve elever. På hvor mange måder kan det gøres?
Svar: $\binom{20}{8}$.

17. Hvor mange forskellige isvafler med op til fem kugler is (vanille, jordbær, chokolade) kan der laves?
Svar: $\binom{8}{3} - 1 = 55$ (hvis kuglernes rækkefølge ikke er afgørende) (fordel fem kugler i fire kasser (vanille, jordbær, chokolade, ikke med) og træk den tomme vaffel fra.)

18. På hvor mange forskellige måder kan en gruppe på tyve personer deles i fire lige store hold?
Svar: $\frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{15}{5}\cdot\binom{10}{5}}{4!} = \frac{20!}{4!\ (5!)^3}$.

19. Hvor mange normerede andengradspolynomier har to forskellige heltallige rødder med numerisk værdi højst 10?
Svar: $\binom{21}{2} = 210$ (tænk på andengradspolynomiet faktoriseret og vælg to rødder).

20. Hvor mange divisorer har tallet 360? Hvad har denne opgave med kombinatorik at gøre?
Svar: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ (udvælg en divisor ved for primfaktor i $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ at vælge hvor mange gange den skal med).

21. I et koordinatsystem tegnes trekanter med vinkelspidser i gitterpunkter (n, m), $0 \le n \le 3$, $0 \le m \le 3$. Hvor mange sådanne trekanter findes der?
Svar: $\binom{16}{3} - 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 - 2 - 2 - 2 \cdot 4 = 516$ (vælg tre punkter, fjern muligheder hvor punkterne er på linie).

22. Peter skriver tal $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, hvor $a_0 = 600$ og $a_n = 1$, efter følgende system: a_i fremkommer af a_{i-1} ved division med et primtal som går op i a_{i-1}. Hvor mange forskellige opskrivninger $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ kan der laves?
Svar: $6 \cdot \binom{5}{2} = 60$ (da $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, så $n = 6$, og en opskrivning karakteriseres ved hvornår der divideres med hvilke primtal).

23. Spillebrikkerne i et spil er regulære sorte tetraedre, hvor hver sideflade er forsynet med en rød, en blå, en gul eller en grøn prik. Det oplyses uden på æsken at alle brikkerne er forskellige. Hvad er efter disse oplysninger det størst mulige antal brikker i spillet?
Svar: $\binom{7}{4} + 1 = 36$ (fordel fire sider i fire kasser (rød, blå, gul, grøn) og vær opmærksom på at der er to spejlvendte udgaver af brikken med fire farver).