Introduktion til uligheder

Dette er en introduktion til nogle basale uligheder om det *aritmetiske* gennemsnit, det *geometriske* gennemsnit, det *harmoniske* gennemsnit og det *kvadratiske gennemsnit*. Først skal vi ved fælles hjælp bevise ulighederne, og derefter er der en del opgaver som kan løses ved brug af ulighederne.

Definition 1

- Det *aritmetiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er
$$\mathcal{A} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$
- Det *geometriske gennemsnit* af n ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er
$$\mathcal{G} = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$
- Det *harmoniske gennemsnit* af n positive reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er
$$\mathcal{H} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$
- Det *kvadratiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er
$$\mathcal{Q} = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Sætning 1
For positive reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gælder at
$$\mathcal{Q} \geq \mathcal{A} \geq \mathcal{G} \geq \mathcal{H}$$
med lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. (Bemærk at $\mathcal{Q} \geq \mathcal{A}$ ikke kræver at $x_1, x_2, \ldots x_n$ er positive.)

Inden vi viser sætningerne generelt, ser vi på tilfældet $n = 2$. I dette tilfælde ser $\mathcal{AG}-$uligheden således ud
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{hvor } a \text{ og } b \text{ er positive reelle tal.}$$
Da begge sider er positive, kan vi kvadrere og derefter omskrive til en ulighed som åbenlyst er sand
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad (a+b)^2 \geq 4ab \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \geq 0,$$
og hvor der gælder lighedstegn netop når $a = b$. At omskrive en ulighed til et udtryk hvor et kvadrat eller summen af nogle kvadrater er større end nul, er en ofte anvendt metode til at løse uligheder.

Opgave 1
Bevis at $\mathcal{Q} \geq \mathcal{A}$ og $\mathcal{G} \geq \mathcal{H}$ for $n = 2$.

Bevis for $\mathcal{QA}-$uligheden.
Omskriv først uligheden ved at kvadrere

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \cdots x_n)^2.$$

Nu udregnes højresiden

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j,$$

dvs.

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

På venstresiden står nu en masse kvadrater og på højresiden en masse dobbelte produkter, og derfor ser vi om det er muligt at omskrive uligheden til en sum af kvadrater som er større end lig med 0.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i^2 + x_j^2) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \geq 0,$$

og dermed

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \geq 0,$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. Da der gælder biimplikation mellem samtlige omskrivninger af uligheden, har vi hermed bevist at $\mathcal{Q} \geq \mathcal{A}$.

Bevis for $\mathcal{AG}-$uligheden.
$\mathcal{AG}-$uligheden kan bevises ved induktion, men hvor induktionskridtet udføres på utraditionel vis. Vi har allerede vist den i tilfældet $n = 2$. Hvis man forsøger at vise at hvis $\mathcal{AG}-$uligheden er sand for n da er den også sand for $n+1$, bliver det meget kompliceret. Det er imidlertid væsentlig lettere at vise at hvis $\mathcal{AG}-$uligheden er sand for n da er den også sand for $2n$ og for $n-1$, og med disse to induktionsskridt kan vi få alle dominobrikkerne til at vælte. Grunden til at det ikke er så kompliceret at vise at hvis $\mathcal{AG}-$uligheden er sand for n da er den sand for $n-1$, er at man her har mulighed for selv at vælge x_n hensigtsmæssigt i forhold til $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Det overlades til læseren vise induktionsskridtene:

Opgave 2
Vis $\mathcal{AG}-$uligheden ved at udnytte ovenstående idé.

Opgave 3
Vis $\mathcal{GH}-$uligheden ved at udnytte at du allerede har bevist $\mathcal{AG}-$uligheden.

Nu har vi bevist Sætning 1 og er klar til at benytte den til at løse flere uligheder:

Opgave 4
Vis at

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

for reelle tal a, b og c, hvor $abc \neq 0$.

Opgave 5
Vis at
$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$$
for positive reelle tal a og b.

Opgave 6
Vis at
$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$$
for positive reelle tal a, b og c.

Opgave 7
Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Opgave 8
Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at
$$\sqrt[3]{abc}+1 \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Opgave 9
Lad a og b være to positive reelle tal med sum 1. Bevis at
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$
Hvornår gælder der lighedstegn?

Opgave 10
Lad a, b og c være reelle tal således at $c > 0$, $a > c$ og $b > c$. Vis at
$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}.$$

Opgave 11
Lad x, y, z være positive reelle tal som opfylder at $xyz = 32$. Bestem den mindst mulige værdi af
$$x^2+4xy+4y^2+2z^2.$$

Løsningsskitser til uligheder

Opgave 1
$\mathcal{QA}-$uligheden for $n = 2$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}} \geq \frac{x_1+x_2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2(x_1^2+x_2^2) \geq x_1^2+x_2^2-2x_1x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)^2 \geq 0,$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2$.
$\mathcal{GH}-$uligheden for $n = 2$:

$$\sqrt{x_1x_2} \geq \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}},$$

hvilket er $\mathcal{AG}-$uligheden for $a_1 = \frac{1}{x_1}$ og $a_2 = \frac{1}{x_2}$, og der gælder lighedstegn netop når $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, dvs. netop når $x_1 = x_2$.

Opgave 2
Vi har allerede vist $\mathcal{AG}-$uligheden for $n = 2$. Antag at

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.$$

for ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Først viser vi at denne antagelse medfører at uligheden er sand for $2n$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ være ikke-negative reelle tal. Ifølge antagelsen er

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}}.$$

Ved at benytte $\mathcal{AG}-$uligheden for $n = 2$ på ovenstående får vi

$$\frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+\frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}}},$$

hvilket netop er

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1x_2\cdots x_{2n}}.$$

Nu viser vi at vores antagelse også medfører at uligheden er sand for $n-1$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ være ikke-negative reelle tal, lad $\mathcal{A}_{n-1}$ være det aritmetriske gennemsnit af disse $n-1$ tal, og sæt $x_n = \mathcal{A}_{n-1}$. Ifølge antagelsen er

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+\mathcal{A}_{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\mathcal{A}_{n-1}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{A}_{n-1} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\mathcal{A}_{n-1}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{A}_{n-1}^n \geq x_1x_2\cdots x_{n-1}\mathcal{A}_{n-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{A}_{n-1}^{n-1} \geq x_1x_2\cdots x_{n-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}.$$

Bemærk at der i begge tilfælde gælder lighedstegn netop når alle $2n$ eller alle $n-1$ ikke-negative reelle tal er lig hinanden. Hermed er induktionen fuldført.

Opgave 3
Pointen er at $\mathcal{AG}-$uligheden kan omskrives til $\mathcal{GH}-$uligheden. Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ være n positive reelle tal. Dermed er $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}$ også n positive reelle tal. Ifølge $\mathcal{AG}-$uligheden gælder at

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \cdot x_n}},$$

og dermed følger $\mathcal{GH}-$uligheden

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Bemærk at der gælder lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Opgave 4
Ifølge $\mathcal{QA}-$uligheden er

$$\sqrt{\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Da begge sider af lighedstegnet er positive, kan vi kvadrere

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{3} \geq \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}\right)^2$$

hvoraf det ønskede følger.

Opgave 5
Uligheden er $\mathcal{AG}-$uligheden med de $n+1$ tal $a, b, b, \dots, b$.

Opgave 6
Ifølge $\mathcal{AG}-$uligheden er

$$\frac{ab + bc + ca}{3} \geq \sqrt[3]{abbcca} = (\sqrt[3]{abc})^2.$$

Opgav 7
Ifølge $\mathcal{AH}-$uligheden er

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{c}}{2} + \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{a}}{2} \geq \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}.$$

Desuden er

$$\frac{\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}}{3} \geq \frac{3}{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}} = \frac{3}{a+b+c}$$

hvilket giver det ønskede.

Opgave 8
Ved at opløfte i tredje potens får man

$$abc + 3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{abc}^2 + 1 \leq abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1.$$

$\mathcal{AG}-$uligheden giver

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(ab)(ac)(bc)} = 3\sqrt[3]{abc}^2 \text{ og } a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Opgave 9
Ifølge $\mathcal{AH}$−uligheden og da $a + b = 1$, er

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geq \frac{2}{a+b} = 2$$

med lighedstegn netop når $a = b$. Dermed giver $\mathcal{QA}$−uligheden

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2}$$

med lighedstegn netop når $a = b = \frac{1}{2}$.

Opgave 10
Ved at kvadrere får man

$$ab \geq cb + ca - 2c^2 + 2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)}.$$

Ved omrokkering får man yderligere

$$\frac{(a-c)(b-c) + c^2}{2} \geq \sqrt{c^2(a-c)(b-c)}$$

hvilket er sandt ifølge $\mathcal{AG}$−uligheden.

Opgave 11
Hvis vi skal udnytte at $xyz = 32$, er det en god idé at prøve at vurdere udtrykket ved et udtryk af formen $(xyz)^n$. Derfor benytter vi $\mathcal{AG}$−uligheden to gange på følgende måde

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 2z^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot 4y^2} + 4xy + 2z^2 =$$

$$4xy + 4xy + 2z^2 \geq 3\sqrt[3]{32x^2y^2z^2} = 3\sqrt[3]{32^3} = 96.$$

Der er lighedstegn netop når $x^2 = 4y^2$ og $4xy = 2z^2$, dvs. når $x = z = 4$ og $y = 2$.