

## Løsninger til talteoriopgaver

### Vieta jumping

#### Opgave 1

Antag at der for positive hele tal  $a, b$  og  $c$  gælder at  $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$ . Sæt  $q = a^2 + b^2 - abc$ , og lad

$$S = \{(A, B) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid A^2 + B^2 - ABc = q\}.$$

Vi ved at  $S$  er ikke-tom. Det er derfor muligt at vælge et talpar  $(A, B)$  fra  $S$  således at  $A+B$  er mindst mulig, og vi kan wlog antage at  $A \geq B$ . Betragt nu for dette talpar  $(A, B)$  andengradsligningen

$$X^2 - BcX + B^2 - q = 0.$$

Vi udnytter nu Vieta jumping, dvs. vi udnytter at  $x_1 = A$  er løsning til andengradsligningen, og at vi kan finde den anden løsning  $x_2$  da den opfylder Vietas formler for rødderne

$$x_2 = Bc - A = \frac{B^2 - q}{A}.$$

Heraf ses at  $x_2$  er et helt tal, og da  $A+B$  er minimal i  $S$ , må  $x_2 > A$  eller  $x_2 \leq 0$ . Da  $A \geq B$ , er  $x_2 = \frac{B^2 - q}{A} < A$ , dvs. at  $x_2 \leq 0$ . Antag først at  $x_2 < 0$ . Da er  $q = x_2^2 + B^2 - x_2 Bc > Bc \geq c$  hvilket er i modstrid med antagelsen om at  $q \leq c$ . Vi ved nu at  $x_2 = 0$ , dvs. at  $B^2 - q = 0$ , og dermed at  $q$  er et kvadrattal. Vi har hermed vist at hvis der for positive hele tal  $a, b$  og  $c$  gælder at  $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$ , da er  $a^2 + b^2 - abc$  et kvadrattal.

#### Opgave 2

Lad  $n$  være et helt tal større end 1. Først viser vi at der findes et talpar der opfylder det ønskede. Sæt  $a = n$  og  $b = n^2 - 1$ . Da er  $1 < a < b$  og

$$\frac{a^2 + b^2 - 1}{ab} = \frac{n^2 + n^4 + 1 - 2n^2 - 1}{n(n^2 - 1)} = \frac{n^2(n^2 - 1)}{n(n^2 - 1)} = n.$$

Nu vil vi ud fra dette ene talpar generere uendelig mange. Sæt

$$S_n = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a^2 + b^2 - 1 = nab \wedge 1 < a < b\}.$$

Vi har vist at  $S_n$  indeholder mindst et element. Lad derfor  $(A, B)$  være et talpar fra  $S_n$ . Betragt andengradsligningen

$$x^2 - nBx + B^2 - 1 = 0.$$

Vi ved at  $x_1 = A$  er rod, og fra Vietas formler at der for den anden rod  $x_2$  gælder at

$$x_2 = nB - A = \frac{B^2 - 1}{A}.$$

Af dette ses at  $x_2$  er et helt tal, og yderligere at  $x_2 > B$  da  $A < B$ . Dermed har vi vist at hvis  $(A, B) \in S_n$ , da vil også  $(B, nB - A) \in S_n$ . På denne måde kan vi ud fra den fundne løsning generere uendelig mange løsninger.

#### Opgave 3

Løsning:  $(2k, 1)$ ,  $(k, 2k)$  og  $(8k^4 - k, 2k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Antag at  $(m, n)$  er et par af hele positive tal så  $\frac{m^2}{2mn^2 - n^3 + 1} = a$  er et helt positivt tal.

Bemærk først at  $2mn^2 - n^3 + 1 = n^2(2m - n) + 1$ , dvs. at  $1 \leq n \leq 2m$ .

Antag først at  $n = 1$ . Da er  $a = \frac{m^2}{2mn^2 - n^3 + 1} = \frac{m}{2}$ , dvs. at  $m$  er lige. Dette giver løsningerne  $(2k, 1)$ .

Antag nu at  $1 < n \leq 2m$ , og betragt andengradsligningen

$$x^2 - 2n^2ax + n^3a - a = 0.$$

Vi ved at  $m$  er rod, samt fra Vietas formler at summen af de to rødder er  $2n^2a$ , og produktet er  $n^3a - a$ . Dermed er den anden rod et positivt helt tal. Kald de to rødder for  $m_1$  og  $m_2$ , hvor  $m_1 \leq m_2$ . Da er  $m_2 = n^2a + \sqrt{n^4a^2 - n^3a + a} > n^2a$ , dvs. at  $m_1 < \frac{n^3a - a}{n^2a} < n$ . Af dette ses at  $n = 2m_1$ , for ellers vil  $a = \frac{m_1^2}{n^2(2m_1 - n) + 1} < \frac{n^2}{n^2 + 1} < 1$ . Dette giver yderligere  $a = \frac{m_1^2}{n^2(2m_1 - n) + 1} = m_1^2$  og  $m_2 = 2n^2a - m_1 = 8m_1^4 - m_1$ . Heraf ses at de resterende løsninger skal søges blandt  $(k, 2k)$  og  $(8k^4 - k, 2k)$ , og det er nemt at tjekke at disse er løsninger for alle naturlige tal  $k$ .