Skuffeprincippet

1 Skuffeprincippet

Skuffeprincippet benytter de fleste helt intuitivt, og det hører egentlig ikke hjemme under noget bestemt emne, men benyttes i mange forskellige opgavetyper. Skuffeprincippet går ud på at hvis man har $n+1$ bolde som man placerer i n skuffer, så findes der mindst en skuffe med mindst to bolde. Tilsvarende gælder at hvis man har $kn+1$ bolde som man placerer i n skuffer, så findes mindst en skuffe med $k+1$ bolde.

Eksempler

Skuffeprincippet kan bruges i mange forskellige sammenhænge. Et klassisk eksempel er at hvis 1100 mennesker er forsamlet, så vil mindst fire ifølge skuffeprincippet have fødselsdag samme dag. Der er 366 mulige dage man kan have fødselsdag, så hvis der er mindst $3 \cdot 366 + 1 = 1099$ mennesker forsamlet, vil der ifølge skuffeprincippet være mindst fire personer der har fødselsdag samme dag.

Skuffeprincippet kan også bruge hvis man har et endeligt antal skuffer og et uendeligt antal bolde. Betragt følgen $1, 3, 6, 0, 9, 5, 4, \ldots$ hvor det næste tal i følgen, fra og med det fjerde, er summen af de tre foregående modulo 10. Da der kun findes endeligt mange kombinationer af tre cifre, og følgen fortsætter i det uendelige, må der ifølge skuffeprincippet på et eller andet tidspunkt komme tre tal som tidligere har stået i samme rækkefølge, og derfor må følgen være periodisk fra et vist trin.

Det er ikke altid helt oplagt hvad man skal vælge som skuffer og bolde. Hvis vi ser på en vilkårlig delmængde af mængden $M = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ med 15 elementer, så vil vi gerne vise at der findes to talpar fra delmængden med samme differens. I dette tilfælde må de mulige differenser være skufferne og de mulige talpar være boldene da vi ønsker at vise at der findes mindst to talpar med samme differens. Hvis skuffeprincippet skal virke, skal vi altså vise at der er flere talpar end differenser. I en delmængde af M med 15 elementer er der i alt $\binom{15}{2} = 105$ forskellige talpar hvis differens er et helt tal mellem 1 og 99, dvs. der er 99 mulige differenser. Dermed siger skuffeprincippet at der findes mindst to talpar med samme differens.

Her er nogle eksempler på meget forskellige opgavetyper hvor man kan anvende skuffeprincippet, men det er absolut ikke altid oplagt hvordan man skal konstruere sine skuffer og bolde.

1.1 Opgave

Ti venner sender hinanden julekort således at hver sender fem julekort til fem forskellige venner. Vis at der findes et par af venner som har sendt hinanden et julekort.

1.2 Opgave

Vis at hvis et 2×2 kvadrat indeholder 10 punkter, da vil der findes to punkter med afstand mindre end en.

1.3 Opgave

Lad A være en vilkårlig mængde af 23 positive hele tal mellem 1 og 1000. Vis at der findes to disjunkte delmængder af A hvis elementer har samme sum. (*Disjunkte* betyder at delmængderne ikke har nogen fælles elementer).

1.4 Opgave

Mængden A består af 101 positive hele tal mellem 1 og 200. Vis at der findes to tal i A således at det ene går op i det andet.

1.5 Opgave

På Gammelkøbing skole går der 20 elever, og to vilkårlige elever har en fælles bedstefar. Vis at der findes en mand som er bedstefar til mindst 14 elever på skolen.

1.6 Opgave

Vis at blandt tallene $a, 2a, \ldots, (n-1)a$, hvor $a \in \mathbb{R}$, er der mindst et af tallene der har en afstand på højst $\frac{1}{n}$ til et helt tal.

1.7 Opgave

Under en matematikforelæsning sover fem matematikere præcis to gange hver. De var alle vågne da forelæsningen startede, og for hvert par af matematikere var der et tidspunkt hvor de begge sov.
Vis at der på et tidspunkt var mindst tre matematikere der sov samtidig.

1.8 Opgave

Vis at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet) som indeholder mindst 3 af de 15 punkter. (Georg Mohr 91)

1.9 Opgave

Ethvert punkt i planen er malet i en af n givne farver. Vis at der findes et rektangel hvis hjørner alle har samme farve. (Engel)

1.10 Opgave

I et kvadrat med sidelængde 1 er der 101 røde punkter hvoraf ikke tre ligger på linje.
Vis at der findes en trekant med tre røde hjørner hvis areal ikke er større end $\frac{1}{100}$.

1.11 Opgave

I et rektangel med sidelængder 20 og 25 er placeret 120 små kvadrater med sidelængde 1. Vis at det er muligt at placere en cirkel med diameter 1 i rektanglet således at den ikke rører nogen af de 120 små kvadrater.