

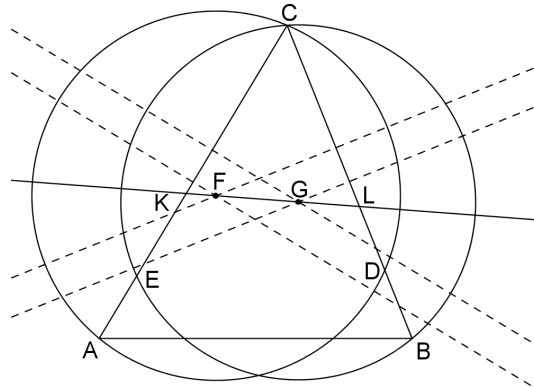
Løsninger til geometri

Opgave 1

Lad K være spejlingen af C i linjen AB , dvs. således at $AKBC$ er et kvadrat. Desuden er $\angle DBK = \angle CBK - \angle CBD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, og $|BK| = |BC| = |BD|$. Dermed danner BDK en ligesidet trekant, og D ligger derfor på midtnormalen til BK som også er midtnormal til AC , hvilket giver at $|AD| = |CD|$.

Opgave 2

Kald centrum i den omskrevne cirkel til trekant ACD for F og centrum i den omskrevne cirkel til trekant BCE for G . Projektionen af F på linjen AC er midtpunktet af AC , og projektionen af G på linjen AC er midtpunktet af CE . Dermed har projektionen af linjestykket FG på linjen AC længde $\frac{1}{2}|AE|$. På tilsvarende måde ses at projektionen af linjestykket FG på BC har længde $\frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AE|$. Da projekTIONERNE af linjestykket FG på henholdsvis AC og BC er lige lange, må linjen FG danne samme vinkel med AC som med BC , dvs. $\angle CKL = \angle CLK$. Dermed er $|CK| = |CL|$.



Opgave 3

Radius i γ er $\frac{c}{2}$ da trekant ABC er ret. Centrum i γ betegnes O og centrum og radius i β betegnes henholdsvis P og R . Afstanden fra P til siderne AC og BC er dermed R , og afstanden fra O til siderne AC og BC er henholdsvis $\frac{a}{2}$ og $\frac{b}{2}$. Den retvinklede trekant med PO som hypotenuse og kateter parallelle med henholdsvis AC og BC har dermed en hypotenuse af længde $\frac{c}{2} - R$ da β tangerer γ , og kateter af længde henholdsvis $|\frac{a}{2} - R|$ og $|\frac{b}{2} - R|$. Ifølge Pythagoras' er

$$\left(\frac{c}{2} - R\right)^2 = \left(\frac{a}{2} - R\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - R\right)^2.$$

Ved at udnytte at $a^2 + b^2 = c^2$ giver ligningen at $R = a + b - c$.

Nu viser vi at radius r i den indskrevne cirkel til trekant ABC har længde $\frac{a+b-c}{2}$. Kald cirkelns røringpunkter med henholdsvis AB , AC og BC for C_1 , B_1 og A_1 . Da er $|CA_1| = |CB_1| = r$, $|AC_1| = |AB_1| = b - r$ og $|BC_1| = |BA_1| = a - r$. Samlet er $c = |AC_1| + |BC_1| = b - r + a - r$, dvs. $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Opgave 4

Da vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende sider, er

$$\frac{|AR|}{|RC|} = \frac{|AQ|}{|QC|}.$$

Ifølge sinusrelationen på trekant ACQ er

$$\frac{|AQ|}{\sin \angle ACQ} = \frac{|QC|}{\sin \angle CAQ}.$$

Samlet giver dette at

$$\frac{|AR|}{|AC|} = \frac{\sin \angle ACQ}{\sin \angle CAQ}.$$

Ifølge sinusversionen af Cevas sætning er

$$\frac{\sin \angle APB}{\sin \angle BPC} \cdot \frac{\sin \angle CAQ}{\sin \angle QAP} \cdot \frac{\sin \angle QCP}{\sin \angle ACQ} = 1.$$

Ifølge sætningen om korde-tangent-vinkler er $\angle QAP = \angle ACQ$ og $\angle QCP = \angle CAQ$, og dvs. at ovenstående ligning kan omskrives til

$$\frac{\sin \angle APB}{\sin \angle BPC} = \left(\frac{\sin \angle ACQ}{\sin \angle CAQ} \right)^2 = \left(\frac{|AR|}{|RC|} \right)^2.$$

Desuden er

$$\frac{\sin \angle APB}{\sin \angle BPC} = \frac{|AP||BP| \sin \angle APB}{|BP||CP| \sin \angle BPC} = \frac{|\triangle ABP|}{|\triangle BCP|} = \frac{|AB|}{|BC|},$$

hvor vi undervejs har udnyttet at $|AP| = |CP|$. I alt får vi

$$\left(\frac{|AR|}{|RC|} \right)^2 = \frac{|AB|}{|BC|}$$

hvilket viser at placeringen af R er uafhængig af valget af γ