Løsninger til diskret

Opgave 1

For $n = 1, 2, 3$ kan Albert ikke klippe til at starte med, og han har derfor tabt. For $n = 4, 5, 6, 7$ kan Albert klippe snoren i tre stykker så det længste stykke er 2 eller 3 langt, og dermed vinder han. For $n = 8, 9$ kan Albert kun klippe så det længste stykke er 4, 5, 6 eller 7 langt, og han overlader dermed en vindende situation til Benny. Ved at fortsætte på samme måde kan man se at tabermængden består af alle positive hele tal på formen 3^k og 3^k-1, hvor k er et ikke-negativt heltal, og vindermængden består af de resterende positive heltal. Dette beviser vi ved at vise at for hvert element i vindermængden er det muligt at klippe så længden af den længste snor er et element i tabermængden, mens man for ethvert element i tabermængden ender med at længden af den længste snor er et element i vindermængden uanset hvordan man klipper. Lad n være et element i tabermængden. Hvis $n = 3^k$ eller $n = 3^k - 1$ vil den længste snor når man har klippet, have længde mindst $3^{k-1} + 1$ og længde højst $3^k - 2$, dvs. uanset hvordan man klipper, efterlader man en situation fra vindermængden. Hvis n derimod ligger i vindermængden, og $n = 3^k + m$, $0 < m < 2 \cdot 3^k - 1$, kan man klippe så længden af den længste snor er 3^k, hvis $m > 1$, og 3^k-1, hvis $m = 1$, og dermed efterlade en snor hvis længde er et element i tabermængden. Vi har nu bevist at Albert netop har en vindende strategi for alle værdier af n som ikke er på formen 3^k eller $3^k - 1$.

Opgave 2

Nej. Vi viser dette indirekte. Antag at en cirkel C med radius 2 er farvet således at farvningen er god. Betragt en ligesidet trekant hvis ene vinkelspids er cirklen C's centrum O, og hvis omskrevne cirkel har radius 1 og dermed tangerer C. Hvis vi antager at centrum er farvet rødt, må trekantens to andre vinkelspidser være farvet henholdsvis blå og grøn. De to vinkelspidser ligger på cirklen D med centrum i O og radius $\sqrt{3}$, og alle punkter på denne cirkel er vinkelspids i en ligesidet trekant hvis ene vinkelspids er O, og hvis omskrevne cirkel har radius 1 og tangerer C. Derfor må samtlige punkter på denne cirkel være farvet blå eller grønne. Betragt et vilkårligt punkt P på periferien af C samt den ligesidede trekant hvis ene vinkelspids er P, og hvis to øvrige vinkelspidser ligger på C. De hosliggende sider til P skærer cirkel D i fire punkter, og de to punkter med størst afstand til P kaldes for henholdsvis Q og R. Trekant PQR er en ligesidet trekant hvis omskrevne cirkel tangerer C og har radius mindst 1, dvs. at punkterne P, Q og R er farvet i tre forskellige farver, og da punkterne Q og R må være henholdsvis blåt og grønt, kan vi slutte at P er rødt. Da P var et vilkårligt punkt, gælder dette for samtlige punkter på periferien af C, men dette er umuligt da der findes tre punkter på periferien af C som danner en ligesidet trekant. Dermed kan farvningen umuligt være god.

Opgave 3

Rækkerne nummereres $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ og søjlerne $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Lad $a(i, j)$ betegne tallet på kvadrat (i, j).

a) Ja. Først viser vi hvordan man kan bestemme om kvadraterne i række 3 er minerede eller ej. Lad $b(j)$ angive antallet af miner på kvadraterne $(3, j-1)$, $(3, j)$ og $(3, j+1)$. Da er $b(j) = a(2, j) - a(1, j)$. Vi kan nu bestemme om $(3, 3)$ er mineret ved at sammenligne $b(1)$ og $b(2)$. Videre kan vi afgøre om $(3, 6)$ er mineret ved at sammenligne $b(4)$ og $b(5)$, og ved at forsætte således kan vi samlet afgøre om felterne $(3, 3), (3, 6), (3, 9), \ldots, (3, 2007)$ er minerede. Ved at sammenligne $b(2007)$ og $b(2006)$ kan vi afgøre om $(3, 2005)$ er mineret, ved at sammenligne $b(2004)$ og $b(2003)$ kan vi afgøre om $(3, 2002)$ er mineret, osv. Det vil

sige at vi kan afgøre hvilke af kvadraterne $(3, 2005), (3, 2002), \dots, (3, 1)$ som er minerede. Ud fra dette kan vi afgøre hvilke af de resterende kvadrater i række 3 der er minerede, og dermed bestemme hele række 3. Tilsvarende kan vi nu bestemme række $6, 9, 12, \dots, 2007$, herefter $2005, 2002, 1999, \dots, 1$ og til slut række $2, 5, 8, \dots, 2006$.
b) Nej. Betragt tilfældet hvor alle kvadrater (i, j), hvor $i \equiv j \equiv 1 \pmod 3$, er minerede, mens resten ikke er. I dette tilfælde vil der stå 1 på samtlige kvadrater. Betragt nu tilfældet hvor kvadraterne (i, j), $i \equiv j \equiv 2 \pmod 3$, er minerede, mens resten ikke er. I dette tilfælde vil der også stå 1 på samtlige kvadrater. Det er dermed umuligt altid at afgøre hvilke kvadrater der er minerede.
Bemærkning: Generelt er det altid muligt at afgøre hvis $n \equiv 0$ eller $n \equiv 1 \pmod 3$, mens det ikke altid er muligt når $n \equiv 2 \pmod 3$.

Opgave 4
a) Antag at grafen G består af n knuder og opfylder betingelsen. Hvis G ikke er sammenhængende, findes der to knuder x_1 og x_2 fra hver sit sammenhængende komponent, men ingen knude x_3 som er forbundet til begge, hvilket er umuligt. Dermed må G være sammenhængende, og den har derfor mindst $n-1$ kanter. Grafen som består af n knuder således at den ene er forbundet med en kant til samtlige andre knuder, opfylder den ønskede betingelse og har netop $n-1$ kanter. Dermed er det ønskede minimum $n-1$.
b) Først viser vi at der findes en graf med $2n-3$ kanter som har den ønskede egenskab. Lad G være en graf med n knuder således at to af knuderne er forbundet med en kant til samtlige andre knuder og til hinanden, mens ingen af de resterende knuder er forbundet. Denne graf opfylder den ønskede betingelse og har $2n-3$ kanter. Vi viser nu ved induktion efter n at $2n-3$ er et minimum. For $n = 4$ er det oplagt at der er netop to grafer der opfylder dette, nemlig den komplette 4-graf samt den komplette 4-graf hvor en enkelt kant er fjernet. Dermed er det minimale antal kanter for $n = 4$ netop $5 = 2 \cdot 4 - 3$. Antag nu at en graf med $n \geq 4$ knuder som opfylder betingelsen, mindst har $2n-3$ kanter. Lad G være en graf med $n+1$ knuder som opfylder betingelsen med det mindst mulige antal kanter m. Da findes to knuder x_1 og x_2 som ikke er forbundet af en kant, og yderligere to knuder x_3 og x_4 som er forbundet med en kant til både x_1 og x_2. Lad $G*$ være den graf der opstår, når de to knuder x_1 og x_2 smelter sammen til en, således at denne nye knude er forbundet med en kant til samtlige knuder som før var forbundet med en af knuderne x_1 og x_2 eller begge. Grafen $G*$ har n knuder og opfylder betingelsen (overvej!), dvs. den har mindst $2n-3$ kanter. Desuden ved vi at $G*$ har mindst to kanter mindre end G da x_1 og x_2 begge var forbundet med en kant til både x_3 og x_4, dvs. at $m \geq 2n - 3 + 2 = 2(n+1) - 3$. Hermed er induktionen fuldført, og vi har samlet vist at det ønskede minimum er $2n-3$.