

Løsninger til talteori

Opgave 1

Da $n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900$, er $n^3 + 100$ delelig med $n + 10$ netop når $n + 10$ går op i 900. Dermed er den størst mulige værdi af n , for hvilken $n^3 + 100$ er delelig med $n + 10$, $n = 890$.

Opgave 2

Sæt $d = \gcd(m, n)$, $n = ad$ og $m = bd$. Da er

$$\text{lcm}(n, m) = \frac{mn}{d} = abd.$$

Den givne ligning som n og m opfylder, bliver hermed $abd + d = ad + bd$ som omskrives til $(a - 1)(b - 1) = 0$, hvilket medfører at $a = 1$ eller $b = 1$. Dette betyder netop at n går op i m eller omvendt.

Opgave 3

Opgaven løses ved induktion således at vi først viser at påstanden er sand for $n = 1$, og derefter viser at hvis påstanden for et fast positivt helt tal k er sand for alle $n \leq k$, da er den også sandt for $n = k + 1$.

Den er oplagt sandt for $n = 1$ da alle hele tal er kongruente modulo 1.

Antag at for alle positive hele tal n , $n \leq k$, er følgen $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots$, modulo n konstant fra et vist trin. Betragt nu følgen modulo $n = k + 1$. Hvis $n = k + 1$ er ulige, da er $2^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ ifølge Euler-Fermat, og yderligere $2^b \equiv 2^c \pmod{n}$ når $b \equiv c \pmod{\phi(n)}$. Ifølge induktionsantagelsen ved vi at a_i er konstant modulo $\phi(n)$ fra et vist trin, dvs. $2^{a_i} \equiv 2^{a_j} \pmod{n}$ for store i og j . Dermed er følgen konstant fra et vist trin modulo n hvis $n = k + 1$ er ulige. Antag i stedet at $n = k + 1$ er lige, og sæt $n = 2^s m$ hvor m er ulige. Ifølge induktionsantagelsen er følgen konstant modulo m fra et vist trin, og den må oplagt være konstant fra et vist trin modul 2^s . Dermed vil $a_i \equiv a_j \pmod{m}$ og $a_i \equiv a_j \pmod{2^s}$ for store i og j , og da m og 2^s er indbyrdes primiske, må også $a_i \equiv a_j \pmod{n}$ for store i og j , hvilket netop vil sige at følgen modulo n er konstant fra et vist trin. Hermed er induktionsbeviset afsluttet.

Opgave 4

Først viser vi at for ethvert ulige tal a , $a \geq 3$, og for alle positive hele tal n , da er

$$(1 + a)^{a^n} = 1 + s_n a^{n+1},$$

hvor s_n er et helt tal som ikke er deleligt med a . Dette vises ved induktion efter n . Hvis $n = 1$ er

$$\begin{aligned} (1 + a)^a &= 1 + \binom{a}{1}a + \binom{a}{2}a^2 + \dots + \binom{a}{a}a^a \\ &= 1 + a^2 \left(1 + \binom{a}{2}\right) + \binom{a}{3}a + \dots + \binom{a}{a}a^{a-2} \\ &= 1 + s_1 a^2. \end{aligned}$$

Da a er ulige, er $\binom{a}{2}$ delelig med a , og derfor går a ikke op i

$$s_1 = 1 + \binom{a}{2} + \binom{a}{3}a + \dots + \binom{a}{a}a^{a-2}.$$

Antag nu at $(1 + a)^{a^n} = 1 + s_n a^{n+1}$, hvor s_n er et helt tal som ikke er deleligt med a . Da

er

$$\begin{aligned}
 (1+a)^{a^{n+1}} &= (1+s_n a^{n+1})^a = 1 + \binom{a}{1} s_n a^{n+1} + \binom{a}{2} s_n^2 a^{2n+2} + \dots + \binom{a}{a} s_n^a a^{an+a} \\
 &= 1 + a^{n+2} \left(s_n + \binom{a}{2} s_n^2 a^n + \binom{a}{3} s_n^3 a^{2n+1} + \dots + \binom{a}{a} s_n^a a^{(a-1)n+a-2} \right) \\
 &= 1 + s_{n+1} a^{n+2}.
 \end{aligned}$$

Da s_n ikke er delelig med a , er s_{n+1} heller ikke delelig med a . Dermed er induktionen fuldført.

På tilsvarende vis vises at for ethvert ulige tal b , $b \geq 3$, og for alle positive hele tal n , da er

$$(b-1)^{b^n} = -1 + t_n b^{n+1},$$

hvor t_n er et helt tal som ikke er deleligt med b . Nu er vi klar til at se på opgavens egentlige problemstilling. Af ovenstående ses at

$$1992^{1991^{1990}} = (1991+1)^{1991^{1990}} = 1 + s_{1990} 1991^{1991},$$

hvor 1991 ikke går op i s_{1990} . Desuden ses at

$$1990^{1991^{1992}} = (1991-1)^{1991^{1992}} = -1 + t_{1992} 1991^{1993},$$

hvor 1991 ikke går op i t_{1992} . Samlet er

$$S = 1992^{1991^{1990}} + 1990^{1991^{1992}} = 1991^{1991} (s_{1990} + t_{1992} 1991^2),$$

dvs. at 1991^{1991} går op i S , mens 1991^{1992} ikke går op i S .