Funktionalligninger.

Aflever mindst én men meget gerne flere opgavebesvarelser søndag d. 31. maj.

Opgave 1
Bestem alle funktioner $f(x)$ defineret på de reelle tal således at

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 2
En funktion $f(n,k)$ hvor k og n er ikke-negative hele tal, er defineret på følgende måde:

a) $f(n,0) = f(n,n) = 1$ for alle ikke-negative hele tal n.

b) $f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)$ for alle hele tal k og n hvor $0 < k < n$.

Bestem $f(n,0) + f(n,1) + f(n,2) + \cdots + f(n,n-1) + f(n,n)$.

Opgave 3
Bestem samtlige andengradspolynomier $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$ for hvilke $f(g(h(x)))$ har rødderne $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Opgave 4
Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hvor der for alle reelle tal x og y gælder at

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$