Løsninger til funktionalligninger

Opgave 1
For $x = y = 0$ er $f(0)^2 = f(0)$, dvs. at $f(0) = 0$ eller $f(0) = 1$. Når $y = 0$, får vi $f(x)f(0) - f(0) = x$ for alle x, hvilket viser at $f(0) \neq 0$. Samlet er $f(0) = 1$ og $f(x) = x+1$. Vi har nu vist at hvis der findes en funktion som opfylder betingelsen, kan det kun være $f(x) = x + 1$, og det ses nemt ved indsættelse at denne funktion opfylder den ønskede betingelse.

Opgave 2
Sæt $F(n) = f(n, 0) + f(n, 1) + f(n, 2) + \cdots + f(n, n-1) + f(n, n)$. Bemærk først at $F(0) = f(0, 0) = 1$. Desuden er

$$\begin{aligned} 2F(n) &= 1 + \Big(f(n,0) + (f(n,1)\Big) + \Big(f(n,1) + f(n,2)\Big) + \cdots + \Big(f(n,n-1) + f(n,n)\Big) + 1 \\ &= f(n+1,0) + f(n+1,1) + f(n+1,2) + \cdots + f(n+1,n) + f(n+1,n+1) \\ &= F(n+1). \end{aligned}$$

Samlet er $F(n) = 2F(n-1) = \cdots = 2^n F(0) = 2^n$.

Opgave 3
Antag at $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$ er tre andengradspolynomier således at $f(g(h(x)))$ har rødderne $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Da er $h(1), h(2), \ldots, h(8)$ rødder i fjerdegradspolynomiet $f(g(x))$. Da et fjerdegradspolynomium højst har fire rødder, samt at $h(a) = h(b)$, hvor $a \neq b$, medfører at a og b ligger symmetrisk omkring første koordinaten til toppunktet for h, må $h(8) = h(1)$, $h(7) = h(2)$, $h(6) = h(3)$ og $h(5) = h(4)$, og vi ved desuden at følgen $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$, $h(4)$ er strengt aftagende eller voksende. Nu er $g(h(1))$, $g(h(2))$, $g(h(3))$ og $g(h(4))$ rødder i andengradspolynomiet $f(x)$, hvilket med samme argument som før giver $g(h(1)) = g(h(4))$ og $g(h(2)) = g(h(3))$, hvor $h(1)$ og $h(4)$ samt $h(2)$ og $h(3)$ ligger symmetrisk omkring x-koordinaten til toppunktet for g. Her af følger at $h(1) + h(4) = h(2) + h(3)$. Hvis $h(x) = ax^2 + bx + c$ giver dette

$$(a + b + c) + (16a + 4b + c) = (4a + 2b + c) + (9a + 3b + c).$$

Af ligningen ses at $a = 0$ hvilket er i modstrid med at h er et andengradspolynomium, dvs. der findes ikke tre polynomier som opfylder det ønskede.

Opgave 4
For $x = 1$ er $f(f(y) + 1) = y + f(1)$. Af dette ses at der findes et k så $f(k) = -1$. Når $y = k$, er

$$f(0) = kx + f(x)$$

hvilket viser at f er en lineær funktion. Sæt $f(x) = ax + b$. Ifølge betingelsen skal

$$a(x(ay + b) + x) + b = f(xf(y) + x) = xy + f(x) = xy + ax + b.$$

Dette giver samlet at $a^2xy + abx = xy$ for alle reelle tal x og y, dvs. $a = \pm 1$ og $b = 0$. Dermed er de eneste mulige løsninger $f(x) = x$ eller $f(x) = -x$ som begge opfylder betingelsen.