Geometrinoter 2

Disse noter omhandler sætninger om trekanter, trekantens ydre røringscirkler, to cirklers radikalakse samt Simson- og Eulerlinjen i en trekant.
Noterne forudsætter kendskab til Geometrinoter 1.

1 Trekantens formler

I dette afsnit ser vi på en trekant ABC hvor s betegner den halve omkreds, r er radius i den indskrevne cirkel, R er radius i den omskrevne cirkel, og T er arealet.

Herons formel

Arealet af en trekant kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bevis
Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc \sin A$, og ved kvadrering $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Samlet giver dette

$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\
&= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
&= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\
&= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist.

Brahmaguptas formel

Arealet af en indskrivelig firkant $ABCD$ kan tilsvarende beregnes ud fra firkantens sidelængder:

$$T = \sqrt{(s - |AB|)(s - |BC|)(s - |CD|)(s - |DA|)}$$

hvor s også her betegner den halve omkreds.

Opgave 1.1 (Om Brahmaguptas formel)**.** Vis Brahmaguptas formel.
(*Hint:* Del firkanten i to trekanter, og brug samme idé som i beviset for Herons formel).

Sætning om areal og radius i den indskrevne cirkel

Der gælder at

$$T = rs.$$

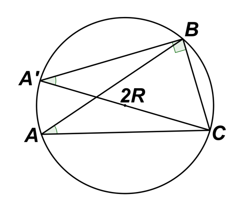
Opgave 1.2 (Om areal og radius i den indskrevne cirkel)**.** Bevis sætningen om areal og radius i den indskrevne cirkel.

Sætning om radius i den omskrevne cirkel

Om radius i den omskrevne cirkel gælder der

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bevis



Af figuren ses at $\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}$. Tilsvarende ses at $\sin B = \frac{b}{2R}$ og $\sin C = \frac{c}{2R}$, og dermed i alt

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Sætning om areal og radius i den omskrevne cirkel

Der gælder at

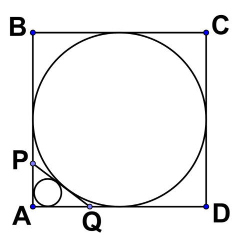
$$4RT = abc.$$

Bevis

Ifølge sætningen om radius i den omskrevne cirkel samt sætningen om arealet af en trekant udtrykt ved sinus til en vinkel og længden af de hosliggende sider, er

$$4RT = 2 \cdot 2R \cdot T = 2 \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = abc.$$

Opgave 1.3. I et kvadrat $ABCD$ er indskrevet en cirkel med radius R.



En tangent til cirklen skærer linjestykkerne AB og AD i henholdsvis P og Q. Radius i den indskrevne cirkel til trekant APQ kaldes r. Udtryk arealet af trekant APQ vha. r og R.

Opgave 1.4. Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius R. Diagonalerne står vinkelret på hinanden, og deres skæringspunkt kaldes E.

Vis at

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4R^2.$$

Opgave 1.5. Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995)

Opgave 1.6. Vis for en trekant ABC at

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

Her er r radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

Opgave 1.7. Vis for en trekant ABC at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Her er r som før radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

Opgave 1.8. I en trekant ABC danner de tre fodpunkter for højderne en ny trekant.

Bevis at radius i den omskrevne cirkel til den nye trekant er halvt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC.

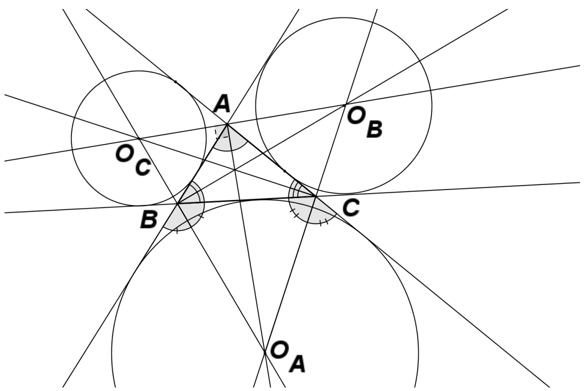
2 Trekantens ydre røringscirkler

Definition af trekantens ydre røringscirkler

En trekant ABC har tre ydre røringscirkler, en for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

Sætning om de ydre røringscirklers centre

Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og C.
De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.



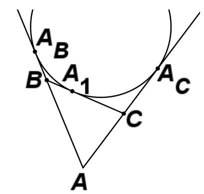
Bevis
Da den ydre røringscirkel til siden BC tangerer BC samt forlængelserne af AB og AC, må dens centrum ligge i samme afstand til disse tre linjer. Da vinkelhalveringslinjen netop er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til de to vinkelben, må den ydre røringscirkel centrum ligge på vinkelhalveringslinjen til vinkel A samt de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

Af dette ses at de ydre røringscirklers centre O_A, O_B og O_C danner en trekant hvis sider går gennem henholdsvis A, B og C. Vinkelhalveringslinjen til vinkel A står vinkelret på siden O_BO_C, da $\angle BAO_A = \angle CAO_A$ og $\angle O_BAC = \angle O_CAB$.

Sætning om den ydre røringscirkel og den halve omkreds.

Betragt den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC hvor den halve omkreds betegnes s. Kald røringscirklens røringspunkter med siden BC samt forlængelserne af AB og AC for henholdsvis A_1, A_B og A_C. Da er

$$s = |AB| + |BA_1| = |AC| + |CA_1| = |AA_B| = |AA_C|.$$



Bevis
Først bemærker vi at $|BA_B| = |BA_1|$ og $|CA_C| = |CA_1|$, dvs. at $|AA_B| + |AA_C|$ er lig trekantens omkreds. Desuden er $|AA_B| = |AA_C|$, og dermed $s = |AA_B| = |AA_C|$ og $s = |AB| + |BA_1| = |AC| + |CA_1|$.

Opgave 2.1. I trekant ABC indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringspunkterne for de tre røringscirkler.
Vis at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 2.2. For en trekant ABC betegner T arealet, r radius i den indskrevne cirkel og r_1, r_2 og r_3 radierne i de tre ydre røringscirkler. Vis at $T^2 = rr_1r_2r_3$.

3 Radikalakse

I Geometrinoter 1 så vi at et punkt P's potens mht. en cirkel med centrum O og radius r defineres som tallet $|OP|^2 - r^2$, og dermed at potensen af et punkt på cirkelperiferien er nul.

Definition af radikalakse

Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

Sætning om radikalakse

Kald centrum i de to cirkler for henholdsvis O_1 og O_2, cirklernes radier for henholdsvis r_1 og r_2, og lad d betegne afstanden mellem de to centre. Da er radikalaksen en ret linje der står vinkelret på linjen O_1O_2. Radikalaksens afstand til henholdsvis O_1 og O_2 er $\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$ og $\frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d}$. Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Bevis
Lad Q være punktet på linjen O_1O_2 med $|QO_1| = \frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$ og $|QO_2| = \frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d}$. (Dette er muligt da $\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d} + \frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d} = d$). Antag at P er et punkt på radikalaksen, og lad P' være projektionen af P på O_1O_2. At P er et punkt på radikalaksen er ensbetydende med at

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$

Dette er ensbetydende med at

$$|PP'|^2 + |O_1P'|^2 - r_1^2 = |PP'|^2 + (d - |O_1P'|)^2 - r_2^2,$$

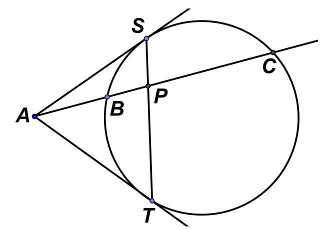
og yderligere at

$$|O_1P'| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Dette er ensbetydende med at $P' = Q$, og dermed at P ligger på linjen gennem Q vinkelret på O_1O_2. Vi har dermed vist at radikalaksen netop består af punkterne på denne linje.

Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, har begge punkter potens nul mht. de to cirkler, og dermed er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Opgave 3.1. En linje gennem A skærer en cirkel i to punkter, B og C, på en sådan måde at B ligger mellem A og C. Fra punktet A tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne S og T. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne ST og AC.



Vis at

$$\frac{|AP|}{|PC|} = 2\frac{|AB|}{|BC|}.$$

(NMC 2007)

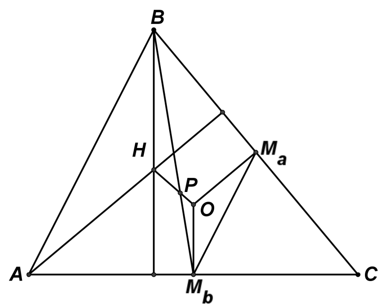
4 Eulerlinjen og Simsonlinjen

Sætning om Eulerlinjen

I en trekant ABC kaldes medianernes skæringspunkt som sædvanligt M, højdernes skæringspunkt H og midtnormalernes skæringspunkt O. Punkterne H, M og O ligger på en ret linje som kaldes Eulerlinjen, og M deler HO således at $2|MO| = |MH|$.

Bevis

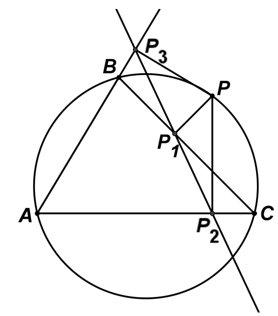
Kald midtpunkterne af BC og AC for henholdsvis M_a og M_b, og skæringspunktet mellem BM_b og HO for P. Vi ønsker at vise at $P = M$ samt at $2|OM| = |HM|$.



Da AB er parallel med midtpunktstransversalen M_aM_b, OM_b er parallel med BH da de begge står vinkelret på AC, og OM_a er parallel med AH da de begge står vinkelret på BC, er trekanterne ABH og M_aM_bO ensvinklede med forholdet $2:1$. Desuden er trekant OPM_b ensvinklet med trekant HPB med samme forhold. Dermed er $2|M_bP| = |PB|$, og heraf ses det ønskede nemlig at $P = M$ og $2|MO| = |MH|$.

Sætning om Simsonlinjen

Lad P være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB.
Punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje, og denne linje kaldes



Simsonlinjen.

Opgave 4.1 (Om Simsonlinjen)**.** Bevis at punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.
Hint: Vis at firkanterne PCP_2P_1, PP_3BP_1 og PP_2AP_3 er indskrivelige, og udnyt dette til at vise at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$.

Opgave 4.2. Betragt fem punkter A, B, C, D og E sådan at firkant $ABCD$ er et parallelogram, og firkant $BCED$ har en omskreven cirkel. Lad l være en linje gennem A. Antag at l skærer det indre af linjestykket DC i F og linjen BC i G. Antag derudover at $|EF| = |EG| = |EC|$. Bevis at l er vinkelhalveringslinje for vinkel DAB.
Hint: Benyt resultatet om Simsonlinjen til at vise at projektionen af E på linjen BD netop er skæringspunktet mellem diagonalerne i firkant $ABCD$. (IMO 2007)

5 Oversigt

Herons formel: Arealet T af en trekant ABC er givet ved $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ hvor s betegner den halve omkreds.

Brahmaguptas formel: Arealet T af en indskrivelig firkant $ABCD$ er $T = \sqrt{(s-|AB|)(s-|BC|)(s-|CD|)(s-|DA|)}$ hvor s betegner firkantens halve omkreds.

Trekantens formler: Arealet af en trekant ABC betegnes T, den halve omkreds s, og radius for den indskrevne og omskrevne cirkel betegnes henholdsvis r og R. Da gælder følgende formler:

$$T = rs$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$4RT = abc$$

Ydre røringscirkel En trekant ABC har tre ydre røringscirkler, en for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

De ydre røringscirklers centre Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og C. De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.

Den ydre røringscirkel og den halve omkreds. Kald røringspunktet mellem den ydre røringscirkel og siden BC i trekant ABC for A_1, og trekantens halve omkreds for s. Da er

$$s = |AB| + |BA_1| = |AC| + |CA_1|.$$

Radikalakse Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

Radikalaksens beliggenhed Radikalaksen til to cirkler er en ret linje der står vinkelret på linjen mellem deres centre. Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Eulerlinjen: I en trekant ABC ligger højdernes skæringspunkt H, medianernes skæringspunkt M og midtnormalernes skæringspunkt O på en ret linje som kaldes *Eulerlinjen*, således at $2|MO| = |MH|$.

Simsonlinjen: Lad P være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB. Punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje, og denne linje kaldes *Simsonlinjen*.