Geometrinoter 2

Disse noter omhandler sætninger om trekanter, trekantens ydre røringscirkler, to cirklers radikalakse samt Simson- og Eulerlinjen i en trekant.
Noterne forudsætter kendskab til Geometrinoter 1.

1 Trekantens formler

I dette afsnit ser vi på en trekant ABC hvor s betegner den halve omkreds, r er radius i den indskrevne cirkel, R er radius i den omskrevne cirkel, og T er arealet.

Herons formel

Arealet af en trekant kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bevis
Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc \sin A$, og ved kvadrering $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Samlet giver dette

$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\
&= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
&= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\
&= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist.

Brahmaguptas formel

Arealet af en indskrivelig firkant $ABCD$ kan tilsvarende beregnes ud fra firkantens sidelængder:

$$T = \sqrt{(s - |AB|)(s - |BC|)(s - |CD|)(s - |DA|)}$$

hvor s også her betegner den halve omkreds.

Opgave 1.1 (Om Brahmaguptas formel)**.** Vis Brahmaguptas formel.
(*Hint:* Del firkanten i to trekanter, og brug samme idé som i beviset for Herons formel).

Sætning om areal og radius i den indskrevne cirkel

Der gælder at

$$T = rs.$$

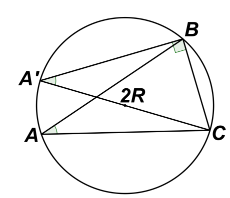
Opgave 1.2 (Om areal og radius i den indskrevne cirkel)**.** Bevis sætningen om areal og radius i den indskrevne cirkel.

Sætning om radius i den omskrevne cirkel

Om radius i den omskrevne cirkel gælder der

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bevis



Af figuren ses at $\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}$. Tilsvarende ses at $\sin B = \frac{b}{2R}$ og $\sin C = \frac{c}{2R}$, og dermed i alt

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Sætning om areal og radius i den omskrevne cirkel

Der gælder at

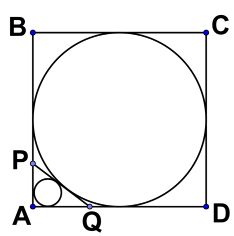
$$4RT = abc.$$

Bevis

Ifølge sætningen om radius i den omskrevne cirkel samt sætningen om arealet af en trekant udtrykt ved sinus til en vinkel og længden af de hosliggende sider, er

$$4RT = 2 \cdot 2R \cdot T = 2 \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = abc.$$

Opgave 1.3. I et kvadrat $ABCD$ er indskrevet en cirkel med radius R.



En tangent til cirklen skærer linjestykkerne AB og AD i henholdsvis P og Q. Radius i den indskrevne cirkel til trekant APQ kaldes r. Udtryk arealet af trekant APQ vha. r og R.

Opgave 1.4. Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius R. Diagonalerne står vinkelret på hinanden, og deres skæringspunkt kaldes E.
Vis at

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4R^2.$$

Opgave 1.5. Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995)

Opgave 1.6. Vis for en trekant ABC at

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

Her er r radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

Opgave 1.7. Vis for en trekant ABC at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Her er r som før radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

Opgave 1.8. I en trekant ABC danner de tre fodpunkter for højderne en ny trekant.
Bevis at radius i den omskrevne cirkel til den nye trekant er halvt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC.

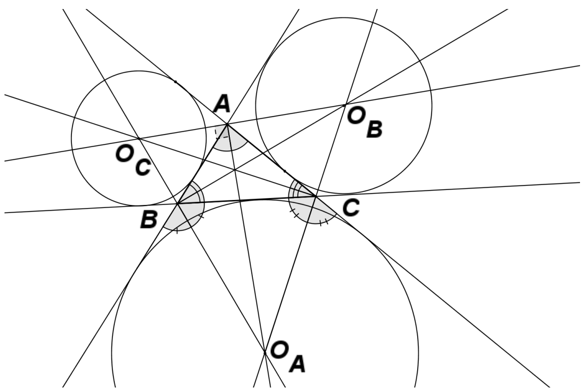
2 Trekantens ydre røringscirkler

Definition af trekantens ydre røringscirkler

En trekant ABC har tre ydre røringscirkler, en for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

Sætning om de ydre røringscirklers centre

Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og C.
De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.



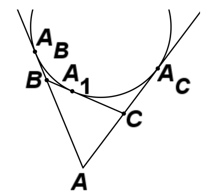
Bevis
Da den ydre røringscirkel til siden BC tangerer BC samt forlængelserne af AB og AC, må dens centrum ligge i samme afstand til disse tre linjer. Da vinkelhalveringslinjen netop er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til de to vinkelben, må den ydre røringscirkel centrum ligge på vinkelhalveringslinjen til vinkel A samt de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

Af dette ses at de ydre røringscirklers centre O_A, O_B og O_C danner en trekant hvis sider går gennem henholdsvis A, B og C. Vinkelhalveringslinjen til vinkel A står vinkelret på siden O_BO_C, da $\angle BAO_A = \angle CAO_A$ og $\angle O_BAC = \angle O_CAB$.

Sætning om den ydre røringscirkel og den halve omkreds.

Betragt den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC hvor den halve omkreds betegnes s. Kald røringscirklens røringspunkter med siden BC samt forlængelserne af AB og AC for henholdsvis A_1, A_B og A_C. Da er

$$s = |AB| + |BA_1| = |AC| + |CA_1| = |AA_B| = |AA_C|.$$



Bevis
Først bemærker vi at $|BA_B| = |BA_1|$ og $|CA_C| = |CA_1|$, dvs. at $|AA_B| + |AA_C|$ er lig trekantens omkreds. Desuden er $|AA_B| = |AA_C|$, og dermed $s = |AA_B| = |AA_C|$ og $s = |AB| + |BA_1| = |AC| + |CA_1|$.

Opgave 2.1. I trekant ABC indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringspunkterne for de tre røringscirkler.
Vis at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 2.2. For en trekant ABC betegner T arealet, r radius i den indskrevne cirkel og r_1, r_2 og r_3 radierne i de tre ydre røringscirkler. Vis at $T^2 = rr_1r_2r_3$.

3 Radikalakse

I Geometrinoter 1 så vi at et punkt P's potens mht. en cirkel med centrum O og radius r defineres som tallet $|OP|^2 - r^2$, og dermed at potensen af et punkt på cirkelperiferien er nul.

Definition af radikalakse

Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

Sætning om radikalakse

Kald centrum i de to cirkler for henholdsvis O_1 og O_2, cirklernes radier for henholdsvis r_1 og r_2, og lad d betegne afstanden mellem de to centre. Da er radikalaksen en ret linje der står vinkelret på linjen O_1O_2. Radikalaksens afstand til henholdsvis O_1 og O_2 er $\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$ og $\frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d}$. Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Bevis

Lad Q være punktet på linjen O_1O_2 med $|QO_1| = \frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}$ og $|QO_2| = \frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d}$. (Dette er muligt da $\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d} + \frac{r_2^2-r_1^2+d^2}{2d} = d$). Antag at P er et punkt på radikalaksen, og lad P' være projektionen af P på O_1O_2. At P er et punkt på radikalaksen er ensbetydende med at

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$

Dette er ensbetydende med at

$$|PP'|^2 + |O_1P'|^2 - r_1^2 = |PP'|^2 + (d - |O_1P'|)^2 - r_2^2,$$

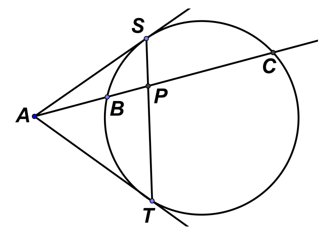
og yderligere at

$$|O_1P'| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Dette er ensbetydende med at $P' = Q$, og dermed at P ligger på linjen gennem Q vinkelret på O_1O_2. Vi har dermed vist at radikalaksen netop består af punkterne på denne linje.

Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, har begge punkter potens nul mht. de to cirkler, og dermed er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Opgave 3.1. En linje gennem A skærer en cirkel i to punkter, B og C, på en sådan måde at B ligger mellem A og C. Fra punktet A tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne S og T. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne ST og AC.



Vis at

$$\frac{|AP|}{|PC|} = 2\frac{|AB|}{|BC|}.$$

(NMC 2007)

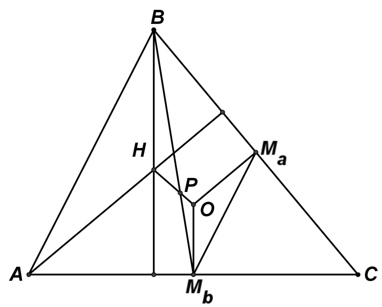
4 Eulerlinjen og Simsonlinjen

Sætning om Eulerlinjen

I en trekant ABC kaldes medianernes skæringspunkt som sædvanligt M, højdernes skæringspunkt H og midtnormalernes skæringspunkt O. Punkterne H, M og O ligger på en ret linje som kaldes Eulerlinjen, og M deler HO således at $2|MO| = |MH|$.

Bevis

Kald midtpunkterne af BC og AC for henholdsvis M_a og M_b, og skæringspunktet mellem BM_b og HO for P. Vi ønsker at vise at $P = M$ samt at $2|OM| = |HM|$.

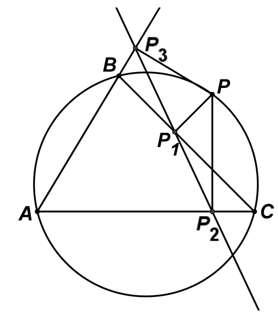


Da AB er parallel med midtpunktstransversalen M_aM_b, OM_b er parallel med BH da de begge står vinkelret på AC, og OM_a er parallel med AH da de begge står vinkelret på BC, er trekanterne ABH og M_aM_bO ensvinklede med forholdet $2 : 1$. Desuden er trekant OPM_b ensvinklet med trekant HPB med samme forhold. Dermed er $2|M_bP| = |PB|$, og heraf ses det ønskede nemlig at $P = M$ og $2|MO| = |MH|$.

Sætning om Simsonlinjen

Lad P være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB.

Punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje, og denne linje kaldes



Simsonlinjen.

Opgave 4.1 (Om Simsonlinjen)**.** Bevis at punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.
Hint: Vis at firkanterne PCP_2P_1, PP_3BP_1 og PP_2AP_3 er indskrivelige, og udnyt dette til at vise at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$.

Opgave 4.2. Betragt fem punkter A, B, C, D og E sådan at firkant $ABCD$ er et parallelogram, og firkant $BCED$ har en omskreven cirkel. Lad l være en linje gennem A. Antag at l skærer det indre af linjestykket DC i F og linjen BC i G. Antag derudover at $|EF| = |EG| = |EC|$. Bevis at l er vinkelhalveringslinje for vinkel DAB.
Hint: Benyt resultatet om Simsonlinjen til at vise at projektionen af E på linjen BD netop er skæringspunktet mellem diagonalerne i firkant $ABCD$. (IMO 2007)

5 Oversigt

Herons formel: Arealet T af en trekant ABC er givet ved $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ hvor s betegner den halve omkreds.

Brahmaguptas formel: Arealet T af en indskrivelig firkant $ABCD$ er $T = \sqrt{(s-|AB|)(s-|BC|)(s-|CD|)(s-|DA|)}$ hvor s betegner firkantens halve omkreds.

Trekantens formler: Arealet af en trekant ABC betegnes T, den halve omkreds s, og radius for den indskrevne og omskrevne cirkel betegnes henholdsvis r og R. Da gælder følgende formler:

$$T = rs$$

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$4RT = abc$$

Ydre røringscirkel En trekant ABC har tre ydre røringscirkler, en for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

De ydre røringscirklers centre Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og C. De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.

Den ydre røringscirkel og den halve omkreds. Kald røringspunktet mellem den ydre røringscirkel og siden BC i trekant ABC for A_1, og trekantens halve omkreds for s. Da er

$$s = |AB| + |BA_1| = |AC| + |CA_1|.$$

Radikalakse Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

Radikalaksens beliggenhed Radikalaksen til to cirkler er en ret linje der står vinkelret på linjen mellem deres centre. Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Eulerlinjen: I en trekant ABC ligger højdernes skæringspunkt H, medianernes skæringspunkt M og midtnormalernes skæringspunkt O på en ret linje som kaldes *Eulerlinjen*, således at $2|MO| = |MH|$.

Simsonlinjen: Lad P være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB. Punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje, og denne linje kaldes *Simsonlinjen*.

6 Løsningsskitser

Opgave om Brahmaguptas formel 1.1
Lad $ABCD$ være en indskrivelig firkant, og lad s betegne den halve omkreds. Sæt $p = |AD|$, $q = |AB|$, $r = |BC|$ og $t = |AD|$. Arealet T af firkanten er summen af arealerne af trekant ABD og trekant BCD, dvs. at

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}pq\sin A + \frac{1}{2}rt\sin C \\ T^2 &= \frac{1}{4}\sin^2 A(pq+rt)^2 \\ 4T^2 &= (1-\cos^2 A)(pq+rt)^2, \end{aligned}$$

hvor vi undervejs har udnyttet at $\sin A = \sin C$ da firkanten er indskrivelig. Ved at udnytte cosunusrelationen på trekanterne ABD og BCD får vi

$$|BD|^2 = q^2 + p^2 - 2pq\cos A \text{ og } |BD|^2 = r^2 + t^2 - 2rt\cos C.$$

Af disse to ligninger ses at

$$4\cos^2 A(pq+rt)^2 = (p^2+q^2-r^2-t^2)^2,$$

hvor vi har udnyttet at $\cos A = -\cos C$. Ved at kombinere dette med udtrykket for arealet fås

$$\begin{aligned} 16T^2 &= 2^2(pq+rt)^2 - (p^2+q^2-r^2-t^2)^2 \\ &= \Big(2pq+2rt+p^2+q^2-r^2-t^2\Big) \\ &\quad \Big(2pq+2rt-p^2-q^2+r^2-t^2\Big) \\ &= \Big((p+q)^2-(r-t)^2\Big)\Big((r+t)^2-(p-q)^2\Big) \\ &= \Big(p+q+r-t\Big)\Big(p+q+t-r\Big) \\ &\quad \Big(p+r+t-q\Big)\Big(q+r+t-p\Big) \\ &= 2^4(s-t)(s-r)(s-q)(s-p) \\ T &= \sqrt{(s-q)(s-r)(s-t)(s-p)}. \end{aligned}$$

Opgave 1.2
Kald centrum for den indskrevne cirkel for I. Arealet af trekant ABI er da $\frac{1}{2}rc$ da r er højden, og c er grundlinjen. Tilsvarende er arealet for trekant ACI og BCI henholdsvis $\frac{1}{2}rb$ og $\frac{1}{2}ra$. Da arealet af trekant ABC netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

$$T = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

Opgave 1.3
Kald den store cirkels røringspunkt med AB for E, med AD for F og med tangenten for G. Der gælder da at $|EP| = |PG|$ og $|GQ| = |QF|$. Dermed er trekantens omkreds $|AP|+|AQ|+|PQ| = |AE|+|AF| = 2R$. Arealet af en trekant er givet ved den halve omkreds gange radius i den indskrevne cirkel, dvs. arealet er Rr.

Opgave 1.4
Da diagonalerne står vinkelret på hinanden, er

$$|AE|^2+|BE|^2+|CE|^2+|DE|^2 = |AB|^2+|CD|^2.$$

Kald vinkel $\angle ADB$ for u og vinkel $\angle DAC$ for v. Da er $\angle DBC = v$ da de spænder over samme bue, og $v + u = 90°$, dvs. $\sin v = \cos u$. To gange radius for den omskrevne cirkel i en trekant er lig med længden af den ene side divideret med sinus til den modstående vinkel. Benyttes dette på trekant ABD og trekant BCD fås $|AB| = 2R\sin u$ og $|CD| = 2R\sin v$. Dette giver som ønsket

$$|AB|^2+|CD|^2 = (2R)^2(\sin^2 u+\sin^2 v) = 4R^2(\sin^2 u+\cos^2 u) = 4R^2.$$

Opgave 1.5
Lad $n \geq 3$, og lad $n-1$, n og $n+1$ være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da $\frac{3n}{2}$. Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2}\Big(\frac{3n}{2}-n+1\Big)\Big(\frac{3n}{2}-n\Big)\Big(\frac{3n}{2}-n-1\Big)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}.$$

For $n = 4$ er $T = 6$, så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad n være et lige tal, $n \geq 4$, og antag at $\frac{3}{4}(n^2-4)$ er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne $m-1$, m og $m+1$ hvor $m = n^2 - 2$. Da er $m > n$, m er lige, og

$$\frac{3}{4}(m^2-4) = \frac{3}{4}(m-2)(m+2) = \frac{3}{4}(n^2-4)n^2.$$

Dermed er

$$T_m = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$$

et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

Opgave 1.6
Ifølge cosinusrelationen er

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \\
&= \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+2abc}{2abc} \\
&= \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{2abc} + 1 \\
&= \frac{8\frac{T^2}{s}}{8RT} + 1 \\
&= \frac{r}{R} + 1.
\end{aligned}$$

Opgave 1.7
Bemærk først at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for T. Da er $a+b+c = \frac{2T}{r}$ og $abc = 4RT$. Vi har nu

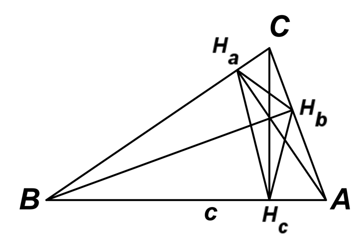
$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{2T}{r4RT} = \frac{1}{2rR}.$$

som ønsket.

Opgave 1.8
Hvis vi skal vise at radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC er dobbelt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant $H_aH_bH_c$, svarer det ifølge formlen for radius i den omskrevne cirkel til at vise at

$$2\frac{|H_aH_c|}{\sin(\angle H_aH_bH_c)} = \frac{c}{\sin C}.$$

Vi ønsker derfor at finde udtryk for $|H_aH_c|$ og $\angle H_aH_bH_c$ som kun afhænger af sider og vinkler i trekant ABC.



Det er kendt at AH_cH_aC er indskrivelig, og dermed er $\angle C = 180^\circ - \angle AH_cH_a = \angle H_aH_cB$. Nu har trekant ABC og H_aBH_c to ens vinkler, dvs at de er ensvinklede. Ifølge sinusrelationen benyttet på trekant H_aBH_c er

$$\frac{|H_aH_c|}{\sin B} = \frac{|BH_a|}{\sin C}.$$

Hvis vi benytter formlen for cosinus i den retvinklede trekant AH_aB, får vi yderligere

$$|BH_a| = c \cdot \cos B.$$

Samlet giver dette

$$|H_aH_c| = \frac{c \cdot \cos B \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{c \cdot \sin(2B)}{2 \sin C}.$$

Her har vi benyttet formlen for sinus til den dobbelte vinkel $\sin(2B) = 2 \sin B \cos B$.

På samme måde som ovenfor kan man vise at trekanterne ABC, AH_bH_c og H_aH_bC er ensvinklede, og dette giver at $\angle H_cH_bH_a = 180° - 2B$. Samlet er

$$2\frac{|H_aH_c|}{\sin \angle H_aH_bH_c} = 2\frac{|H_aH_c|}{\sin(2B)} = \frac{c}{\sin C}.$$

Opgave 2.1

Kald røringscirklernes røringspunkter med siderne a, b og c for henholdsvis A_1, B_1 og C_1. Røringscirklen til siden a rører desuden linjen gennem A og B i et punkt vi kalder A_B, og den rører linjen gennem A og C i et punkt vi kalder A_C. Vi ved at $|AB| + |BA_1| = |AB| + |AB_1|$ da de begge er den halve omkreds. Dette giver samlet at $|BA_1| = |AB_1|$. På tilsvarende vis ses at $|AC_1| = |CA_1|$ og $|BC_1| = |CB_1|$. Om cevianerne gælder derfor at

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|}\frac{|CA_1|}{|A_1B}\frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1,$$

og Cevas sætning giver nu at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 2.2

Lad s være den halve omkreds. Da ved vi at $T = rs$, samt fra Herons formel at $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Betragt den ydre røringscirkel til siden a. Kald centrum for O og røringspunkterne mellem cirklen og linjerne AB, AC og BC for henholdsvis D, E og F. Det er kendt at $|AD| = |AE| = s$, og dermed at $|BF| = |BD| = s - c$ og $|CF| = |CE| = s - b$. Nu er

$$T = T_{\triangle ADO} + T_{\triangle AEO} - T_{\triangle BDO} - T_{\triangle FBO} - T_{\triangle FCO} - T_{\triangle ECO} =$$

$$T = \frac{1}{2}sr_1 + \frac{1}{2}sr_1 - \frac{1}{2}r_1(s-c) - \frac{1}{2}r_1(s-c) - \frac{1}{2}r_1(s-b) - \frac{1}{2}r_1(s-b)$$

$$T = r_1(s - (s-c) - (s-b)) = r_1(s-a).$$

Tilsvarende får man for de andre røringscirkler at $T = r_2(s-b)$ og $T = r_3(s-c)$. Dette giver samlet

$$T^2 = \frac{T^4}{T^2} = \frac{rsr_1(s-a)r_2(s-b)r_3(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rr_1r_2r_3.$$

Opgave 3.1

Først viser vi at hvis vi lader punkterne A, B og C være faste og lader cirklen variere, da vil også punktet P være fast: Betragt to forskellige cirkler C_1 og C_2 som tangenterne fra P skærer i henholdsvis S_1, T_1 og S_2, T_2. De to cirklers radikalakse er linjen gennem deres fælles punkter B og C, dvs. A ligger på radikalaksen, og

$$|AS_1| = |AT_1| = |AS_2| = |AT_2|$$

er netop potensen af A mht. de to cirkler. Dermed ligger S_1, Q_1, S_2 og Q_2 på en cirkel med centrum i A. Lad Q være skæringspunktet mellem S_1T_1 og S_2T_2. Vi vil vise at $Q = P$, for det betyder netop at P ligger fast uanset placeringen af cirklen. Ifølge sætningen om et punkts potens er potensen af Q mht. cirklen med centrum i A

$$|S_1Q||T_1Q| = |S_2Q||T_2Q|.$$

Men det viser netop at Q ligger på radikalaksen for de to cirkler C_1 og C_2, altså at Q ligger på linjen BC og dermed $Q = P$.

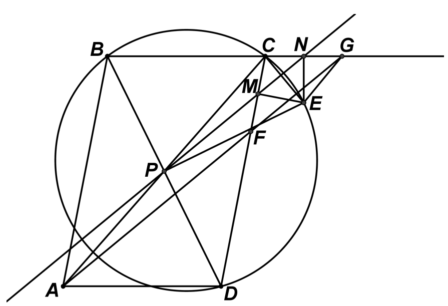
Vi kan nu uden tab af generalitet antage at BC er diameter i opgavens oprindelige cirkel. Kald denne cirkels centrum for O og radius for r. Trekanterne ASO og SPO er ensvinklede da de begge er rette og yderligere har vinklen ved O til fælles. Dermed er $\frac{|OS|}{|AO|} = \frac{|PO|}{|OS|}$, og altså $|PO||AO| = |OS|^2 = r^2$. I alt er

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{|AO| - |PO|}{|PO| + r} = \frac{|AO|^2 - |PO||AO|}{|PO||AO| + r|AO|} =$$

$$\frac{|AO|^2 - r^2}{r^2 + r|AO|} = \frac{|AO| - r}{r} = 2\frac{|AC|}{|BC|}.$$

Opgave om Simsonlinjen 4.1
Firkant PCP_2P_1 er indskrivelig da begge diagonaler star vinkelret på en side, og dermed er $\angle CP_1P_2 = \angle CPP_2$. Firkant PP_1BP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og dermed er $\angle BP_1P_3 = \angle BPP_3$. Firkant PP_2AP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og da firkant $ABPC$ pr. konstruktion er indskrivelig, er $\angle P_3PP_2 = 180° - \angle BAC = \angle BPC$. Af dette følger at $\angle BPP_3 = \angle CPP_2$, og samlet at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$, dvs. at punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.

Opgave 4.2
Lad P, M og N være midtpunkterne af linjestykkerne CA, CF og CG. Da punkterne A, F og G ligger på linjen l, ligger P, M og N på en linje som er parallel med l. Da $ABCD$ er et parallelogram, er P skæringspunktet mellem diagonalerne.



Punktet E ligger på den omskrevne cirkel til trekant BCD, og da $|EF| = |EG| = |EC|$ må projektionen af E på henholdsvis CD og BC være M og N. Projektionen af E på BD ligger ifølge sætningen om Simsonlinjen på linjen gennem M og N, dvs. at P er projektionen af E på BD. Da firkant $BCED$ er indskrivelig, er $\angle DBE = \angle DCE$, hvilket giver at trekant BEP og trekant CEM er ensvinklede, dvs. at $\angle PEB = \angle MEC$. Firkant $CMEN$ er også indskrivelig da to modstående vinkler er rette, dvs. at $\angle CNM = \angle CEM$. Alt dette giver samlet

$$\angle FAD = \angle CNM = \angle CEM = \angle BEP =$$
$$\frac{1}{2}\angle BED = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2}\angle BAD.$$

Hermed har vi vist at linjen l er vinkelhalveringslinje for vinkel BAD