

Kombinatorik 2

Disse noter introducerer nogle centrale metoder som ofte benyttes i kombinatorikopgaver, og kræver et grundlæggende kendskab til kombinatorik (se fx *Kombinatorik*). Der er mange virkelig svære opgaver, og derfor er flere opgaver markeret med *Hint* hvilket betyder at man bagerst kan finde et hint til opgaven.

1 Fordeling af n elementer i m bokse

Binomialkoefficienterne fortæller på hvor mange måder man kan udtage r elementer ud af n elementer. Man kan også med binomialkoefficienter lave en formel for på hvor mange måder man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse. Da objekterne er ens, er det lige meget hvilke der havner i hvilke bokse; det interessante er kun hvor mange der er i hver boks.

1.1 Sætning

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på $\binom{n+m-1}{m-1}$ måder. Nogle af boksene må gerne være tomme.

Bevis

Sæt de n objekter op på en række. At fordele dem i m nummererede bokse svarer til at sætte $m - 1$ skillevægge op i rækken, således at man putter objekterne før den første skillevæg i første boks osv. Det svarer til at fordele n objekter og $m - 1$ skillevægge på en række med $n + m - 1$ pladser, hvilket kan gøres på $\binom{n+m-1}{m-1}$ måder.

1.2 Eksempel

I et supermarked vil du købe 10 slikposer, og der er 5 forskellige slags at vælge imellem. På hvor mange måder kan du vælge de 10 poser?

Det svarer til at fordele 10 objekter i fem nummererede bokse der hver repræsenterer en bestemt slags slikpose, dvs. ifølge sætningen er der $\binom{10+5-1}{5-1} = 1001$ måder at vælge på.

1.3 Eksempel

I en isbutik sælger de vaffelis med op til fem kugler, og de har vanille-, jordbær- og chokoladeis. Når man skal udregne hvor mange forskellige vaffelis man kan lave, kan man bruge sætningen om at fordele n objekter i m bokse. Vi antager at kuglernes rækkefølge er underordnet. Antallet af vaffelis svarer nu til at fordele 5 kugler i 4 bokse hvor den ene boks repræsenterer vanille, den anden jordbær, den tredje chokolade og den fjerde ingenting. På denne måde får man alle kombinationer inklusiv den uden kugler. Hvis man trækker den fra, er der derfor

$$\binom{5+4-1}{4-1} - 1 = \binom{8}{3} - 1 = 55$$

forskellige kombinationer.

1.4 Opgave

Bevis at antallet af måder at fordele n ens kugler i m forskellige bokse, $n \geq m$, således at der mindst er en i hver boks, er $\binom{n-1}{m-1}$.

1.5 Opgave

I et supermarked vil du købe 10 slikposer, og der er 5 forskellige slags at vælge imellem, men supermarkedet har kun 6 poser tilbage af tre af slagsene samt 7 poser af de to sidste slags. På hvor mange måder kan du vælge de 10 poser?

1.6 Opgave

En skat på 50 guldstykker skal fordeles mellem 6 pirater. De beslutter sig for at skrive alle kombinationer ned hvor ingen får mere end halvdelen af guldstykkerne, og alle får mindst 4 guldstykker, og derefter trække lod blandt disse kombinationer. Det tager piraterne et minut at skrive en kombination ned. Hvor lang tid tager det dem at skrive samtlige kombinationer ned?

1.7 Opgave

I et lottospil udtrækkes syv tal ud af 36. Man kan som bekendt vælge de syv tal på $\binom{36}{7} = 8347680$ måder. Vis at mere end $\frac{3}{4}$ af disse kombinationer indeholder to nabotal. (*Hint*)

1.8 Opgave

I et ringspil er der 10 ringe i forskellige farver samt fem forskellige målpinde til at kaste efter. Hvor mange forskellige slutkonfigurationer findes der med 7 ringe på målpindene og 3 ringe i græsset? (*Hint*)
(Bemærk at hvis flere ringe er på samme målpind, kan de ligge i forskellig rækkefølge på pinden.)

2 Tælle på to måder

I *Kombinatorik* så vi flere gange at man kan vise nogle formler hvori der indgår binomialkoefficienter, ved at tælle på to måder.

2.1 Eksempel

Formlen

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m}$$

kan let vises ved at tælle på to måder, mens det er langt mere krævende hvis man begynder at omskrive binomialkoefficienterne.

Tallet $\binom{n+m}{m}$ angiver på hvor mange måder man kan fordele n ens kugler i $m+1$ kasser. Man kan også tælle dette på følgende måde: Når der er $n-k$ kugler i den første boks, kan man fordele de k resterende kugler i de m resterende bokse på $\binom{k+m-1}{m-1}$ måder. Når man summerer dette, får man netop venstresiden af lighedstegnet.

2.2 Eksempel

Formlen

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

kan også vises ved at tælle på to måder.

Vi benytter nu to forskellige metoder til at tælle på hvor mange måder man kan nedsætte et udvalg med en formand når der er n personer at vælge imellem, og udvalget skal bestå af mellem en og n personer:

Metode 1: Først er der n muligheder for at vælge formanden. Derefter skal man for de $n - 1$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan samlet gøres på $n2^{n-1}$ måder.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k måder at vælge formanden på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Dermed er formlen vist.

2.3 Opgave

Vis formlerne

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \text{ og } \sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

(Hint)

2.4 Opgave

Lad n og r være hele positive tal. Formlen

$$\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$$

kan vises ved at benytte at

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

på denne måde

$$\begin{aligned} \binom{n+r+1}{r} &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r}{r-1} \\ &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-1}{r-2} \\ &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-2}{r-3} \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k}. \end{aligned}$$

Vis i stedet formelen ved at tælle på to måder. (Hint)

2.5 Opgave

Lad $F(n, r)$ betegne gennemsnittet af mindste-elementerne i samtlige delmængder af $\{1, 2, \dots, n\}$ med r elementer.

Vis at

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

(IMO 1982) (Hint)

2.6 Opgave

a) I en by er der et vejnet som danner et kvadrat med $n + 2$ veje nord-syd og $n + 2$ veje øst-vest. Langs den nordligste og den østligste vej løber en flod. Astrid starter i det sydvestlige hjørne af vejnettet. Hun vil ned til floden og går på følgende måde. Først slår hun plat og krone. Hvis det bliver krone, går hun mod nord til næste vejkryds, og hvis det bliver plat går hun mod øst til næste vejkryds. Sådan fortsætter hun til hun når floden. Bestem sandsynligheden for at hun når floden der hvor den nordligste vej krydser den fjerde vej fra vest.

b) Vis formelen

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

2.7 Opgave

Vis at

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2 \binom{n+1}{3}$$

ved at tælle på to måder. (*Hint*)

2.8 Opgave

I en konkurrence er der a deltagere og b dommere, hvor $b \geq 3$ er et ulige tal. Hver dommer bedømmer om hver deltager har bestået eller er dumpet. Antag et k er et tal således at der for to vilkårlige dommere gælder at deres bedømmelse højst stemmer overens for k deltagere. Vis at $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$. (IMO 98) (*Hint*)

3 Princippet om inklusion og eksklusion. PIE

I nogle situationer har man behov for at tælle antallet af elementer i en foreningsmængde, og det kan man benytte princippet om inklusion og eksklusion til, også kaldet PIE.

3.1 Eksempel

Hvis man skal bestemme antallet af elementer i foreningsmængden mellem to mængder A og B , ses det nemt ved et Venn-diagram at

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tilsvarende ses for tre mængder A , B og C at

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Man inkluderer med andre ord først alt det der er i A og i B og i C , men så har man inkluderet alt det de har tilfælles to gange hvis det ligger i to af mængderne, og tre gange hvis det ligger i alle tre mængder. Derfor ekskluderer man nu alt det der ligger i fællesmængden mellem A og B , fællesmængden mellem A og C samt fællesmængden mellem B og C . Nu har man sørget for at alt det der ligger i en eller to af mængderne er inkluderet præcis en gang. De elementer der ligger i alle tre mængder, har man imidlertid først inkluderet tre gange, men derefter ekskluderet tre gange, dvs. vi skal til slut inkludere disse elementer

igen.

Dette kan generaliseres til følgende sætning

3.2 Sætning. PIE

Antallet af elementer i foreningsmængden mellem de n mængder A_1, A_2, \dots, A_n kan beregnes således:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Bevis

Formlen bevises ved at se på et element der indgår i præcis k af mængderne. Dette element er talt med

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = 1$$

gang.

3.3 Eksempel

Man kan fx benytte PIE til at tælle antallet af permutationer af tallene $1, 2, \dots, n$ der er fikspunktsfri, dvs. at intet tal afbildes på sig selv.

Der er i alt $n!$ permutationer af de n tal. Lad A_i være mængden af permutationer som fikserer elementet i . Antallet af fikspunktsfri permutationer P er da

$$P = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$P = n! - \left(\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \right).$$

Antallet af permutationer som fikserer k bestemte tal, er $(n-k)!$, dvs.

$$P = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots (-1)^n \binom{n}{n} 0! = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

3.4 Opgave

På hvor mange måder kan man udtage tre delmængder A, B og C af en mængde med n elementer således at $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ og $B \cap C \neq \emptyset$, mens $A \cap B \cap C = \emptyset$.

3.5 Opgave

Lad n og k være positive hele tal. Vis at

$$n! = (n+k)^n + (-1)^1 \binom{n}{1} (n+k-1)^n + (-1)^2 \binom{n}{2} (n+k-2)^n + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (n+k-n)^n.$$

(Hint)

3.6 Opgave

Lad S_{2n} være mængden af permutationer af tallene $1, 2, 3, \dots, 2n$. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P hvis der findes et $i \in \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$, så $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Vis at mere end halvdelen af alle permutationerne i S_{2n} har egenskaben P . (*Hint*)

4 Hints

Opgave 1.7

Tæl alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal ved at betragte de udtrukne tal som skillevægge mellem de resterende 29 elementer eller før det første eller efter det sidste.

Opgave 1.8

Tæl først på hvor mange måder syv ens ringe kan fordeles på fem pinde. Overvej derefter for hver af disse kombinationer hvor mange kombinationer der er når man har 10 ringe med forskellig farve hvor syv skal fordeles på de syv forskellige positioner.

Opgave 2.3

- Antal måder at vælge et udvalg med en formand og en referent ud af n personer.
- Antal måder at vælge et udvalg med en formand, en referent og en kasserer ud af n personer.

Opgave 2.4

Se på antallet af måder at vælge r elementer ud af $n + r + 1$, og tæl antal kombinationer hvor man har valgt de $r - k$ første elementer, men ikke element nummer $r - k + 1$.

Opgave 2.5

Se på antallet af måder man kan udtage delmængder med $r + 1$ elementer af $\{1, 2, \dots, n + 1\}$, og tæl hvor mange der netop har $k + 1$ som det næstmindste element.

Opgave 2.7

Tæl antal måder at vælge x, y og z på så $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $z > x$ og $z > y$.

Opgave 2.8

Vurder antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse på to forskellige måder.

Opgave 3.5

Betragt mængden

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \{1, 2, 3, \dots, n + k\}\},$$

og lad A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt x_1, x_2, \dots, x_n .

Opgave 3.6

Lad A_k , $k = 1, 2, \dots, n$, være mængden af permutaioner σ hvor der findes et i så $\sigma(i) = k$ og $\sigma(i + 1) = k + n$ eller $\sigma(i) = k + n$ og $\sigma(i + 1) = k$. Brug PIE, og vurder summen.