

Kombinatorik 2

Disse noter introducerer nogle centrale metoder som ofte benyttes i kombinatorikopgaver, og kræver et grundlæggende kendskab til kombinatorik (se fx *Kombinatorik*). Der er mange virkelig svære opgaver, og derfor er flere opgaver markeret med *Hint* hvilket betyder at man bagerst kan finde et hint til opgaven.

1 Fordeling af n elementer i m bokse

Binomialkoefficienterne fortæller på hvor mange måder man kan udtage r elementer ud af n elementer. Man kan også med binomialkoefficienter lave en formel for på hvor mange måder man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse. Da objekterne er ens, er det lige meget hvilke der havner i hvilke bokse; det interessante er kun hvor mange der er i hver boks.

1.1 Sætning

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på $\binom{n+m-1}{m-1}$ måder. Nogle af boksene må gerne være tomme.

Bevis

Sæt de n objekter op på en række. At fordele dem i m nummererede bokse svarer til at sætte $m - 1$ skillevægge op i rækken, således at man putter objekterne før den første skillevæg i første boks osv. Det svarer til at fordele n objekter og $m - 1$ skillevægge på en række med $n + m - 1$ pladser, hvilket kan gøres på $\binom{n+m-1}{m-1}$ måder.

1.2 Eksempel

I et supermarked vil du købe 10 slikposer, og der er 5 forskellige slags at vælge imellem. På hvor mange måder kan du vælge de 10 poser?

Det svarer til at fordele 10 objekter i fem nummererede bokse der hver repræsenterer en bestemt slags slikpose, dvs. ifølge sætningen er der $\binom{10+5-1}{5-1} = 1001$ måder at vælge på.

1.3 Eksempel

I en isbutik sælger de vaffelis med op til fem kugler, og de har vanille-, jordbær- og chokoladeis. Når man skal udregne hvor mange forskellige vaffelis man kan lave, kan man bruge sætningen om at fordele n objekter i m bokse. Vi antager at kuglernes rækkefølge er underordnet. Antallet af vaffelis svarer nu til at fordele 5 kugler i 4 bokse hvor den ene boks repræsenterer vanille, den anden jordbær, den tredje chokolade og den fjerde ingenting. På denne måde får man alle kombinationer inklusiv den uden kugler. Hvis man trækker den fra, er der derfor

$$\binom{5+4-1}{4-1} - 1 = \binom{8}{3} - 1 = 55$$

forskellige kombinationer.

1.4 Opgave

Bevis at antallet af måder at fordele n ens kugler i m forskellige bokse, $n \geq m$, således at der mindst er en i hver boks, er $\binom{n-1}{m-1}$.

1.5 Opgave

I et supermarked vil du købe 10 slikposer, og der er 5 forskellige slags at vælge imellem, men supermarkedet har kun 6 poser tilbage af tre af slagsene samt 7 poser af de to sidste slags. På hvor mange måder kan du vælge de 10 poser?

1.6 Opgave

En skat på 50 guldstykker skal fordeles mellem 6 pirater. De beslutter sig for at skrive alle kombinationer ned hvor ingen får mere end halvdelen af guldstykkerne, og alle får mindst 4 guldstykker, og derefter trække lod blandt disse kombinationer. Det tager piraterne et minut at skrive en kombination ned. Hvor lang tid tager det dem at skrive samtlige kombinationer ned?

1.7 Opgave

I et lottospil udtrækkes syv tal ud af 36. Man kan som bekendt vælge de syv tal på $\binom{36}{7} = 8347680$ måder. Vis at mere end $\frac{3}{4}$ af disse kombinationer indeholder to nabotal. (*Hint*)

1.8 Opgave

I et ringspil er der 10 ringe i forskellige farver samt fem forskellige målpinde til at kaste efter. Hvor mange forskellige slutkonfigurationer findes der med 7 ringe på målpindene og 3 ringe i græsset? (*Hint*)
(Bemærk at hvis flere ringe er på samme målpind, kan de ligge i forskellig rækkefølge på pinden.)

2 Tælle på to måder

I *Kombinatorik* så vi flere gange at man kan vise nogle formler hvori der indgår binomialkoefficienter, ved at tælle på to måder.

2.1 Eksempel

Formlen

$$\sum_{k=0}^n \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m}$$

kan let vises ved at tælle på to måder, mens det er langt mere krævende hvis man begynder at omskrive binomialkoefficienterne.

Tallet $\binom{n+m}{m}$ angiver på hvor mange måder man kan fordele n ens kugler i $m+1$ kasser. Man kan også tælle dette på følgende måde: Når der er $n-k$ kugler i den første boks, kan man fordele de k resterende kugler i de m resterende bokse på $\binom{k+m-1}{m-1}$ måder. Når man summerer dette, får man netop venstresiden af lighedstegnet.

2.2 Eksempel

Formlen

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

kan også vises ved at tælle på to måder.

Vi benytter nu to forskellige metoder til at tælle på hvor mange måder man kan nedsætte et udvalg med en formand når der er n personer at vælge imellem, og udvalget skal bestå af mellem en og n personer:

Metode 1: Først er der n muligheder for at vælge formanden. Derefter skal man for de $n - 1$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan samlet gøres på $n2^{n-1}$ måder.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k måder at vælge formanden på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

Dermed er formlen vist.

2.3 Opgave

Vis formlerne

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \text{ og } \sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

(Hint)

2.4 Opgave

Lad n og r være hele positive tal. Formlen

$$\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$$

kan vises ved at benytte at

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

på denne måde

$$\begin{aligned} \binom{n+r+1}{r} &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r}{r-1} \\ &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-1}{r-2} \\ &= \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \binom{n+r-2}{r-2} + \binom{n+r-2}{r-3} \\ &\vdots \\ &= \sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k}. \end{aligned}$$

Vis i stedet formelen ved at tælle på to måder. (Hint)

2.5 Opgave

Lad $F(n, r)$ betegne gennemsnittet af mindste-elementerne i samtlige delmængder af $\{1, 2, \dots, n\}$ med r elementer.

Vis at

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

(IMO 1982) (Hint)

2.6 Opgave

a) I en by er der et vejnet som danner et kvadrat med $n + 2$ veje nord-syd og $n + 2$ veje øst-vest. Langs den nordligste og den østligste vej løber en flod. Astrid starter i det sydvestlige hjørne af vejnettet. Hun vil ned til floden og går på følgende måde. Først slår hun plat og krone. Hvis det bliver krone, går hun mod nord til næste vejkryds, og hvis det bliver plat går hun mod øst til næste vejkryds. Sådan fortsætter hun til hun når floden. Bestem sandsynligheden for at hun når floden der hvor den nordligste vej krydser den fjerde vej fra vest.

b) Vis formelen

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

2.7 Opgave

Vis at

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

ved at tælle på to måder. (*Hint*)

2.8 Opgave

I en konkurrence er der a deltagere og b dommere, hvor $b \geq 3$ er et ulige tal. Hver dommer bedømmer om hver deltager har bestået eller er dumpet. Antag et k er et tal således at der for to vilkårlige dommere gælder at deres bedømmelse højst stemmer overens for k deltagere. Vis at $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$. (IMO 98) (*Hint*)

3 Princippet om inklusion og eksklusion. PIE

I nogle situationer har man behov for at tælle antallet af elementer i en foreningsmængde, og det kan man benytte princippet om inklusion og eksklusion til, også kaldet PIE.

3.1 Eksempel

Hvis man skal bestemme antallet af elementer i foreningsmængden mellem to mængder A og B , ses det nemt ved et Venn-diagram at

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tilsvarende ses for tre mængder A , B og C at

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Man inkluderer med andre ord først alt det der er i A og i B og i C , men så har man inkluderet alt det de har tilfælles to gange hvis det ligger i to af mængderne, og tre gange hvis det ligger i alle tre mængder. Derfor ekskluderer man nu alt det der ligger i fællesmængden mellem A og B , fællesmængden mellem A og C samt fællesmængden mellem B og C . Nu har man sørget for at alt det der ligger i en eller to af mængderne er inkluderet præcis en gang. De elementer der ligger i alle tre mængder, har man imidlertid først inkluderet tre gange, men derefter ekskluderet tre gange, dvs. vi skal til slut inkludere disse elementer

igen.

Dette kan generaliseres til følgende sætning

3.2 Sætning. PIE

Antallet af elementer i foreningsmængden mellem de n mængder A_1, A_2, \dots, A_n kan beregnes således:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Bevis

Formlen bevises ved at se på et element der indgår i præcis k af mængderne. Dette element er talt med

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} = 1$$

gang.

3.3 Eksempel

Man kan fx benytte PIE til at tælle antallet af permutationer af tallene $1, 2, \dots, n$ der er fikspunktsfri, dvs. at intet tal afbildes på sig selv.

Der er i alt $n!$ permutationer af de n tal. Lad A_i være mængden af permutationer som fikserer elementet i . Antallet af fikspunktsfri permutationer P er da

$$P = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$P = n! - \left(\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \right).$$

Antallet af permutationer som fikserer k bestemte tal, er $(n-k)!$, dvs.

$$P = n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \dots (-1)^n \binom{n}{n} 0! = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

3.4 Opgave

På hvor mange måder kan man udtage tre delmængder A, B og C af en mængde med n elementer således at $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ og $B \cap C \neq \emptyset$, mens $A \cap B \cap C = \emptyset$.

3.5 Opgave

Lad n og k være positive hele tal. Vis at

$$n! = (n+k)^n + (-1)^1 \binom{n}{1} (n+k-1)^n + (-1)^2 \binom{n}{2} (n+k-2)^n + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (n+k-n)^n.$$

(Hint)

3.6 Opgave

Lad S_{2n} være mængden af permutationer af tallene $1, 2, 3, \dots, 2n$. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P hvis der findes et $i \in \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$, så $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Vis at mere end halvdelen af alle permutationerne i S_{2n} har egenskaben P . (*Hint*)

4 Hints

Opgave 1.7

Tæl alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal ved at betragte de udtrukne tal som skillevægge mellem de resterende 29 elementer eller før det første eller efter det sidste.

Opgave 1.8

Tæl først på hvor mange måder syv ens ringe kan fordeles på fem pinde. Overvej derefter for hver af disse kombinationer hvor mange kombinationer der er når man har 10 ringe med forskellig farve hvor syv skal fordeles på de syv forskellige positioner.

Opgave 2.3

- Antal måder at vælge et udvalg med en formand og en referent ud af n personer.
- Antal måder at vælge et udvalg med en formand, en referent og en kasserer ud af n personer.

Opgave 2.4

Se på antallet af måder at vælge r elementer ud af $n + r + 1$, og tæl antal kombinationer hvor man har valgt de $r - k$ første elementer, men ikke element nummer $r - k + 1$.

Opgave 2.5

Se på antallet af måder man kan udtage delmængder med $r + 1$ elementer af $\{1, 2, \dots, n + 1\}$, og tæl hvor mange der netop har $k + 1$ som det næstmindste element.

Opgave 2.7

Tæl antal måder at vælge x, y og z på så $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, $z > x$ og $z > y$.

Opgave 2.8

Vurder antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse på to forskellige måder.

Opgave 3.5

Betragt mængden

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_j \in \{1, 2, 3, \dots, n + k\}\},$$

og lad A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt x_1, x_2, \dots, x_n .

Opgave 3.6

Lad A_k , $k = 1, 2, \dots, n$, være mængden af permutaioner σ hvor der findes et i så $\sigma(i) = k$ og $\sigma(i + 1) = k + n$ eller $\sigma(i) = k + n$ og $\sigma(i + 1) = k$. Brug PIE, og vurder summen.

5 Løsningsskitser

Opgave 1.4

Først fordeles en kugle i hver boks, og derefter fordeles de resterende $n - m$ kugler frit i de m bokse. Det kan gøres på $\binom{n-m+m-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1}$ måder.

Opgave 1.5

Hvis der ikke var begrænsninger, så vi i eksemplet at der var 1001 muligheder. Fra dette trækker vi antal muligheder hvor vi vælger 7 eller flere af de tre slags der kun var 6 af, eller 8 eller flere af de to slags der kun var 7 af. Vi kan vælge 7 eller flere af en bestemt slags ved først at vælge syv af slagsen og derefter vælge tre poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$ måder. Vi kan vælge 8 eller flere af en bestemt slags ved først at vælge 8 af slagsen og derefter vælge to poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$ måder. I alt er der altså $1001 - 3 \cdot 35 - 2 \cdot 15 = 866$ kombinationsmuligheder.

Opgave 1.6

Hvis alle skal have mindst 4 guldstykker, er der 26 guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de 6 pirater, og det kan gøres på $\binom{26+6-1}{6-1} = \binom{31}{5} = 169911$ måder. For at få det ønskede antal, skal vi for hver pirat trække de kombinationer fra hvor hun har fået mere end 25 guldstykker. Hvis vi først giver fem pirater 4 guldstykker hver og den sidste 26, er der 8 guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de 6 pirater. Det kan gøres på $\binom{8+6-1}{6-1} = \binom{13}{5} = 1287$ måder. Dermed er der samlet $169911 - 6 \cdot 1287 = 162189$ kombinationer. Det tager piraterne 112 døgn 15 timer og 9 minutter at skrive samtlige kombinationer ned - så de får travlt!

Opgave 1.7

Vi tæller alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal. Forestil dig 36 bolde på en lang række som repræsenterer de 36 tal. Vi skal nu vælge syv bolde hvoraf der ikke må være to ved siden af hinanden. Dem farver vi sorte. Dette svarer i virkeligheden til at indsætte syv sorte skillevægge i mellemrummene mellem de 29 ikke valgte bolde eller foran den første eller efter den sidste ikke valgte bold, altså at indsætte syv sorte skillevægge på 30 pladser. Dette kan gøres på $\binom{30}{7} = 2035800$ måder, og dette er mindre end $\frac{1}{4}$ af 8347680.

Opgave 1.8

Hvis syv ens ringe skulle fordeles på fem pinde, kunne det gøres på $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4} = 330$ måder. Vi betragter nu hver af de 330 muligheder separat. De syv placeringer af ringene nummereres 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7. Da de 10 ringe har forskellig farve, skal vi beslutte hvilken ring der skal i første position, anden position osv. til og med syvende position, dvs. der er $\frac{10!}{3!}$ måder at fordele farverne på. Ifølge multiplikationsprincippet er der derfor i alt $330 \frac{10!}{3!} = 199584000$ slutkonfigurationer.

Opgave 2.3

a) Antal måder at vælge et udvalg med en formand og en referent ud af n personer tælles på to måder (formand og referent må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis formand og referent er to forskellige personer, er der $n(n-1)$ måder at vælge dem på. Derefter skal man for de $n-2$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan gøres på i alt $n(n-1)2^{n-2}$ måder. Hvis formand og referent er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder, dvs. samlet er der $n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$ måder at

nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^2 måder at vælge formanden og referent på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

b) Antal måder at vælge et udvalg med en formand, en referent og en kasserer ud af n personer tælles på to måder (formand, referent og kasserer må gerne være samme person):
 Metode 1: Hvis formand, referent og kasserer er tre forskellige personer, er der $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ måder at nedsætte udvalget på. Hvis formand, referent og kasserer samlet er to personer, er der $3n(n-1)2^{n-2}$ måder, og hvis formand, referent og kasserer er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder. Samlet er der $n(n-1)(n-2)2^{n-3} + 3n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n^2(n+3)2^{n-3}$ måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^3 måder at vælge formanden, referent og kasserer på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^n k^3 \binom{n}{k}$.

Opgave 2.4

Højresiden er antallet af måder at vælge r elementer ud af $n+r+1$. Dette kan tælles på en anden måde: Antal kombinationer hvor man har valgt de $r-k$ første elementer, men ikke element nummer $r-k+1$, er $\binom{n+r+1-(r-k+1)}{k} = \binom{n+k}{k}$. Dermed er

$$\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$$

Opgave 2.5

Der findes $\binom{n-k}{r-1}$ delmængder hvor mindste elementet er k , dvs. at

$$F(n, r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

Nu benyttes tricket med at tælle det samme på to forskellige måder igen, denne gang til at finde et pænere udtryk for højresidens tæller.

Vi ser på antallet af måder man kan udtage delmængder med $r+1$ elementer af $\{1, 2, \dots, n+1\}$, som er $\binom{n+1}{r+1}$. Disse mængder kan dog også tælles ved at tælle hvor mange der netop har $k+1$ som det næstmindste element, og det har netop $k \binom{n-k}{r-1}$ delmængder, da det mindste element kan vælges på k måder, og de resterende $r-1$ elementer kan vælges på $\binom{n-k}{r-1}$ måder. Dermed er

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}.$$

Samlet giver dette

$$F(n, r) = \frac{\sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{n+1}{r+1}.$$

Opgave 2.6

Astrid skal gå tre gange mod øst og $n+1$ gange mod nord for at nå floden i det ønskede kryds. Det sidste stykke skal hun gå mod nord, da hun ellers har nået floden i et tidligere kryds. Hun skal altså de første $n+3$ gange hun slår plat eller krone, slå tre plat og n krone, mens hun den sidste gang skal slå krone. Sandsynligheden for at hun gør dette, er

$$\binom{n+3}{3} \frac{1}{2^{n+3+1}}.$$

Astrid når med sandsynlighed 1 frem til floden på et tidspunkt. Sandsynligheden for at hun når floden der hvor den nordligste vej krydser den k 'te vej fra vest, $k = 1, 2, \dots, n-1$, er

$$\binom{n+k-1}{k-1} \frac{1}{2^{n+k}}.$$

Da der er symmetri, er sandsynligheden for at nå floden der hvor den østligste vej krydser den k 'te sydligste vej, den samme.

Dermed er

$$1 = 2 \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+k-1}{k-1} \frac{1}{2^{n+k}} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^{k+n}},$$

og dette giver den ønskede formel.

Opgave 2.7

Antal måder at vælge x, y og z på så $x, y, z \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $z > x$ og $z > y$, tælles på to måder:

Metode 1: For $z = k+1$ er der k^2 muligheder for x og y . Samlet kan man altså vælge x, y og z på $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ måder.

Metode 2: Hvis x og y er forskellige, svarer det til at vælge tre tal ud af $n+1$, sætte det største tal lig z og sætte de to sidste tal lig henholdsvis x og y . Dette kan gøres på $2 \binom{n+1}{3}$ måder. Hvis $x = y$ svarer det til at vælge to tal blandt de $n+1$ og sætte z lig det største og x og y lig det mindste. Samlet er der derfor $2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$ kombinationer.

Opgave 2.8

Vi tæller antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse. Der er i alt $\frac{b(b-1)}{2}$ par af dommere, og hvert par har højst bedømt k deltagere ens, så $N \leq k \frac{b(b-1)}{2}$.

Nu ser vi på en bestemt deltager X og tæller hvor mange par af dommere der har bedømt X ens. Hvis x dommere har ladet X bestå, er der $\frac{x(x-1)}{2}$ par af dommere der har ladet X bestå, og $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere der har dumpet X . Dermed er der i alt $\frac{x(x-1) + (b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere som bedømmer X ens. Men

$$\frac{x(x-1) + (b-x)(b-x-1)}{2} = \frac{2x^2 - 2bx + b^2 - b}{2} = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} \geq \frac{b^2}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Men $\frac{(b-1)^2}{4}$ er et helt tal da b er ulige, så antallet af par af dommere der bedømmer X ens, er mindst $\frac{(b-1)^2}{4}$. Dermed er $N \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$. Samlet giver dette at $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Opgave 3.4

Lad S være mængden af tripler af delmængder (A, B, C) hvor A, B og C er delmængder af en mængde med n elementer således at $A \cap B \cap C = \emptyset$. Vi beregner først antallet af elementer i S . Ved at tegne et Venn-diagram kan man se at hvert af de n elementer skal ligge i netop en af følgende syv disjunkte mængder: $\mathbb{C}(A \cup B \cup C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$, $C \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \setminus C$, $(A \cap C) \setminus B$ og $(B \cap C) \setminus A$. Dvs. der er 7^n tripler af delmængder (A, B, C) hvor $A \cap B \cap C = \emptyset$. Herfra skal vi trække alle dem hvor enten $A \cap B$, $A \cap C$ eller $B \cap C$ er tom. Lad X være mængden af tripler (A, B, C) hvor $A \cap B = \emptyset$, Y være

mængden af tripler (A, B, C) hvor $A \cap C = \emptyset$, og Z være mængden af tripler (A, B, C) hvor $B \cap C = \emptyset$. Vi ønsker at beregne $|X \cup Y \cup Z|$, da $|S| - |X \cup Y \cup Z|$ er det antal vi søger. Ifølge PIE er

$$|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|.$$

Elementerne i X er netop dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A \cap B) \setminus C$, men netop en af de øvrige seks disjunkte mængder ovenfor dvs. at $|X| = 6^n$. Tilsvarende er $|Y| = |Z| = 6^n$. Elementerne i $X \cap Y$ er netop dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A \cap B) \setminus C$ eller $(A \cap C) \setminus B$, men netop en af de øvrige fem disjunkte mængder ovenfor dvs. at $|X \cap Y| = 5^n$. Tilsvarende er $|X \cap Z| = |Y \cap Z| = 5^n$. Elementerne i $X \cap Y \cap Z$ er netop dem hvor hvert af de n elementer tilhører netop en af følgende fire disjunkte mængder $\mathbb{C}(A \cup B \cup C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$ og $C \setminus (A \cup B)$, dvs. at $|X \cap Y \cap Z| = 4^n$. I alt er der

$$|S| - |X \cup Y \cup Z| = 7^n - 3 \cdot 6^n + 3 \cdot 5^n - 4^n$$

kombinationer.

Opgave 3.5

Betragt mængden

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \{1, 2, 3, \dots, n+k\}\}.$$

Lad A_i , $i = 1, 2, \dots, n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt x_1, x_2, \dots, x_n . Antallet af elementer i S som ikke ligger i $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ er $n!$, da disse elementer netop er dem hvor x_1, x_2, \dots, x_n netop er samtlige tal $1, 2, \dots, n$ i en eller anden rækkefølge. Dermed er

$$n! = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$n! = |S| - \left(\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \right).$$

Antal elementer i S er $(n+k)^n$. Antallet af elementer i fællesmængden af r af delmængderne A_1, A_2, \dots, A_n er $(n+k-r)^n$ da x_1, x_2, \dots, x_n skal vælges blandt $n+k-r$ tal. Desuden er der $\binom{n}{r}$ måder at vælge de r delmængderne på. Dette giver netop

$$n! = (n+k)^n + (-1)^1 \binom{n}{1} (n+k-1)^n + (-1)^2 \binom{n}{2} (n+k-2)^n + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} (n+k-n)^n.$$

Opgave 3.6

Lad A_k , $k = 1, 2, \dots, n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i) = k$ og $\sigma(i+1) = k+n$ eller $\sigma(i) = k+n$ og $\sigma(i+1) = k$. Lad A være mængden af permutationer med egenskaben P . Da er

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

PIE giver dermed at

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Hvis vi blot ser på de første to led på højresiden, er et element fra A som ligger i m af delmængderne A_1, A_2, \dots, A_n talt med

$$m - \binom{m}{2} = m - \frac{m(m-1)}{2} \leq 1,$$

dvs. at

$$|A| \geq \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j|.$$

Desuden er $|A_k| = (2n-1)2(2n-2)! = 2(2n-1)!$ og $|A_k \cap A_l| = (2n-2)!2^2$. Det sidste ses på følgende måde. Vi skal vælge to elementer $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ således at i og $i+1$ afbildes i k og $k+n$, og j og $j+1$ afbildes i l og $l+n$. Dette kan gøres på

$$(2n-1)(2n-2) - 2(2n-2) = (2n-2)(2n-3)$$

måder da vi ikke må vælge i og j som to på hinanden følgende tal. Desuden skal vi vælge om i skal afbildes i k eller $k+n$, og om j skal afbildes i l eller $n+l$. Dette kan gøres på 2^2 måder. For de resterende $2n-4$ elementer er der $(2n-4)!$ muligheder. Dermed er

$$|A| \geq \binom{n}{1} 2(2n-1)! - \binom{n}{2} (2n-2)! 2^2 = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2} = \frac{|S_{2n}|}{2}.$$