Kombinatorik

Disse noter er en introduktion til kombinatorik og starter helt fra bunden, så en del af det indledende er sikkert kendt for dig allerede, men der kommer også hurtigt sværere opgaver.

1 Kombinationer

1.1 Multiplikationsprincippet

Ved et valg der består af n forskellige delvalg med henholdsvis $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valgmuligheder, er der i alt

$$m_1 m_2 \ldots m_n$$

valgmuligheder.

1.2 Eksempel

Når man fx skal udfylde en tipskupon, skal man træffe 13 valg da man skal sætte 13 krydser, et i hver række. I hver række er der 3 muligheder for at sætte et kryds, dvs. man kan udfylde en tipskupon på $3^{13} = 1594323$ måder.

1.3 Eksempel

Man kan også bruge multiplikationsprincippet til at bestemme hvor mange forskellige delmængder der findes af en mængde med n elementer. Når man skal udtage en delmængde, skal man for hvert element afgøre om det skal med eller ikke med, der er altså to muligheder for hvert element. Derfor er der 2^n forskellige delmængder af en mængde med n elementer. Her er både den tomme mængde og mængden selv talt med.

1.4 Opgave

Tallene fra 1 til 100 skal fordeles i tre disjunkte delmængder således at ingen af mængderne er tomme, og ingen mængde indeholder to på hinanden følgende tal. (At to mængder er disjunkte betyder at de ikke har nogen elementer tilfælles.) På hvor mange måder kan det gøres?

1.5 Eksempel

Til et stævne er der 14 hold der kæmper om guld, sølv og bronze. Når man skal bestemme på hvor mange forskellige måder medaljerne kan fordeles, har man 14 muligheder for at uddele guld, 13 for sølv og 12 for bronze, dvs. der er i alt $14 \cdot 13 \cdot 12$ måder at fordele medaljerne på.

I ovenstående eksempel skulle man udtage tre hold ud af 14 hvor rækkefølgen havde betydning. Generelt hvis man skal udtage r ud af n elementer således at rækkefølgen af de r elementer har betydning, kan man gøre det på

$$n(n-1)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

måder.

1.6 Sætning

Symbolet $\binom{n}{r}$ betegner antallet af måder hvorpå man kan udtage r elementer ud af n uden hensyntagen til rækkefølgen af de elementer man udtager. Altså antallet af måder hvorpå man kan udtage en delmængde med r elementer ud af en mængde med n elementer.
Der gælder at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Nogle benytter betegnelsen $K(n,r)$ i stedet for $\binom{n}{r}$.
Bemærk at $0! = 1$ per definition, og at formlen derfor også gælder for $r = 0$.

Bevis
I første omgang husker vi på at man kan udtage r elementer i rækkefølge på $\frac{n!}{(n-r)!}$ måder. Desuden kan r elementer ordnes i $r!$ forskellige rækkefølger, dvs. hver delmængde er talt med $r!$ gange, hvis vi udtager de r elementer i rækkefølge. Derfor er

$$\binom{n}{r} = \frac{\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1.7 Eksempel

Sætningen kan bruges i et utal af sammenhænge, når man skal afgøre på hvor mange måder man kan udvælge noget. Fx kan de syv vindertal i lotto, når der er 36 tal at vælge imellem, udtrækkes på $\binom{36}{7} = 8347680$ forskellige måder.

1.8 Eksempel

Man kan også bruge sætningen til at udregne på hvor mange måder man kan udtage syv kort af et sæt almindelige spillekort med 52 kort, således at man netop har et par, altså to kort med samme talværdi og fem kort med fem andre talværdier. Der er 13 forskellige talværdier, dvs. vi kan udvælge den talværdi parret har, på $\binom{13}{1} = 13$ måder. Desuden kan vi vælge de fem talværdier de fem sidste kort skal have, på $\binom{12}{5} = 792$ måder. For hver talværdi er der fire kort, dvs. vi nu kan vælge de to kort der indgår i vores par, på $\binom{4}{2} = 6$ måder. Desuden kan vi vælge hvert af de fem andre kort på $\binom{4}{1} = 4$ måder. I alt er der altså ifølge multiplikationsprincippet

$$\binom{13}{1}\binom{12}{5}\binom{4}{2}\binom{4}{1}^5 = 63258624$$

måder at udtage syv kort på, så man netop har et par.

1.9 Opgave

Bestem på hvor mange måder man kan udtage seks kort fra et sæt spillekort, således at man netop har to par.

1.10 Eksempel

På et skakbræt med 8×8 felter kravler en myre fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne. Den kravler kun på stregerne mellem felterne eller langs kanten af brættet, og den sørger for at turen bliver så kort så mulig. Vi skal nu regne ud hvor mange forskellige ruter myren kan vælge. Først bemærker vi at den samlet skal gå otte felter op og otte felter til højre, hvis vi forestiller os at den starter i nederste venstre hjørne. Den skal med andre ord vælge præcis hvilke otte af de 16 "skridt"der skal være lodrette, dvs. den har $\binom{16}{8} = 12.870$ forskellige ruter at vælge imellem.

1.11 Opgave

I en by har man et centrum der kun består af veje der går nord-syd og øst-vest. Der er syv veje nord-syd og fem veje øst-vest, men pga. vejarbejde er vejkrydset mellem den midterste vej nord-syd og den midterste vej øst-vest totalt spærret så man ikke kan passere fra en af de fire veje krydset består af, til en af de andre.
Jonatan står i det sydvestlige hjørne af centrum og skal til det nordøstlige hjørne, og han ønsker at gå så kort så muligt. Hvor mange forskellige ruter kan han vælge imellem?

1.12 Opgave

Der skal bygges 25 byer på 13 øer, mindst en på hver. Desuden skal der etableres færgeforbindelser mellem hvert par af byer på forskellige øer. Bestem det mindst mulige antal færgeforbindelser. (BW1994)

1.13 Opgave

I en konveks n-polygon indtegnes samtlige diagonaler, og det antages at der ikke findes tre diagonaler som skærer hinanden i samme punkt. (Polygonens sider er ikke diagonaler.)

a) Bestem antallet af skæringspunkter mellem diagonaler.

b) Bestem antallet af dele som diagonalerne deler polygonen i.

c) Bestem antallet af trekanter der opstår. (Altså trekanter hvis hjørner er polygonens hjørner eller en skæring mellem to diagonaler.)

2 Pascals trekant og regning med binomialkoefficienter

Binomialkoefficienterne $\binom{n}{r}$ viser sig at kunne frembringes på en interessant måde, og for at vise dette har vi behov for følgende formel.

2.1 Sætning

Der gælder at

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bevis
Hvis man skal udtage $k+1$ elementer ud af $n+1$, kan man enten udtage $k+1$ ud af de n første af de $n+1$ elementer, eller man kan udtage k elementer blandt de n første samt udtage det sidste ud af de $n+1$ elementer. Dermed er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bemærk at man når frem til lighedstegnet ved at tælle det samme på to forskellige måder; dette er et meget anvendeligt trick.

Alternativt kan man også blot regne, men det er ikke helt så elegant:

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\Big((n-k)+(k+1)\Big) =$$
$$\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}.$$

2.2 Pascals trekant

Binomialkoefficienterne kan derfor opstilles i det man kalder Pascals trekant således at en binomialkoefficient hele tiden er summen af de to ovenfor:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

2.3 Sætning

Der gælder at

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Bevis
Når man ganger $(1+x)^n$ ud, får man netop x^k ved at gange x'et fra k af parenteserne med 1-tallerne fra resten. Dette kan man gøre på $\binom{n}{k}$ måder.

2.4 Binomialformlen

Der gælder at

$$2^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

Bevis
Ifølge sætning 2.3 er

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.$$

Alternativt kan man benytte tricket med at tælle det samme på to forskellige måder, da begge sider af lighedstegnet angiver antallet af delmængder af en mængde med n elementer. Vi har tidligere set at der findes netop 2^n delmængder af en mængde med n elementer. Man kan også tælle delmængderne ved at summere antal delmængder med $0, 1, \ldots$ op til n elementer, og det er netop det der står på højresiden.

2.5 Opgave

Vis at

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

2.6 Opgave

Lad $P_k(x) = 1 + x + x^2 + \ldots x^{k-1}$. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_k(x) = 2^{n-1} P_n\Big(\frac{1+x}{2}\Big)$$

for alle reelle tal x og alle naturlige tal n. (BW1998)
(Hint: Udnyt at $(1-x)P_k(x) = 1 - x^k$.)

3 Flere kombinationer

At vælge r elementer ud af n svarer til at splitte de n elementer op i to bunker: en med r elementer og en med $n-r$ elementer. Nogle gange har man imidlertid brug for at fordele de n elementer i mange flere bunker.

3.1 Sætning

Symbolet $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$ betegner antallet af måder hvorpå man kan dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer i hver delmængde, således at $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. Der gælder at

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m!}$$

Bevis
Vi viser sætningen ved induktion efter m. Hvis $m = 2$, følger det af sætning 1.6. Antag at sætningen er sand for $m-1$, og vi ønsker at vise at sætningen er sand for m disjunkte delmængder med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer i hver. Antal måder hvorpå man kan dele mængden i $m-1$ disjunkte delmængder med $r_1, r_2, \ldots, r_{m-2}, r_{m-1} + r_m$ elementer i hver, er ifølge induktionsantagelsen

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_{m-2}, r_{m-1} + r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_{m-2}!(r_{m-1} + r_m)!}$$

Desuden kan delmængden A_{m-1} med $r_{m-1} + r_m$ elementer deles i to disjunkte delmængder med henholdsvis r_{m-1} og r_m elementer på $\binom{r_{m-1}+r_m}{r_{m-1}, r_m} = \frac{(r_{m-1}+r_m)!}{r_{m-1}! r_m!}$ måder. Ifølge multiplikationsprincippet får vi nu

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_{m-2}!(r_{m-1} + r_m)!} \frac{(r_{m-1} + r_m)!}{r_{m-1}! r_m!} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m!}$$

3.2 Eksempel

En klasse med 12 elever skal deles i tre grupper med fire i hver. På hvor mange måder kan dette gøres?
Hvis grupperne betegnes A, B og C, kan de tolv elever ifølge sætningen fordeles i grupperne A, B og C med 4 i hver på $\binom{12}{4,4,4} = 34650$ måder. Men i spørgsmålet havde de tre grupper ingen betegnelse og var altså ikke ordnede, dvs. vi har talt hver kombination med $3! = 6$ gange. Der er dermed $\frac{34650}{6} = 5775$ måder at dele klassen på.

3.3 Opgave

En kube er sammensat af $3 \times 3 \times 3$ små enhedskuber. På hvor mange måder kan man komme fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne, når man kun må gå langs kanterne af enhedskuberne og skal vælge en rute der er så kort så mulig?

4 Rekursion

I stedet for at finde en formel for antal kombinationer ud fra en eller anden parameter n, kan man bestemme antallet af kombinationer rekursivt dvs. at man kan beskrive hvor mange kombinationer der er for et givet n, ud fra antallet af kombinationer for $n-1$ og måske yderligere for $n-2$. Man kan sige at rekursion går ud på at man udtrykker det n-te tal af fx en talrække ved hjælp af nogle af de foregående tal. Fx er Fibonacci-tallene $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ beskrevet rekursivt da det næste tal i rækken netop er summen af de to foregående.

4.1 Eksempel

Peter skal gå op ad en trappe med 12 trin. I hvert skridt går han enten et eller to trin op. På hvor mange forskellige måder kan han gå op ad trappen? Dette problem kan løses ved rekursion. Lad A_k betegne antal kombinationer ved en trappe med k trin. Det er nemt at indse at $A_1 = 1$ og $A_2 = 2$. Det sidste skridt kan enten bestå af et eller to trin. Hvis trappen har n trin, må der være A_{n-1} kombinationer der ender med et skridt på et trin, da der er A_{n-1} forskellige måder at nå det næstsidste trin på. Tilsvarende er der A_{n-2} kombinationer som afsluttes med et skridt på to trin. Dermed er $A_n = A_{n-2} + A_{n-1}$ ligesom for Fibonaccitallene, og man kan gå op ad en trappe på 12 trin på 233 forskellige måder.

4.2 Opgave

Peter skal gå op ad en trappe med 12 trin, men tager denne gang både skridt af et, to og tre trin. På hvor mange forskellige måder kan Peter gå op ad trappen?

4.3 Opgave

En interessant delmængde af mængden $M_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, hvor n er et ulige tal, er en delmængde som for hvert lige tal den indeholder, også indeholder de to ulige nabotal. Hvor mange interessante delmængder findes der af M_{13}?

5 Sandsynligheder

Kombinatorik bruges også ofte i sandsynlighedsregning. Hvis man fx ønsker at beregne sandsynligheden for at få syv rigtige i lotto med 36 tal, er der kun en af de 8347680 kombinationer af 7 forskellige tal som udtrækkes, dvs. sandsynligheden for at få syv rigtige er $\frac{1}{8347680}$ da alle kombinationer er lige sandsynlige.

5.1 Opgave

I en skål er der fem røde bolde, tre blå og to grønne. Hvad er sandsynligheden for at der er en rød, blå og en grøn bold tilbage i skålen, hvis man fjerner syv tilfældige bolde?

5.2 Opgave

I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger 1993. Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve, når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er $\frac{1}{2}$. Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen? (GM1993)

6 Løsningsskitser

Opgave 1.4
Kald delmængden som indeholder 1, for A, delmængden som indeholder 2, for B og den sidste for C. Der er nu to muligheder for at placere tallet 3, da ingen mængde må indeholde to på hinanden følgende tal. Da dette gælder for alle de resterende tal, er der altså $2^{100-2} = 2^{98}$ forskellige måder at fordele tallene på. I en enkelt af disse kombinationer bliver mængden C dog tom, dvs. resultatet er $2^{98} - 1$.

Opgave 1.9
Man kan vælge de to pars talværdier på $\binom{13}{2} = 78$ måder og talværdierne for de sidste to kort på $\binom{11}{2} = 55$ måder. Når talværdierne er bestemt, kan de to par hver vælges på $\binom{4}{2} = 6$ måder og de to andre kort på $\binom{4}{1} = 4$ måder. Der er altså i alt $78 \cdot 55 \cdot 6^2 \cdot 4^2 = 2471040$ måder.

Opgave 1.11
Der må være lige mange ruter nord om som syd om det spærrede kryds, så derfor kan vi nøjes med at tælle dem nord om. Vi betegner vejkrydsene (a,b) således at Jonatan står ved (1,1) og skal til (5,7), og det spærrede vejkryds betegnes (3,4). Hvis Jonatan skal nord om det spærrede kryds, skal han enten gennem (5,2) eller (4,3), men ikke gennem begge. Jonatan kan komme til (5,2) på $\binom{5}{1} = 5$ måder da han samlet skal gå fire gange mod nord og en gang mod øst. Han kan komme fra (5,2) til (5,7) på en måde, så samlet er der 5 ruter gennem (5,2). Hvis han i stedet vælger at gå via (4,3), er der $\binom{5}{2} = 10$ måder at komme fra (1,1) til (4,3) da han skal gå tre gange mod nord og to gange mod øst. Desuden er der $\binom{5}{1} = 5$ ruter fra (4,3) til (5,7). Samlet er der altså 50 ruter via (4,3). Dette giver i alt 110 ruter for Jonatan at vælge imellem.

Opgave 1.12
Antag at vi har en placering af byerne hvor der er mindst to øer med mere end en by. Lad antallet af byer på de to øer være n_1 og n_2 med $n_1 \leq n_2$. Hvis vi flytter en by fra ø 1 til ø 2, nedlægger vi n_2 forbindelser og opretter $n_1 - 1$, dvs. der bliver færre forbindelser. Dermed er der færrest muligt forbindelser, når der er 12 øer med en by og en ø med 13 byer. Dette giver $12 \cdot 13 + \binom{12}{2} = 222$ forbindelser.

Opgave 1.13
a) Hvert skæringspunkt mellem to diagonaler kan på entydig måde repræsenteres ved de fire hjørner som de to diagonaler forbinder. Dermed er der $\binom{n}{4}$ skæringspunkter mellem diagonaler.
b) For hver gang man tegner en ny diagonal, opstår der en del mere samt en del mere for hvert skæringspunkt denne diagonal danner med en anden diagonal. Der er $\binom{n}{2} - n$ diagonaler, dvs. at polygonen deles i $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$ dele.
c) Antallet af trekanter der har alle tre hjørner i polygonens hjørner, er $\binom{n}{3}$. Nu tæller vi trekanter der netop har et hjørne som ikke er et af polygonens hjørner, men en skæring mellem to diagonaler. For hver skæring mellem to diagonaler opstår der netop fire sådanne trekanter, dvs. der er $4\binom{n}{4}$. Trekanter som har et af polygonens hjørner samt to skæringer mellem diagonaler som hjørner, opstår ved at man vælger fem punkter, vælger et af punkterne som hjørne og tegner diagonalerne mellem de fem punkter, og der opstår kun en sådan trekant på denne måde, dvs. at der er $5\binom{n}{5}$ sådanne trekanter. Trekanter hvis hjørner kun består af skæringer mellem diagonaler, opstår ved at man vælger seks punkter og tegner tre diagonaler mellem dem på en sådan måde at de alle skærer hinanden, og dette kan

gøres på netop en måde, dvs. der er $\binom{n}{6}$ af slagsen. I alt er der

$$\binom{n}{3}+4\binom{n}{4}+5\binom{n}{5}+\binom{n}{6}.$$

Opgave 2.5

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots(-1)^n\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0.$$

Opgave 2.6
Lad henholdsvis A og B betegne venstre- og højresiden af den formel vi ønsker at vise. Da $(1-x)P_k(x)=1-x^k$, er

$$(1-x)\cdot A=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(1-x^k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x^k)=2^n-(1+x)^n.$$

Desuden er

$$(1-x)\cdot B=2\Big(1-\frac{1+x}{2}\Big)\cdot 2^{n-1}P_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big)=2^n\Big(1-\Big(\frac{1+x}{2}\Big)^n\Big)=2^n-(1+x)^n.$$

Dermed er $A=B$ for alle reelle tal $x\neq 1$. Da både A og B er polynomier, er de dermed også identiske for $x=1$.

Opgave 3.3
Man skal gå langs ni sider i enhedskuberne, tre i hver af de tre retninger. Dvs. man kan vælge mellem $\binom{9}{3,3,3}=1680$ forskellige ruter.

Opgave 4.2
På samme måde som i eksemplet indses at turen kan afsluttes med et skridt af henholdsvis et, to eller tre trin, og derfor bliver $A_n=A_{n-3}+A_{n-2}+A_{n-1}$. Der er derfor 927 kombinationer.

Opgave 4.3
Lad A_k betegne antallet af interessante delmængder af M_k som ikke indeholder tallet k, og lad B_k betegne antallet af interessante delmængder af M_k som indeholder tallet k, hvor k er et ulige tal. Da et lige tal kun må indgå i en interessant delmængde, hvis dets to ulige nabotal indgår, må $A_k=A_{k-2}+B_{k-2}$, mens $B_k=A_{k-2}+2B_{k-2}$. Det ses nemt at $A_1=1$ og $B_1=1$. Ud fra den rekursive formel kan man så udregne at $A_{13}+B_{13}=144+233=377$. (Bemærk at $A_1,B_1,A_3,B_3,A_5,\dots$ netop er Fibonacci-talene.)

Opgave 5.1
Der er i alt $\binom{10}{3}=120$ forskellige kombinationer af tre bolde. Ud af disse er der netop $5\cdot3\cdot2=30$ med en bold af hver farve ifølge multiplikationsprincippet. Dermed er sandsynligheden $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$.

Opgave 5.2
Med n betegnes det samlede antal sokker, med r antallet af røde sokker. Den opgivne betingelse vedrørende sandsynligheden er ensbetydende med at sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve er $\frac{1}{2}$, altså med at

$$\frac{r(n-r)}{\binom{n}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Ved udregning findes at denne relation mellem n og r er ensbetydende med

$$4r^2 - 4nr + (n^2 - n) = 0,$$

som videre giver

$$r = \frac{n \pm \sqrt{n}}{2}.$$

Den størst mulige værdi for r er da åbenbart givet ved

$$r = \frac{n_0 \pm \sqrt{n_0}}{2},$$

hvor n_0 er det størst mulige kvadrattal mindre end eller lig med 1993. Ved udregning ses at $44^2 \leq 1993 \leq 45^2$. Altså er $n_0 = 44^2$, og dermed fås $r = \frac{44^2+44}{2} = 990$.