

Spilstrategier

1 Spilstrategier

De spil typer vi skal se på her, er spil af følgende type: Spil der spilles af to spillere A og B som skiftes til at trække, der gælder samme regler for hvordan A og B må trække, og hvis man ikke kan trække har man tabt. Der er desuden kun et endeligt antal træk, dvs. spillet kan ikke ende uafgjort, og en af de to spillere må derfor have en vindende strategi. (Hvorfor det? Overvej.)

I det første eksempel og de første opgaver vi skal se på, er strategien at dele alle startpositioner i to grupper: Dem hvor første spiller har en vindende strategi, og dem hvor hun ikke har, dvs. dem hvor spiller nummer to har en vindende strategi.

1.1 Eksempel

I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne $1, 2, \dots, k - 1$ eller k sten fra bordet. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet. Spørgsmålet er nu for hvilke værdier af n den første spiller A har en vindende strategi. Dette kan man finde ud af ved at prøve sig frem med små tal. Det er for eksempel indlysende at for $n \in \{1, 2, \dots, k\}$ har spiller A en vindende strategi, mens for $n = k + 1$ har hun ikke. Dvs. A har en vindende strategi, hvis hun efter første træk kan efterlade $k + 1$ sten på bordet, og det kan hun netop for $n \in \{k + 2, k + 3, \dots, 2k + 1\}$. På denne måde ser man induktivt at A har en vindende strategi, netop når n ikke er et multiplum af $k + 1$. Hvis n ikke er et multiplum af $k + 1$, kan A nemlig efter hvert træk efterlade et bord med et multiplum af $k + 1$ sten, mens hvis der fra starten er et multiplum af $k + 1$ sten, vil B efter hvert træk have mulighed for at efterlade et multiplum af $k + 1$ sten på bordet. (Engel)

1.2 Vindermængde og tabermængde

Af eksemplet fremgår det hvordan man deler startmulighederne op i to mængder

$$T = \{n \in \mathbb{N} | n = m(k + 1) \text{ for } m \in \mathbb{N}\}$$

som vi kalder tabermængden, og

$$V = \{n \in \mathbb{N} | n \neq m(k + 1) \text{ for } m \in \mathbb{N}\}$$

som vi kalder for vindermængden.

Med et udgangspunkt fra vindermængden skal der findes et træk så man lander i tabermængden, og med udgangspunkt i tabermængden skal man efter et vilkårligt lovligt træk lande i vindermængden.

1.3 Opgave

I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne $1, 2, 4, 8, \dots$ (altså alle potenser af 2) sten fra bordet. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet.

Bestem de værdier af n for hvilke spiller A har en vindende strategi. (Engel)

1.4 Opgave

Fire bunker med henholdsvis 38, 45, 61 og 70 tændstikker ligger på et bord. To spillere skiftes til at udvælge to bunker og fjerne et antal tændstikker fra hver. (De skal altså fjerne mindst en fra hver bunke, men behøver ikke at fjerne lige mange fra hver.) Den spiller som først ikke kan trække, taber.

Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (Baltic Way 1996)

1.5 Opgave

I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne p^n , hvor p er et primtal og n et ikke-negativt helt tal, sten fra bordet. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet.

Bestem tabermængden. (Engel)

1.6 Uendelig tabermængde

I de foregående eksempler og opgaver har vi eksplicit bestemt tabermængden og vindermængden, men det er ikke altid så let. I dette eksempel skal vi se på et spil hvor der ligger to bunker med sten på bordet. Hvert træk består i at fjerne et antal sten fra den ene bunke eller fjerne samme antal sten fra begge bunker. En udgangsposition med a sten i den ene bunke og b i den anden betegner vi med (a, b) .

Dette eksempel går ud på at vise at der findes uendeligt mange udgangspositioner så spiller B har en vindende strategi, men altså ikke bestemme dem. Dette svarer til at vise at tabermængden er uendelig.

Man kan godt pusle sig frem til de første elementer i tabermængden og finde en algoritme for hvordan det næste element fremkommer og derved vise at den er uendelig, men i dette eksempel skal I se et andet trick hvor man overhovedet ikke behøver at bestemme et eneste element i tabermængden.

Vi viser det i stedet indirekte ved at antage at tabermængden er endelig. Da findes et største element i tabermængden (n, m) , $n \geq m$, således at ingen andre elementer i tabermængden indeholder en bunke med flere end n sten. Dermed må udgangspositionen $(n + 1, 2n + 2)$ ligge i vindermængden, og der skal altså findes et træk så man fra denne position ender i tabermængden, men det gør der ikke. Dermed har vi en modstrid, og tabermængden er dermed uendelig.

Samme trick skal du benytte i næste opgave.

1.7 Opgave

To personer spiller følgende spil. Der ligger til at starte med n sten på bordet, og hver spiller skiftes til at tage m^2 sten fra bordet hvor m er et naturligt tal. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet.

Vis at der findes uendeligt mange værdier af n for hvilke spiller nummer to har en vindende strategi. (Baltic Way 1995)

Nu skal vi se på nogle spil som nemt bliver så uoverskuelige at det er umuligt at bestemme taber- og vindermængden. Når man er på jagt efter en vindende strategi, kan man ikke få overblik over alle de situationer der kan opstå i spillet, men man kan ved hjælp af en

strategi der bygger på symmetri, sørge for at man kun kommer ud i et overskueligt udvalg af alle disse muligheder.

1.8 Parrig ved hjælp af symmetri

På et skakbræt skiftes spiller A og B til at placere en springer. Spiller A placerer hvide springere og B sorte. De må kun placere springerne på tomme felter som ikke er truet af en springer af modsat farve. Den spiller som først ikke kan placere en springer, har tabt. Vi skal nu undersøge hvem af A og B der har en vindende strategi, når spiller A starter. Det er let at se at det bliver fuldstændigt uoverskueligt at opdele samtlige mulige situationer i en vinder- og tabermængde, men hvis vi blot kan finde en vindende strategi for en af spillerne, er det også godt nok. I dette tilfælde har spiller B en vindende strategi. Hvis hun udnytter den vandrette (eller lodrette) symmetriakse midt gennem brættet der parrer felterne to og to, og hver gang at spiller A har placeret en springer, placerer en springer på det felt der er parret med det felt hvor spiller A placerede, vil hun altid have mulighed for at trække.

Her udnytter man altså at felterne kan parres to og to så man hele tiden har mulighed for at kopiere modspillerens træk og dermed sikre sig at han først står i en situation hvor han ikke kan trække.

1.9 Opgave

På et skakbræt skiftes spiller A og B til at placere en løber. Spiller A placerer hvide løbere og B sorte. De må kun placere løberne på tomme felter som ikke er truet af en løber af modsat farve. Den spiller som først ikke kan placere en løber, har tabt.

Afgør hvilken af de to spillere der har en vindende strategi. (Engel)

1.10 Opgave

På et 5×5 skakbræt spiller to spillere følgende spil. Den første spiller placerer en springer på brættet hvorefter spillerne på skift startende med den anden spiller flytter springeren til et felt som ikke før har været besøgt. Den første spiller som ikke kan flytte springeren, har tabt.

Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (Baltic Way 1997)

1.11 Opgave

Georg og hans mor spiller et spil hvor der til at starte med er n bunker med lige mange mønter i hver. De har tur på skift, og i hver tur må de fjerne en eller flere mønter fra samme bunke. Den spiller der tager den sidste mønt, har vundet. Georg starter altid.

Bestem de værdier af n for hvilke Georg har en vindende strategi.

1.12 Opgave

Astrid og Malte spiller følgende spil på et $n \times 1001$ skakbræt, hvor $n \geq 1001$. På skift farver de for et naturligt tal k alle de k^2 felter i et $k \times k$ kvadrat røde. Tallet k må gerne variere fra træk til træk, men det er ikke tilladt at kvadratet indeholder felter som allerede er farvede. Den spiller der først ikke kan trække, har tabt. Bestem samtlige værdier af n for hvilke Astrid har en vindende strategi når hun er den der trækker først.

1.13 Opgave

På et uendeligt skakbræt skiftes to spillere til at markere et tomt felt. Den ene spiller markerer med kryds og den anden med bolle. Den der først har udfyldt fire felter som danner et 2×2 kvadrat med sit symbol, har vundet.

Har den spiller der starter, altid en vindende strategi? (Baltic Way 1996)

(Bemærk at dette spil afviger fra de andre vi har set på, da det kan fortsætte i det uendelige.)

2 Løsningsskitser

Opgave 1.3

Da $3 \nmid 2^n$ for alle $n = 0, 1, 2, \dots$, vil tabermængden bestå af alle multipla af 3. Hvis udgangspunktet ikke er et multiplum af 3, kan man nemlig ved at fjerne en eller to sten efterlade et multiplum af 3 sten til modstanderen, mens modstanderen ved et udgangspunkt med et multiplum af 3 sten på bordet altid vil efterlade et antal sten på bordet som ikke er et multiplum af 3.

Opgave 1.4

Bemærk først at tabermængden består af alle udgangspositioner med henholdsvis a, a, a og b , hvor $b \geq a$, tændstikker i de fire bunker. Fra alle andre udgangspositioner kan man nemlig i et træk komme til en sådan position (overvej), mens man fra en udgangsposition med a, a, a og b tændstikker i de fire bunker efter endt træk aldrig kan ende i en tilsvarende. Dermed har den spiller som starter en vindende strategi.

Opgave 1.5

Igen starter vi med at bestemme tabermængden. Det mindste tal i tabermængden må være $n = 6$ da det ikke er en printalspotens. Da ingen printalspotenser er delelige med 6, vil man fra en udgangsposition med et multiplum af 6 sten på bordet altid efter endt træk ende med et antal sten som ikke er et multiplum af 6. Desuden kan man fra enhver udgangsposition der ikke er delelig med 6, efter endt træk ende med et multiplum af 6 sten på bordet da man kan trække 1,2,3,4 eller 5 sten. Dermed består tabermængden af samtlige multipla af 6.

Opgave 1.7

Vi skal med andre ord vise at tabermængden er uendelig, og vi viser som i eksempel 1.6 dette indirekte ved at antage at tabermængden er endelig. Lad a være det største tal i tabermængden. Betragt nu udgangspositionen med $a^2 + a + 1$ sten. Da $(a+1)^2 > a^2 + a + 1$, kan første spiller efter et træk ikke ende i tabermængden, hvilket er en modstrid.

Opgave 1.9

Spiller nummer to har en vindende strategi på samme måde som i eksempel 1.8

Opgave 1.10

Den første spiller har en vindende strategi. Lad ham nemlig placere en springer i et af hjørnerne til at starte med. Da kan man parre de resterende 24 felter således at hvert par består af to felter hvor man fra det ene kan flytte en springer til det andet og selvfølgelig omvendt. Spiller et kan nu hele tiden flytte springeren til feltet som er parret med det felt springeren står på.

Opgave 1.11

Georg har en vindende strategi for ulige n . I første træk skal Georg fjerne en hel bunke. Derefter er der et lige antal bunker med lige mange mønter i hver. Hver gang Georgs mor fjerner x mønter fra en bunke med y mønter, skal Georg gøre det samme. På den måde vil der efter Georgs tur altid være et lige antal bunker der kan sættes sammen i par således at to bunker der danner par indeholder lige mange mønter. Derfor kan Georg altid udføre det beskrevne træk, og Georgs mor kan aldrig vinde. Da der er endelig mange mønter, vil

Georg til sidst vinde. Hvis n er lige, kan Georgs mor vinde ved at følge samme strategi.

Opgave 1.12

Astrid har en vindende strategi for samtlige værdier af n . Hvis n er ulige, farvelægger Astrid et 1001×1001 kvadrat i midten af brættet i første træk. Nu har hun delt brættet i to symmetriske halvdele, og hun kan nu hver gang kopiere Maltes træk symmetrisk på den modsatte side. Hvis n er lige, starter hun blot med at farvelægge et 1000×1000 kvadrat i midten med en række af små kvadrater fornedet. Brættet er endnu engang delt i to symmetriske halvdele hvor man ikke kan tegne et kvadrat der lapper ind over begge, og hun kan nu igen følge samme strategi som før.

Opgave 1.13

Den første spiller har ikke en vindende strategi. Inddel brættet i vandrette 2×1 brikker således at brikkerne i hver række ligger forskudt i forhold til hinanden. Spiller nummer to markerer hele tiden det andet felt i den brik som første spiller netop har markeret i. Dermed kan spillet fortsætte i det uendelige uden at nogen af spillerne vinder.