

Grafteori

1 Grafteori

Dette er en kort introduktion til de vigtigste begreber i grafteori samt eksempler på opgavetyper inden for emnet.

1.1 Definition af graf

En graf er et par bestående af en ikke-tom mængde af knuder (også kaldet hjørner eller punkter) samt en mængde af kanter, hvor hver kant forbinder to knuder med hinanden eller forbinder en knude med knuden selv. En kant der forbinder en knude med sig selv, kaldes en løkke.

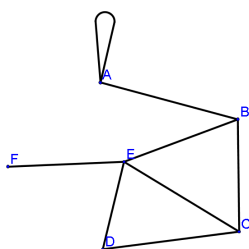
En knudes valens er det antal kanter der støder op til knuden, dog tæller en kant der går fra knuden til knuden selv, dobbelt. Bemærk at summen af samtlige punkters valens er lige da hver kant bidrager med to til summen.

1.2 Veje og sammenhængende grafer

En vej (også kaldet en sti) er en følge af kanter e_1, e_2, \dots, e_n således at kant e_k , $1 < k < n$ har den ene endeknude tilfælles med e_{k-1} og den anden med e_{k+1} .

En graf kaldes for sammenhængende hvis der for to vilkårlige knuder findes en vej fra den ene knude til den anden.

1.3 Eksempel



Denne graf består af 6 knuder og 8 kanter, og knuden A har valens 3. Grafen er sammenhængende og indeholder fx en vej som består af seks kanter fra A til F .

1.4 Komplet graf

En komplet graf er en graf hvor samtlige par af knuder er forbundet med netop en kant. En komplet graf med fx fire knuder har derfor $\binom{4}{2} = 6$ kanter, og en komplet graf med n knuder har $\binom{n}{2}$ kanter.

1.5 Eksempel på komplet graf med farvede kanter

I en komplet graf med 6 knuder er samtlige kanter farvet enten blå eller røde. I dette eksempel vil vi vise at der uanset hvordan kanterne er farvede, altid findes tre knuder der er forbundet med kanter af samme farve.

Vælg en tilfældig knude som vi kalder A . Da der fra A udgår fem kanter, udgår der mindst tre kanter med samme farve, lad os sige rød, til tre andre knuder. Hvis to af disse tre andre knuder er forbundet med en rød kant, danner de sammen med A tre knuder som er forbundet med kanter af samme farve. Hvis ikke, er disse tre knuder forbundet udelukkende med blå kanter.

1.6 Opgave

I en komplet graf med 17 knuder er alle kanter malet enten blå, røde eller grønne. Vis at der uanset hvordan grafen er farvet, altid findes tre knuder som er forbundet af kanter af samme farve. (IMO 1964)

1.7 Eulerture og Eulergrafer

En Eulertur i en graf er en vej der indeholder samtlige kanter netop en gang, og en lukket Eulertur er en Eulertur e_1, e_2, \dots, e_n hvor e_1 og e_n støder op til samme knude. (Hvis $n = 2$ skal e_1 og e_2 have begge endeknuder tilfælles.)

En graf kaldes en Eulergraf hvis alle dens kanter udgør en lukket Eulertur.

1.8 Opgave

Bevis at en sammenhængende graf er en Eulergraf netop hvis alle knuder har lige valens.

1.9 Hamiltonkredse og Hamiltongrafer

En kreds af længde n er en vej e_1, e_2, \dots, e_n hvor e_1 og e_n støder op til samme knude, og hvor en vilkårlig knude i grafen er forbundet med nul eller to af kanterne e_1, e_2, \dots, e_n .

En Hamiltonkreds er en kreds som har samme længde som antallet af knuder i grafen. En graf kaldes en Hamiltongraf hvis den indeholder en Hamiltonkreds.

1.10 Opgave

I en skov bor der n , $n \geq 3$, dyr i hver sin hule, og der er præcis en separat sti mellem hvert par af huler. Før valget af Skovens Konge laver nogle af dyrene en valgkampagne. Hvert af de dyr der laver valgkampagne, besøger alle de andre huler præcis en gang, benytter kun de beskrevne stier, skifter ikke sti mellem to huler og vender til slut tilbage til sin egen hule. I forbindelse med valgkampagnen benyttes ingen sti af mere end et dyr.

Vis at hvis n er et primtal, da kan netop $\frac{n-1}{2}$ dyr maksimalt lave valgkampagne.

Hvor mange dyr kan maksimalt lave valgkampagne for $n = 9$? (BW 1997)

1.11 Orienterede grafer

En orienteret graf er en graf hvor alle kanter har en retning.

1.12 Eksempel

I et land er der et endeligt antal byer, og nogle af byerne er forbundet med ensrettede veje. Hvis vi opfatter byerne som knuder og vejene som kanter, har vi en orienteret graf.

Vi ved yderligere at for hvert par af byer kan man komme fra den ene til den anden eller omvendt eventuelt via andre byer. Vi vil nu vise at der findes en by hvorfra man kan

komme til alle andre byer. Lad A være en by fra hvilken man kan komme til flest andre byer. Antag at der findes en by B som ikke kan nås fra A . Da kan man komme fra B til A og derfra videre til alle de byer der kan nås fra A . Dette er i modstrid med A 's maksimalitet. (BW 1992)

1.13 Opgave

Den Forunderlige Ø's efterretningstjeneste har 16 spioner i Tartu. Hver af dem overvåger nogle af sine kolleger, men der er intet par af spioner der overvåger hinanden. Desuden ved man at hvis man udtager ti tilfældige spioner, kan de nummereres således at nummer et overvåger nummer to, nummer to overvåger nummer tre osv., og den tiende desuden overvåger nummer et.

Vis at man også kan gøre dette med 11 tilfældigt valgte spioner. (BW 1994)

De næste opgaver er blandede opgaver hvor alle problemstillingerne drejer sig om grafer.

1.14 Opgave

På en danseaften har enhver af de tilstedeværende herrer danset med mindst en af de tilstedeværende damer, og enhver dame har ligeledes danset med mindst en af herrerne. Der findes ingen herre der har danset med samtlige damer, og ingen damer der har danset med samtlige herrer.

Bevis at der findes to herrer og to damer således at de to herrer har danset med præcis en af de to damer og omvendt.

1.15 Opgave

Antag at G er en sammenhængende graf med k kanter. Vis at det er muligt at nummerere kanterne $1, 2, 3, \dots, k$ således at hver knude som er forbundet med mindst to kanter, opfylder at største fælles divisor af tallene på alle de tilstødende kanter er 1. (IMO 1991)

1.16 Opgave

I en komplet graf med ni knuder er kanterne enten røde, blå eller slet ikke farvede. Lad n betegne antallet af farvede kanter.

Bestem den mindste værdi af n således at der altid findes tre knuder som er forbundet af kanter af samme farve. (IMO 1992)

2 Løsningsskitser

Opgave 1.6

Vælg en tilfældig knude som vi kalder A . Da A er forbundet med 16 andre knuder, findes mindst 6 knuder som er forbundet til A med samme farve kant, lad os sige grøn. Hvis to af disse 6 knuder er forbundet med en grøn kant, danner de sammen med A tre knuder der er forbundet med grønne kanter. Hvis ikke, har vi en komplet graf med 6 knuder hvis kanter alle er røde eller blå ligesom i eksempel 1.5.

Opgave 1.8

Det er oplagt at en graf ikke kan være en Eulergraf hvis den indeholder en knude med ulige valens. Antag nu at samtlige knuder i en graf har lige valens. Vi begynder i knuden A og laver en vej der er så lang så mulig. Da alle knuder har lige valens, må vi nødvendigvis ende i knuden A . Hvis vejen indeholder samtlige kanter, har vi en lukket Eulergraf. Hvis ikke, må der da grafen er sammenhængende, findes en ikke passeret kant som støder op til en knude som passerer af vejen. Med udgangspunkt i denne knude, lad os kalde den B , laves en ny vej der nødvendigvis må ende i B . Denne nye vej sættes ind i den gamle således at vi har en samlet lukket vej. Da der kun er endelig mange kanter, kan vi fortsætte på den måde til vi har en lukket vej der indeholder samtlige kanter.

Opgave 1.10

Da et dyr der laver valgkamp, benytter præcis n stier, og der er $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ stier, kan antallet af dyr der laver valgkamp, ikke overstige $\frac{n-1}{2}$. Nummerer nu hulerne $0, 1, 2, \dots, n-1$. Når n er et primtal, kan man i en komplet graf med n knuder lave $\frac{n-1}{2}$ separate Hamiltonkæder på følgende måde hvor e_{ij} betegner kanten mellem hule i og hule j :

$$\begin{aligned} &e_{0,1}, e_{1,2}, e_{2,3}, \dots, e_{n-1,0} \\ &e_{0,2}, e_{2,4}, e_{4,6}, \dots, e_{n-2,0} \\ &\quad \vdots \\ &e_{0, \frac{n-1}{2}}, e_{\frac{n-1}{2}, n-1}, \dots, e_{\frac{n+1}{2}, 0} \end{aligned}$$

Overvej hvorfor alle disse Hamiltonkæder netop passerer samtlige knuder, og hvorfor ingen kant indgår i mere end en Hamiltonkæde.

For $n = 9$ kan der ikke være flere end 4 ruter, og dette er muligt.

$$\begin{aligned} &e_{0,1}, e_{1,2}, e_{2,8}, e_{8,3}, e_{3,7}, e_{7,4}, e_{4,6}, e_{6,5}, e_{5,0} \\ &e_{0,2}, e_{2,3}, e_{3,1}, e_{1,4}, e_{4,8}, e_{8,5}, e_{5,7}, e_{7,6}, e_{6,0} \\ &e_{0,3}, e_{3,4}, e_{4,2}, e_{2,5}, e_{5,1}, e_{1,6}, e_{6,8}, e_{8,7}, e_{7,0} \\ &e_{0,4}, e_{4,5}, e_{5,3}, e_{3,6}, e_{6,2}, e_{2,7}, e_{7,1}, e_{1,8}, e_{8,0} \end{aligned}$$

Opgave 1.13

Når man udtager ti tilfældige spioner, skal der for hver spion være mindst en blandt de ti som spionen overvåger, og en som overvåger ham. Derfor er der for hver spion mindst syv andre spioner blandt de 16 som han overvåger, og mindst syv spioner som overvåger ham. Der findes altså for hver spion højst en anden spion således at ingen af de to overvåger hinanden. Sådanne to spioner siger vi er neutrale overfor hinanden.

Antag nu at en gruppe på 11 spioner ikke kan nummereres som omtalt. Lad A være en tilfældig spion blandt de 11, og nummerer de ti resterende B_1, B_2, \dots, B_{10} således at B_1 overvåger B_2 , B_2 overvåger B_3 , ... og B_{10} overvåger B_1 . Antag yderligere at der ikke er

nogen af de 10 spioner der er neutrale overfor A . Vi er sikre på at der findes mindst en af de 10 som overvåger A , lad os sige B_1 . Hvis A overvåger B_2 , ville $B_1, A, B_2, \dots, B_{10}$ give den ønskede rækkefølge, så det går ikke, og B_2 må derfor overvåge A . På denne måde ses at alle 10 vil overvåge A hvilket er en modstrid. Dermed må enhver af de 11 spioner have præcis en i gruppen som er neutral overfor ham, men dette kan ikke lade sig gøre da 11 er ulige. Vores startantagelse om at en gruppe på 11 tilfældige spioner ikke kan nummereres som ønsket, er altså forkert.

Opgave 1.14

Vælg en maksimal herre H_1 , dvs. en der har danset med mindst lige så mange damer som hver af de andre herrer. Da findes en dame som H_1 ikke har danset med. Vælg nu en herre H_2 som denne dame har danset med. Da H_1 var maksimal findes nu en dame som har danset med H_1 , men ikke med H_2 .

Opgave 1.15

Den grundlæggende idé er at udnytte at to på hinanden følgende tal er indbyrdes primiske. Vælg en tilfældig knude A , og vælg en vej fra A der ikke indeholder den samme kant to gange. Nummerer kanterne langs denne vej fortløbende. Lad B være vejens endeknude hvor det ikke er muligt at komme videre. Alle de passerede knuder opfylder nu betingelsen da to af deres kanter er nummererede med to på hinanden følgende tal. A har en kant med tallet 1, og B har enten kun én kant eller også har den to kanter der er nummererede med to på hinanden følgende tal. Vælg nu en ny knude som allerede har en nummereret kant, og følg samme procedure som før. Da grafen er sammenhængende, kan man på denne måde nummerere samtlige kanter således at grafen opfylder betingelserne.

Opgave 1.16

Først viser vi at der findes en farvning af 32 af kanterne således at der ikke findes en blå eller rød trekant. Lad fire af knuderne R_1, R_2, R_3, R_4 danne en firkant hvor siderne er røde, mens diagonalerne ikke er farvede, og fire andre knuder B_1, B_2, B_3, B_4 danne en firkant hvor siderne er blå, mens diagonalerne ikke er farvede. Kanten mellem R_i og B_j farves rød hvis i og j har samme paritet, og ellers blå. Den sidste knude kaldes X . Kanten fra X til $R_i, i = 1, 2, 3, 4$, farves blå, og kanten fra X til $B_i, i = 1, 2, 3, 4$, farves rød. Denne graf har 32 farvede kanter, men ingen trekant i samme farve. (Overvej.)

Vi mangler at vise, at for $n = 33$ kan vi altid finde en ensfarvet trekant. Der er tre kanter som ikke er farvede. Vælg en endeknude fra hver af disse kanter. De resterende seks knuder udgør nu sammen med de tilhørende kanter en komplet graf hvor alle kanter er blå eller røde, og der findes derfor ifølge eksempel 1.5 en ensfarvet trekant.