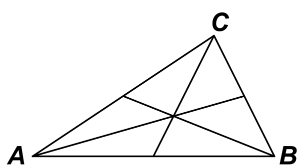
Geometrinoter

Disse noter omhandler grundlæggende sætninger om trekantens linjer, sammenhængen mellem en vinkel og den cirkelbue den spænder over, indskrivelige firkanter samt formler der omhandler trekanter. Noterne forudsætter kendskab til ensvinklede trekanter samt sinus- og cosinusrelationerne.

1 Trekantens linjer

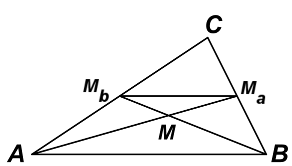
1.1 Medianer

En *median* er en linje i en trekant der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af modstående side.



De tre medianer i en trekant går igennem samme punkt, og dette punkt deler medianerne i forholdet 1:2.
Medianernes skæringspunkt betegnes normalt M.

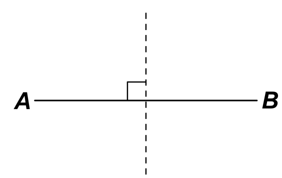
Bevis
Lad ABC være en trekant, og kald medianerne for henholdsvis m_a, m_b og m_c, og medianernes fodpunkter på siderne a, b og c for henholdsvis M_a, M_b og M_c.

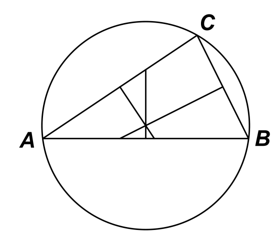


Medianerne m_a og m_b skærer hinanden i et punkt vi kalder M. Vi vil nu vise at de skærer hinanden i forholdet $1:2$. Da M_a og M_b er midtpunkter på henholdsvis BC og AC, er M_aM_b parallel med AB, dvs. at trekant ABC og trekant M_bM_aC er ensvinklede med forholdet $1:2$. Desuden er trekanterne ABM og M_aM_bM ensvinklede med samme forhold. Her af ses at m_a og m_b deler hinanden i forholdet $1:2$.
Da m_a og m_b var vilkårlige medianer, må m_a og m_c også skære hinanden i forholdet $1:2$, dvs. at alle tre medianer går gennem samme punkt M.

1.2 Midtnormaler

En *midtnormal* til et linjestykke AB er det *geometriske sted* for de punkter P der har samme afstand til A og B, altså mængden af punkter P som opfylder at $|AP| = |BP|$. Midtnormalen er dermed en linje som går gennem midtpunktet af linjestykket AB og står vinkelret på AB, da det netop er punkterne på denne linje som opfylder betingelsen.





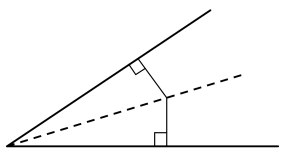
I en trekant går de tre midtnormaler gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den *omskrevne cirkel*, dvs. den cirkel som går gennem trekantens tre vinkelspidser.
Midtnormalernes skæringspunkt betegnes normalt O.

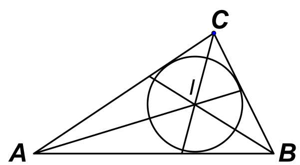
1.3 Opgave om midtnormaler

Bevis ovenstående sætning om midtnormalerne i en trekant.

1.4 Vinkelhalveringslinjer

En *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er det *geometriske sted* for de punkter P der har samme afstand til vinklens ben. Vinkelhalveringslinjen er altså en linje som deler en vinkel i to lige store vinkler, da det netop er punkterne på denne linje som opfylder betingelsen.





I en trekant går de tre vinkelhalveringslinjer gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den *indskrevne cirkel*, dvs. den cirkel som tangerer alle tre sider i trekanten.
Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt betegnes normalt I.

1.5 Opgave om vinkelhalveringslinjer

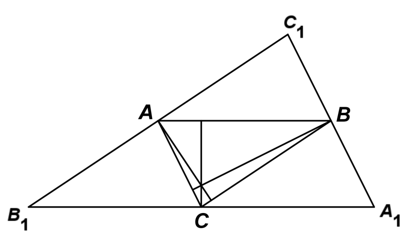
Bevis ovenstående sætning om vinkelhalveringslinjer i en trekant.

1.6 Højder

En *højde* i en trekant er en linje der går gennem en vinkelspids og er ortogonal med modstående side.

I en trekant går højderne gennem samme punkt.

Bevis
Tegn linjer gennem henholdsvis A, B og C som er parallelle med modstående sider.



Firkant $ACBC_1$ og firkant ACA_1B er parallelogrammer, dvs. at $|C_1B| = |AC| = |BA_1|$. Tilsvarende ses at $|C_1A| = |AB_1|$ og $|B_1C| = |CA_1|$. Højderne i $\triangle ABC$ er derfor midtnormaler i $\triangle A_1B_1C_1$, og de går ifølge sætningen om midtnormaler gennem samme punkt.

1.7 Cevianer

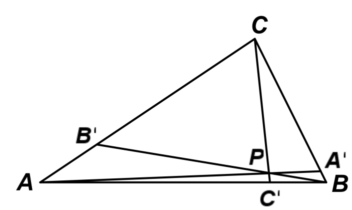
En *cevian* er en linje i en trekant fra en vinkelspids til den modstående side (eller dens forlængelse). Fx er højder, medianer og vinkelhalveringslinjer alle cevianer.

1.8 Cevas sætning

Cevas sætning siger at cevianerne AA', BB' og CC' (hvor A' ligger på BC eller dens forlængelse osv.), skærer hinanden i samme punkt, netop hvis

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

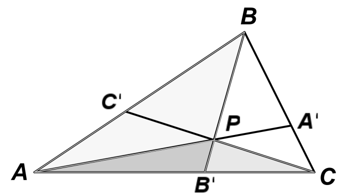
Bemærk at hvis fx A' ikke ligger på linjestykket BC, således at lad os sige C ligger mellem B og A', da regnes længden af CA' som negativ.



Bevis
Først viser vi at hvis de tre cevianer går gennem samme punkt, så vil

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Antag at cevianerne går gennem samme punkt P. Der gælder at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne



det samme som forholdet mellem grundlinjerne. Lad $T(\triangle ABC)$ betegne arealet af en trekant. Dermed er

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABB')}{T(\triangle B'BC)} \quad \text{og} \quad \frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle APB')}{T(\triangle B'PC)}.$$

Samlet får vi

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}.$$

Her har vi benyttet brøkregnereglen der siger at hvis $\frac{a}{b} = \frac{s}{t}$ og $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$, hvor $t \neq v$, da er $\frac{a}{b} = \frac{s-u}{t-v}$.
Tilsvarende fås

$$\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \quad \text{og} \quad \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}.$$

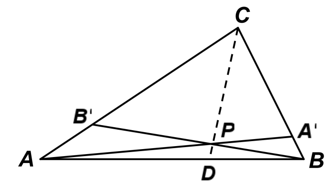
Samlet giver dette

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)} \cdot \frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \cdot \frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)} = 1.$$

Bemærk at på tegningen falder cevianerne inden for trekanten, men beviset benytter ikke dette.
Nu viser vi den modsatte vej.
Antag at

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Kald skæringspunktet mellem AA' og BB' for P, og betragt ceviaen CD fra C gennem P.



Da cevianerne AA', BB' og CD går gennem samme punkt, gælder ifølge det vi lige har vist, at

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Ifølge vores antagelse er

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1,$$

dvs. at $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$. Af dette ses at D og C' er samme punkt, og dermed at cevianerne AA', BB' og CC' skærer hinanden i samme punkt P.

1.9 Opgave

Benyt Cevas sætning til at bevise at højderne skærer hinanden i samme punkt.

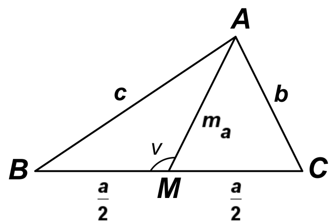
1.10 Mere om medianer

Længden af medianerne kan udtrykkes ved trekantens sidelængder. I en trekant ABC er længden af medianen m_a fra vinkelspids A til siden a givet ved

$$m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

Bevis
Kald fodpunktet for m_a for M og vinklen $\angle BMA$ for v.
Ifølge cosinusrelationen gælder at

$$c^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} - m_a a \cos v,$$



og

$$b^2 = m_a^2 + \frac{a^2}{4} + m_a a \cos v.$$

Her har vi udnyttet at $\cos(180° - v) = -\cos(v)$. Ved addition af de to ligninger får man

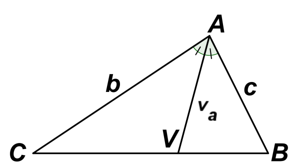
$$m_a^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

1.11 Opgave

I en trekant ABC betegnes medianerne henholdsvis m_a, m_b og m_c. Find en formel for beregning af længderne af trekantens sider a, b og c udtrykt ved medianernes længde.

1.12 Opgave

I trekant ABC betegnes fodpunktet for vinkelhalveringslinjen v_a fra A til siden BC med V.



Vis at v_a deler den modstående side i samme forhold som forholdet mellem de to tilsvarende hosliggende sider, altså at

$$\frac{|CV|}{|VB|} = \frac{b}{c}.$$

1.13 Opgave

Vis at medianerne i en trekant deler trekanten i seks små trekanter med samme areal.

1.14 Opgave

Lad I være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt i en trekant ABC, og lad yderligere A_1, B_1 og C_1 være refleksionen af I i henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem A_1, B_1 og C_1 går også gennem B.
Bestem vinklen $\angle ABC$.

1.15 Opgave

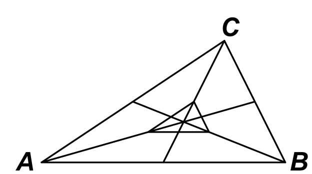
Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linie der halverer medianen fra A.
I hvilket forhold deler denne linie siden AB? (Georg Mohr 1995)

1.16 Opgave

Lad I være centrum i den indskrevne cirkel til trekant ABC, og lad yderligere A_1 og A_2 være to forskellige punkter på linjen gennem B og C således at $|AI| = |A_1I| = |A_2I|$, B_1 og B_2 være to forskellige punkter på linjen gennem A og C således at $|BI| = |B_1I| = |B_2I|$, og C_1 og C_2 være to forskellige punkter på linjen gennem A og B således at $|CI| = |C_1I| = |C_2I|$.
Vis at $|A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|$ er trekantens omkreds.

1.17 Opgave

I en trekant ABC med areal 1 indtegnes medianerne. Midtpunktet af medianen m_a kaldes for A^*, midtpunktet af medianen m_b kaldes for B^*, og midtpunktet af medianen m_c kaldes for C^*.



Bestem arealet af trekant $A^*B^*C^*$.

1.18 Opgave

En ydre røringscirkel til siden a i en trekant ABC er en cirkel som tangerer siden a samt forlængelserne af de to andre sider i trekanten.

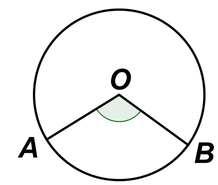
I trekant ABC indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringspunkterne for de tre røringscirkler.

Vis at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

2 Cirkler og vinkler

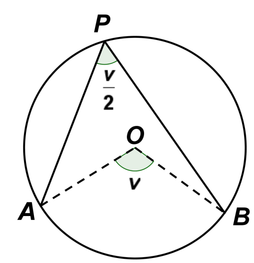
2.1 Centervinkel

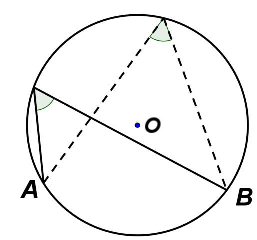
En *centervinkel* er en vinkel der har toppunkt i centrum og radier som vinkelben. En centervinkel måles ved den bue den spænder over. På figuren er $\angle AOB$ en centervinkel som spænder over buen AB, og vi skriver $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$.



2.2 Periferivinkel

En *periferivinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben.



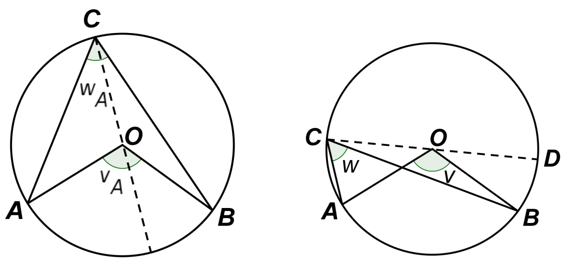


En periferivinkel er halvt så stor som den bue den spænder over. Dermed er to periferivinkler som spænder over samme bue, lige store, og en periferivinkel der spænder over en halvcirkel, er ret.

Bevis

Lad v være en centervinkel og w en periferivinkel der begge spænder over buen AB. Kald centrum for O og punktet hvor w rører periferien, for C.

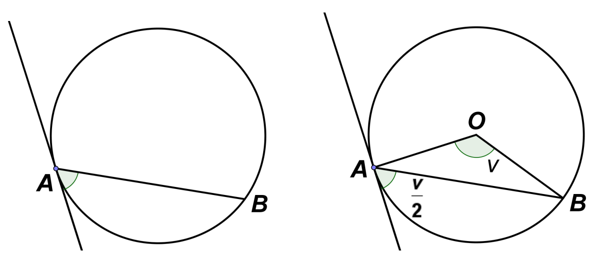
Antag først at vinkelbenene for vinkel v kun skærer vinkelbenene for w i punkterne A og B. Da deler diameteren gennem C vinklerne v og w i to vinkler som vi kalder hendholdsvis v_A og v_B og w_A og w_B. Trekant AOC er nu en ligebenet trekant med to lige store vinkler w_A, og den sidste vinkel er $180 - v_A$. Da vinkelsummen i en trekant er $180°$, er $2w_A = v_A$. Tilsvarende fås $2w_B = v_B$, dvs. $2w = v$.



Antag nu at w's ene vinkelben CB skærer v's vinkelben OA. Diameteren gennem C skærer da yderligere periferien i et punkt vi kalder for D. Ifølge det vi lige har vist, er $2\angle BCD = \angle BOD$ og $2\angle ACD = \angle AOD$, og dermed $2w = v$ som ønsket.

2.3 Korde-tangent-vinkel

En *korde-tangent-vinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og en korde samt en tangent som vinkelben.



En korde-tangent-vinkel er halvt så stor som den bue korden spænder over.

2.4 Opgave om korde-tangent-vinkler

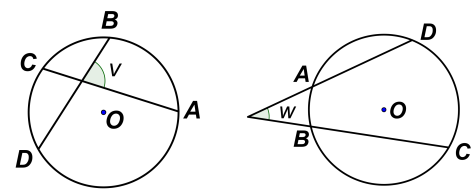
Bevis sætningen om korde-tangent-vinkler.

2.5 Opgave

Bevis at

$$v = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} \quad \text{og} \quad w = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Se figurer:



2.6 Et punkts potens.

I en given cirkel betegnes centrum O og radius r. Et punkt P's potens mht. cirklen er tallet

$$|PO|^2 - r^2.$$

2.7 Sætning om et punkts potens.

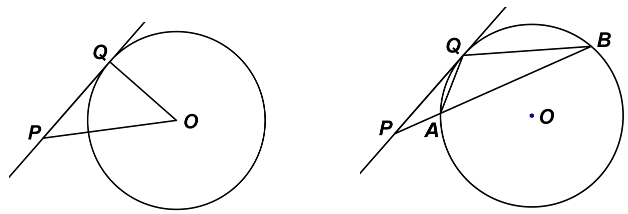
I en given cirkel betegnes centrum O og radius r. Lad P være et punkt og l og m være to linjer gennem P, hvor l skærer cirklen i A og B, og m skærer cirklen i C og D. (Hvis en af linjerne tangerer cirklen, er de to punkter sammenfaldende.)
Da gælder at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

Hvis P ligger uden for cirklen er $|AP||BP|$ netop punktets potens mht. cirklen, og hvis P ligger indenfor cirklen, er $|AP||BP|$ netop minus punktets potens.

Bevis i tilfældet hvor punktet ligger uden for cirklen.

Lad P være et punkt uden for cirklen. Vi viser at $|AP||BP|$ netop er P's potens mht. cirklen, da det giver det ønskede.



Tegn tangenten til cirklen gennem P som vist på figuren, og kald røringspunktet for Q. Ifølge Pythagoras' sætning er $|PQ|^2 = |PO|^2 - r^2$.
Betragt nu trekanterne AQP og QBP. Korde-tangent-vinklen $\angle PQA$ er lige så stor som periferivinklen $\angle PBQ$, ifølge sætningerne om periferivinkler og korde-tangent-vinkler. Dermed er $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$ ensvinklede, og dette giver $|PQ|^2 = |AP||BP|$. Samlet har vi at $|AP||BP|$ netop er punktet P's potens mht. cirklen.

2.8 Opgave om et punkt potens

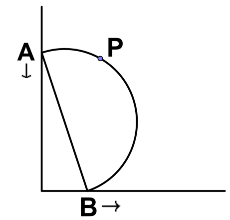
Bevis sætningen om et punkts potens i det tilfælde hvor punktet ligger inden i cirklen.

2.9 Opgave

Lad to cirkler C_1 og C_2 skære hinanden i punkterne A og B. Tangenten til C_1 gennem B skærer C_2 i punktet C, og tangenten til C_2 gennem B skærer C_1 i punktet D. Desuden oplyses at $|BC| = 3$ og $|BD| = 4$.
Bestem længden af AB.

2.10 Opgave

En halvcirkel med diameter AB bevæger sig langs en ret vinkel således at A bevæger sig langs det ene vinkelben, og B langs det andet.

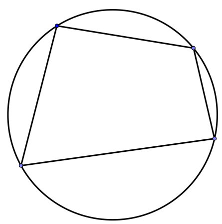


Vis at et fast punkt P på halvcirklen bevæger sig langs en ret linje.

3 Indskrivelige firkanter

3.1 Indskrivelige firkanter

En firkant kaldes *indskrivelig* hvis den har en omskreven cirkel.



3.2 Sætning om indskrivelige firkanter

En firkant er indskrivelig netop hvis summen af modstående vinkler er $180°$.

Bevis
Antag at en firkant er indskrivelig. To modstående vinkler spænder da tilsammen over hele cirkelperiferien, og summen er derfor $180°$. Antag at det for en given firkant $ABCD$ gælder at summen af to modstående vinkler er $180°$. Betragt nu den omskrevne cirkel for trekant ABC, og lad punktet E være skæringen mellem cirklen og linjen gennem C og D. Hvis firkanten er indskrivelig er D lig E. Vi ved at $\angle AEC = 180° - \angle ABC = \angle ADC$. Hvis D ligger uden for cirklen, vil $\angle ADC$ være mindre end $\angle AEC$, og hvis den ligger indenfor vil den være større. Dermed må $D = E$.

3.3 Opgave om indskrivelige firkanter

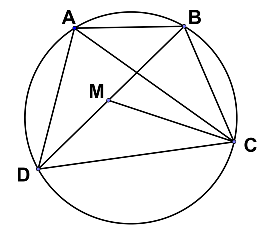
Vis at hvis begge diagonaler i en firkant $ABCD$ står vinkelret på en side, da er firkanten indskrivelig.

3.4 Ptolemæus' sætning

For en indskrivelig firkant $ABCD$ gælder at

$$|AC||BD| = |AB||CD| + |BC||DA|.$$

Bevis
Antag at firkant $ABCD$ er indskrivelig, og lad M være punktet på diagonalen BD som opfylder at $\angle DCM = \angle ACB$.



Der gælder at $\angle CDM = \angle CAB$ da de spænder over samme bue. Dermed er trekant CDM og trekant CAB ensvinklede med $|AB||DC| = |DM||AC|$. Tilsvarende er trekant CAD og trekant CBM ensvinklede med $|AD||CB| = |BM||AC|$. I alt giver dette

$$|AB||CD| + |BC||DA| = |AC|(|DM| + |MB|) = |AC||BD|.$$

3.5 Bemærkning

For alle firkanter $ABCD$ gælder Ptolemæus' ulighed

$$|AC||BD| \leq |AB||CD| + |BC||DA|$$

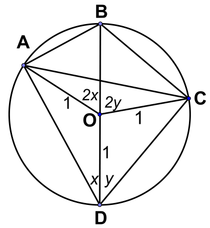
med lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

3.6 Additionsformlen for sinus

Ptolemæus' sætning kan benyttes til at vise additionsformlen for sinus

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Bevis
Vi viser sætningen i tilfældet hvor A og B er spidse vinkler. Lad A, B, C og D være punkter på en cirkel med radius 1 og centrum O således at DB er diameter, $\angle ADB = x$ og $\angle CDB = y$. Trekanterne DAB og DCB er retvinklede, og dette giver at $|AB| = 2\sin x$, $|AD| = 2\cos x$, $|BC| = 2\sin y$ og $|DC| = 2\cos y$. Trekant



AOC er en ligebenet trekant hvor $|AO| = |OC| = 1$ og $\angle AOC = 2(x+y)$. Dermed er

$$\frac{1}{2}|AC| = \sin(x+y).$$

Ifølge Ptolemæus' sætning gælder

$$2\sin(x+y)\cdot 2 = 2\sin(x)2\cos(y) + 2\sin(y)2\cos(x)$$

hvoraf additionsformlen følger.

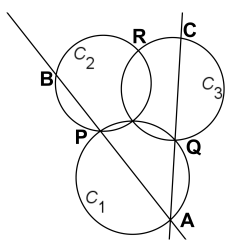
3.7 Korollar

Af additionsformlen for sinus får man direkte formlen for sinus til den dobbelte vinkel

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x.$$

3.8 Opgave

Tre cirkler skærer hinanden som vist på figuren.



Lad A være et punkt på cirkelbuen PQ som vist på figuren. Linjen gennem A og P skærer cirklen $\mathcal{C}_2$ i punktet B, og linjen gennem A og Q skærer cirklen $\mathcal{C}_3$ i C.
Vis at punkterne B, C og R ligger på linje.

3.9 Opgave

En ligesidet trekant ABC er indskrevet i en cirkel. Lad M være et vilkårligt punkt på cirkelbuen BC.
Vis at $|MA| = |MB| + |MC|$.

3.10 Opgave

En firkant $ABCD$ er indskreven i en cirkel med radius 1, $|AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$ og $|AD| = 2$.
Bestem $|BC|$.

4 Trekantens formler

I dette afsnit ser vi på en trekant ABC hvor s betegner den halve omkreds, r er radius i den indskrevne cirkel, R er radius i den omskrevne cirkel, og T er arealet.

4.1 Herons formel

Arealet af en trekant kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Bevis
Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc \sin A$, og ved kvadrering får vi $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Samlet giver dette

$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\
&= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
&= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\
&= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist.

4.2 Sætning om areal og radius i den indskrevne cirkel

Der gælder at

$$T = rs.$$

4.3 Opgave om areal og radius i den indskrevne cirkel

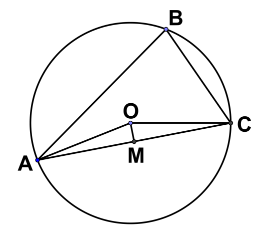
Bevis sætningen om areal og radius i den indskrevne cirkel

4.4 Sætning om radius i den omskrevne cirkel

Om radius i den omskrevne cirkel gælder der

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Bevis
Kald centrum for den omskrevne cirkel for O og midtpunktet af siden AC for M.



Da O er skæringspunktet for midtnormalerne, står OM vinkelret på AC. Ifølge sætningen om center- og periferivinkler er $\angle AOC = 2\angle B$. I alt er trekant OMC en retvinklet trekant hvor $\angle MOC = \angle B$ og $\angle OMC = 90°$. Dermed er

$$\sin B = \frac{\frac{1}{2}b}{R} = \frac{b}{2R}.$$

Dette giver ifølge sinusrelationen

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

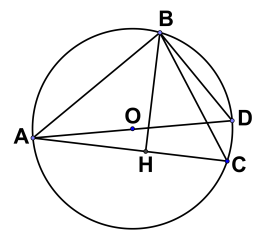
4.5 Sætning om areal og radius i den omskrevne cirkel

Der gælder at

$$4RT = abc.$$

Bevis
Lad igen O være centrum for den omskrevne cirkel, og lad diameteren gennem A skære cirklen yderligere i punktet D. Da er trekant

ABD ret, da $\angle ABD$ spænder over diameteren. Lad H være fodpunktet for højden i trekant ABC på siden b.



Vi ved nu at $\angle ADB = \angle ACB$ da de spænder over samme bue. Trekanterne ADB og BCH er derfor ensvinklede, og der gælder

$$\frac{2R}{c} = \frac{a}{|HB|}.$$

Dette giver

$$|HB| = \frac{ac}{2R}.$$

Nu kan vi finde arealet:

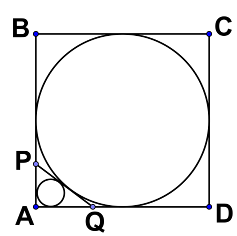
$$T = \frac{1}{2}|HB|b = \frac{1}{2}\frac{ac}{2R}b = \frac{abc}{4R}.$$

Dette giver

$$4RT = abc.$$

4.6 Opgave

I et kvadrat $ABCD$ er indskrevet en cirkel med radius R.



En tangent til cirklen skærer linjestykkerne AB og AD i henholdsvis P og Q. Radius i den indskrevne cirkel til trekant APQ kaldes r. Udtryk arealet af trekant APQ vha. r og R.

4.7 Opgave

Firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius R. Diagonalerne står vinkelret på hinanden, og deres skæringspunkt kaldes E.
Vis at

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4R^2.$$

4.8 Opgave

Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995)

4.9 Opgave

Vis for en trekant ABC at

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

Her er r radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

4.10 Opgave

Vis for en trekant ABC at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Her er r som før radius i den indskrevne cirkel, og R er radius i den omskrevne cirkel.

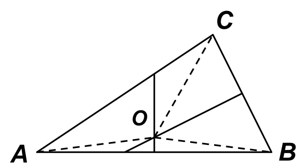
4.11 Opgave

I en trekant ABC danner de tre fodpunkter for højderne en ny trekant.
Bevis at radius i den omskrevne cirkel til den nye trekant er halvt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC.

5 Løsningsskitser

Opgave om midtnormaler 1.3

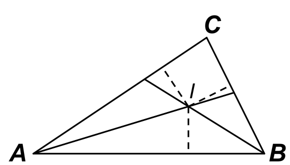
Lad ABC være en trekant, tegn midtnormalerne på AB og BC, og kald deres skæringspunkt for O.



Da midtnormalen på AB er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til A og B, og midtnormalen på BC er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til B og C, må afstandene fra O til henholdsvis A, B og C være lige store. Punktet O er dermed centrum for den omskrevne cirkel, og midtnormalen på AC vil på tilsvarende vis gå gennem O.

Opgave om vinkelhalveringslinjer 1.5

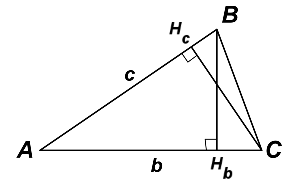
Lad ABC være en trekant, tegn vinkelhalveringslinjerne fra A og B, og kald deres skæringspunkt for I.



Da vinkelhalveringslinjerne er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, må afstandene fra I til alle tre sider være lige store. Punktet I er dermed centrum for den indskrevne cirkel, og vinkelhalveringslinjen fra C vil på tilsvarende vis gå gennem I.

Opgave 1.9

Kald fodpunkterne for højderne i trekant ABC for H_a, H_b og H_c.



Da er

$$\cos A = \frac{|AH_b|}{c} = \frac{|AH_c|}{b} \text{ og dermed } \frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{c}{b}.$$

Det tilsvarende gælder for de andre sider. Derfor er

$$\frac{|AH_b|}{|H_bC|}\frac{|BH_c|}{|H_cA|}\frac{|CH_a|}{|H_aB|} = \frac{abc}{abc} = 1.$$

Ifølge Cevas' sætning går højderne dermed gennem samme punkt.

Opgave 1.11

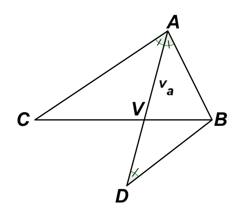
Ved at kombinere formlerne for m_a, m_b og m_c får man

$$c^2 = \frac{4}{9}(2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2).$$

Tilsvarende for de andre to sider.

Opgave 1.12

Tegn en linje gennem B som er parallel med AC, og kald skæringspunktet mellem denne linje og v_a for D.



Da DB er parallel med AC, er trekant ABD ligebenet, dvs. at

$|DB| = c$. Desuden er trekant ACV og trekant DBV ensvinklede, hvilket giver

$$\frac{|CV|}{|VB|} = \frac{b}{|BD|} = \frac{b}{c}.$$

Opgave 1.13

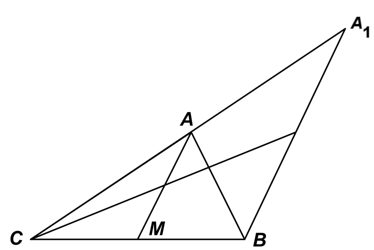
Lad M betegne medianernes skæringspunkt, og M_a betegne fodpunktet for medianen på siden a. Da $3|MM_a| = |AM_a|$, er højden fra A i trekant ABC tre gange så stor som højden fra M i trekant MBC. Dermed udgør trekant MBC en tredjedel af arealet af trekant ABC. Desuden har trekant MM_aB og trekant MM_aC samme areal da de har samme højde og lige store grundlinjer. Dermed deler medianerne en trekant i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 1.14

Lad A_2 være skæringspunktet mellem IA_1 og BC. Trekant BA_2I er retvinklet, og $|BI| = 2|A_2I|$. Dermed er $\angle IBA_2 = 30°$. På tilsvarende vis ses at $\angle ABI = 30°$. Dermed er vinkel B $60°$.

Opgave 1.15

Kald fodpunktet for m_a på a for M. Tegn en linje gennem B parallel med MA, og lad A_1 være skæringspunktet mellem denne linje og forlængelsen af AC.



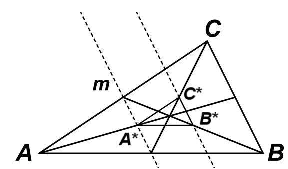
Trekanterne ACM og A_1CB er ensvinklede med forholdet $1 : 2$, dvs. at $|CA| = |AA_1|$. Linjen gennem C som halverer m_a, halverer også A_1B da m_a og A_1B er parallelle. Denne linje og AB er derfor begge medianer i trekant A_1BC, og linjen deler derfor AB i forholdet $1 : 2$.

Opgave 1.16

Lad A', B' og C' være den indskrevne cirkels røringspunkter med henholdsvis a, b og c. Trekanterne $IC'C_1$, $IC'C_2$, $IA'C$ og $IB'C$ er ensvinklede, dvs. at $|C_1C_2| = |A'C| + |CB'|$. På tilsvarende vis fås $|A_1A_2| = |B'A| + |AC'|$ og $|B_1B_2| = |A'B| + |BC'|$. Dette giver det ønskede.

Opgave 1.17

Først viser vi at siderne i trekant $A^*B^*C^*$ er parallelle med siderne i trekant ABC. Indtegn midtpunktstransversalen m gennem siderne AB og AC.



Denne midtpunktstransversal går gennem A^* og er parallel med BC. Punkterne B^* og C^* ligger lige langt fra linjen m og linjen gennem B og C, og dermed er siden B^*C^* parallel med BC. Tilsvarende gælder for de andre to sider i trekant $A^*B^*C^*$. Vi har nu at trekant ABC og trekant $A^*B^*C^*$ er ensvinklede.

Da midtpunktstransversalen m deler siden AB på midten, må linjen gennem B^* og C^* dele siden AB i forholdet $1 : 3$, dvs. at $|AB| = 4|A^*B^*|$. Dermed er forholdet mellem siderne i trekant $A^*B^*C^*$ og siderne i trekant ABC $1 : 4$, dvs. at forholdet mellem arealerne er $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$. Arealet af trekant $A^*B^*C^*$ er derfor $\frac{1}{16}$.

Opgave 1.18

Kald røringscirklernes røringspunkter med siderne a, b og c for henholdsvis A_1, B_1 og C_1. Røringscirklen til siden a rører desuden linjen gennem A og B i et punkt vi kalder A_B, og den rører linjen gennem A og C i et punkt vi kalder A_C. Først bemærker vi at $|BA_B| = |BA_1|$ og $|CA_C| = |CA_1|$. Desuden er $|AA_B| = |AA_C|$. Samlet får vi at $|AB| + |BA_1|$ er den halve omkreds. På samme måde får man at $|AB|+|AB_1|$ er den halve omkreds, og dette giver samlet at $|BA_1| = |AB_1|$. På tilsvarende vis ses at $|AC_1| = |CA_1|$ og $|BC_1| = |CB_1|$. Om cevianerne gælder derfor at

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|}\frac{|CA_1|}{|A_1B}\frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1,$$

og Cevas sætning giver nu at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

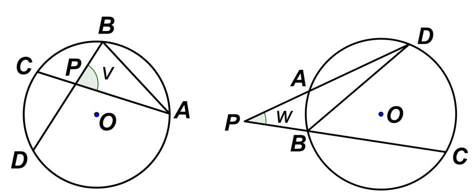
Opgave om korde-tangent-vinkler 2.4

Vi skal vise at korde-tangentvinklen er halvt så stor som den centervinkel der spænder over korden. Da linjestykket fra centrum til tangentens røringspunkt står vinkelret på tangenten, ses dette let.

Opgave 2.5

Betragt trekant ABP. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

$$v = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$



Bemærk først at $\angle PBD = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$. Betragt nu trekant PBD. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

$$w = 180^\circ - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \left(180^\circ - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\right) = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Opgave om et punkt potens 2.8

Lad P være et punkt inden i cirklen. Vi viser at $|AP||BP|$ netop er minus P's potens mht. cirklen, da det giver det ønskede.
Tegn linjen gennem P og O og kald skæringspunkterne med cirklen for M og N. Trekanterne AMP og NBP er ensvinklede ifølge sætningen om periferivinkler, dvs. at

$$|AP||BP| = |MP||NP| = (r - |OP|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2.$$

Opgave 2.9

Ifølge sætningen om korde-tangentvinkler er trekant ABD og trekant ACB ensvinklede. Dette giver $|AB|^2 = |BC||BD| = 12$.

Opgave 2.10

Kald punktet i den rette vinkels spids for O, og betragt en vilkårlig placering af diameteren AB. Da vinkel O er ret, ligger den på cirklen med AB som diameter, dvs. $\angle AOP = \angle ABP$ da de spænder over samme cirkelbue. Punktet P ligger derfor på en ret linje gennem O uanset placeringen af AB.

Opgave 3.3

Lad $ABCD$ være en firkant hvor diagonalen BD står vinkelret på siden BC, og diagonalen AC står vinkelret på siden AD. Tegn den omskrevne cirkel til trekant ACD. Da $\angle DAC$ er ret, er AD diameter i cirklen. Desuden er vinkel $\angle DBC$ ret og spænder over diameteren AD, og dermed må B ligge på cirkelperiferien.

Opgave 3.8

Da summen af modstående vinkler i indskrivelige firkanter er 180°, er $\angle BRS = \angle APS = \angle SQC$ og $\angle SQC + \angle SRC = 180^\circ$. Dermed er $\angle SRC + \angle SRB = 180°$ som ønsket.

Opgave 3.9
Ifølge Ptolemæus' sætning gælder at $|MA||BC| = |MB||AC| + |MC||AB|$, og da trekant ABC er ligesidet, fås $|MA| = |MB| + |MC|$.

Opgave 3.10
Bemærk at AD er diameter i cirklen, og dermed at trekanterne ACD og ABD er retvinklede. Pythagoras' sætning giver dermed at $|DB| = \sqrt{3}$ og $|CD| = \sqrt{2}$. Ved at anvende Ptolemæus' sætning får vi nu at $|BC| = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Opgave 4.3
Kald centrum for den indskrevne cirkel for I. Arealet af trekant ABI er da $\frac{1}{2}rc$ da r er højden, og c er grundlinjen. Tilsvarende er arealet for trekant ACI og BCI henholdsvis $\frac{1}{2}rb$ og $\frac{1}{2}ra$. Da arealet af trekant ABC netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

$$T = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

Opgave 4.6
Kald cirklens røringspunkt med AB for E, med AD for F og med tangenten for G. Der gælder da at $|EP| = |PG|$ og $|GQ| = |QF|$. Dermed er trekantens omkreds $|AP|+|AQ|+|PQ| = |AE|+|AF| = 2R$. Arealet af en trekant er givet ved den halve omkreds gange radius i den indskrevne cirkel, dvs. arealet er Rr.

Opgave 4.7
Da diagonalerne står vinkelret på hinanden, er

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = |AB|^2 + |CD|^2.$$

Kald vinkel $\angle ADB$ for u og vinkel $\angle DAC$ for v. Da er $\angle DBC = v$ da de spænder over samme bue, og $v + u = 90°$, dvs. $\sin v = \cos u$. To gange radius for den omskrevne cirkel i en trekant er lig med længden af den ene side divideret med sinus til den modstående vinkel. Benyttes dette på trekant ABD og trekant BCD giver dette $|AB| = 2R\sin u$ og $|CD| = 2R\sin v$. Dette giver som ønsket

$$|AB|^2+|CD|^2 = (2R)^2(\sin^2 u+\sin^2 v) = 4R^2(\sin^2 u+\cos^2 u) = 4R^2.$$

Opgave 4.8
Lad $n \geq 3$, og lad $n-1$, n og $n+1$ være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da $\frac{3n}{2}$. Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2}\Big(\frac{3n}{2} - n + 1\Big)\Big(\frac{3n}{2} - n\Big)\Big(\frac{3n}{2} - n - 1\Big)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}.$$

For $n = 4$ er $T = 6$, så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad n være et lige tal, $n \geq 4$, og antag at $\frac{3}{4}(n^2-4)$ er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne $m-1$, m og $m+1$ hvor $m = n^2 - 2$. Da er $m > n$, m er lige, og

$$\frac{3}{4}(m^2-4) = \frac{3}{4}(m-2)(m+2) = \frac{3}{4}(n^2-4)n^2.$$

Dermed er

$$T_m = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$$

et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

Opgave 4.9
Ifølge cosinusrelationen er

$$\cos A + \cos B + \cos C \quad = \quad \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)+2abc}{2abc}$$
$$= \frac{8(s-a)(s-b)(s-c)}{2abc}+1$$
$$= \frac{8\frac{T^2}{s}}{8RT}+1$$
$$= \frac{r}{R}+1.$$

Opgave 4.10
Bemærk først at

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{a+b+c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for T. Da er $a+b+c=\frac{2T}{r}$ og $abc=4RT$. Vi har nu

$$\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2T}{r4RT}=\frac{1}{2rR}.$$

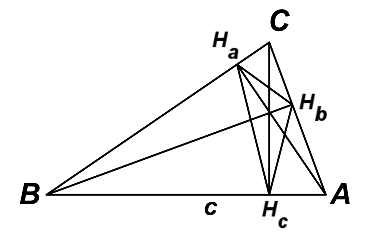
som ønsket.

Opgave 4.11
Hvis vi skal vise at radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC er dobbelt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant $H_aH_bH_c$, svarer det ifølge formlen for radius i den omskrevne cirkel til at vise at

$$2\frac{|H_aH_c|}{\sin(\angle H_aH_bH_c)}=\frac{c}{\sin C}.$$

Vi ønsker derfor at finde udtryk for $|H_aH_c|$ og $\angle H_aH_bH_c$ som kun afhænger af sider og vinkler i trekant ABC.
Firkant AH_cH_aC er indskrivelig da begge diagonaler står vinkelret på en side i firkanten (se opgave 3.3). Dermed er $\angle C = 180° - \angle AH_cH_a = \angle H_aH_cB$. Nu har trekant ABC og H_aBH_c to ens vinkler, dvs at de er ensvinklede. Ifølge sinusrelationen benyttet på trekant H_aBH_c er

$$\frac{|H_aH_c|}{\sin B}=\frac{|BH_a|}{\sin C}.$$



Hvis vi benytter formlen for cosinus i den retvinklede trekant AH_aB, får vi yderligere

$$|BH_a| = c\cdot\cos B.$$

Samlet giver dette

$$|H_aH_c|=\frac{c\cdot\cos B\cdot\sin B}{\sin C}=\frac{c\cdot\sin(2B)}{2\sin C}.$$

Her har vi benyttet formlen for sinus til den dobbelte vinkel $\sin(2B)=2\sin B\cos B$.
På samme måde som ovenfor kan man vise at trekanterne ABC, AH_bH_c og H_aH_bC er ensvinklede, og dette giver at $\angle H_cH_bH_a = 180° - 2B$. Samlet er

$$2\frac{|H_aH_c|}{\sin\angle H_aH_bH_c}=2\frac{|H_aH_c|}{\sin(2B)}=\frac{c}{\sin C}.$$