Løsninger til opgaver i funktionalligninger

Opgave 1. Sæt $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Bemærk $g(g(x)) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ og $g(g(g(x))) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{x})} = x$. Ved gentagen indsættelse i funktionalligningen fås 3 ligninger med 3 ubekendte $(f(x), f(g(x)), f(g(g(x))))$. De tre ligninger:

$$\begin{aligned} f(x) + f(g(x)) &= x \\ f(g(x)) + f(g(g(x))) &= g(x) \\ f(g(g(x))) + f(x) &= g(g(x)) \end{aligned}$$

Ved addition af de tre ligninger findes $f(x) + f(g(x)) + f(g(g(x)))$. Ved dernæst at bruge den midterste ligning kan $f(x)$ bestemmes. Altså $f(x) = (f(x) + f(g(x)) + f(g(g(x)))) - (f(g(x)) + f(g(g(x)))) = \frac{1}{2}(x+g(x)+g(g(x)))-g(x) = \frac{1}{2}(x-g(x)+g(g(x))) = \frac{1}{2}(x+1+\frac{1}{x(x-1)})$. Det kontrolleres (lidt øvelse i reduktion) ved indsættelse i funktionalligningen, at $f(x) = \frac{1}{2}(x + 1 + \frac{1}{x(x-1)})$ er en løsning (den eneste).

Opgave 2. Lad f være en løsning til funktionalligningen og sæt $g(n) = f(n) - n$. Ifølge funktionalligningen $f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$ (1) er argumentet $m - n + f(n) \geq 1$ for alle hele tal m og n. Heraf følger $f(n) \geq n$. Antag, at der eksisterer et n, så $f(n) = n$. Af funktionalligningen (1) fås så, at $f(n) = 0$ - en modstrid! Dermed er $g(n)$ et naturligt tal for alle positive hele tal n. Funktionalligningen (1) omskrives til $g(m + g(n)) = g(m) + n$ (2). Erstattes m med $g(m)$ i (2) fås $g(g(m) + g(n)) = g(g(m)) + n$. Højresiden i denne funktionalligning er symmetrisk i m og n, dermed er $g(g(m)) + n = g(g(n)) + m$ og m.a.o. er $g(g(m)) - m = g(g(n)) - n$ for alle n og m. Dvs $g(g(n)) - n$ har samme værdi k for alle n. Af $g(m + g(m)) = m + g(m)$ fås $g(g(n)) - n = 0$ for $n = m + g(m)$ og dermed $k = 0$, altså $g(g(n)) = n$ for alle n. Erstattes n med $g(n)$ i (2) fås $g(n+m) = g(m)+g(n)$. Ved induktion fås heraf, at $g(n) = n \cdot g(1)$. Benyttes dette i (2) med $n = 1$ fås $g(1) = 1$. Dermed er $f(n) = g(n) + n = 2n$. Det ses umiddelbart, at $f(n) = 2n$ opfylder den givne funktionalligning.

Opgave 3. Lad f være en løsning til funktionalligningen og sæt $g(x) = f(x) - x^3$. Funktionalligningen $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 6xy^2$ omskrives til $g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)$. Sættes $u = x + y$ og $v = x - y$ omskrives funktionalligningen til $g(\frac{u+v}{2}) = \frac{g(u)+g(v)}{2}$. Denne funktionalligning (Jensens funktionalligning) har de kontinuerte løsninger $g(x) = ax + b$, hvor a og b er konstanter. Dermed ses, at $f(x) = x^3 + g(x) = x^3 + ax + b$. Ved indsættelse ses, at alle funktioner $f(x) = x^3 + g(x) = x^3 + ax + b$ opfylder den givne funktionalligning.

Opgave 4. Sæt $y = x = \frac{1}{2z}$ for $z \neq 0$. Af b) fås

$$f(z) = 2f(2z) \text{ for alle } z \neq 0.$$

Sæt $x = y = z$. Af c) fås

$$2zf(2z) = z^2 f(z)^2.$$

Samlet ser vi at

$$f(x) = x(f(x))^2 \text{ for alle } x \neq 0. \qquad \dagger$$

Hvis der fandtes et x så $f(x) = 0$, da ville ifølge c)

$$f(1) = (x + (1 - x))f(x + (1 - x)) = x(1 - x)f(x)f(1 - x) = 0,$$

hvilket er i modstrid med a).
Det følger nu af † at $f(x) = \frac{1}{x}$. Bemærk at vi indtil videre ikke har vist at $f(x) = \frac{1}{x}$ er en løsning til funktionalligningen, men kun at der i hvert fald ikke er andre løsninger. Ved indsættelse ses let at $f(x) = \frac{1}{x}$ er en løsning til funktionalligningen.

Opgave 5. Lad f være en løsning til funktionalligningerne og sæt $g(x) = \frac{f(x)}{f(1)}$. Det ses, at g også opfylder funktionalligningerne og desuden $g(1) = 1$.
Først indses at værdierne for $g(x)$ er entydigt bestemte, altså at funktionen g er entydig. Sæt $x = \frac{p}{q}$, hvor p og q er indbyrdes primiske positive hele tal. At $g(x)$ er entydigt bestemt vises ved induktion efter $N = \max(p, q)$. På grund af $f(\frac{1}{x}) = f(x)$ er det nok at vise entydigheden for $x \geq 1$, dvs. for $p \geq q$. Derfor betragtes kun dette tilfælde.
$N = 1$: $p = q = 1$, dvs. $x = 1$. Da $g(1) = 1$ gælder påstanden (entydigheden) her.
Antag påstanden gælder for $N \leq k$ og antag $x > 1$ ($p > q$) er et tal, hvor $N = k + 1$. N-værdien hørende til tallet $x - 1$ er $\max(p - q, q) \leq p - 1 \leq k$. Dermed er tallet $g(x - 1)$ entydigt bestemt pga. induktionsantagelsen og altså er $g(x) = (1 + \frac{1}{x-1})g(x - 1)$ (ifølge den ene af funktionalligningerne) også entydigt bestemt.
Delkonklusion: g er entydigt bestemt (hvis den eksisterer).
Det ses let, at funktionen $g(x) = pq$ opfylder funktionalligningerne og $g(1) = 1$. Dermed bliver løsningerne til funktionalligningerne $f(x) = apq$, hvor a er et positivt rationalt tal ($a = f(1)$).

Opgave 6 For et reelt tal z, sæt $x = 0$ og $y = 3z$. Uligheden giver nu:

$$f(z) = f\Big(\frac{2 \cdot 0 + 3z}{3}\Big) \geq f\Big(\sqrt[3]{0}\Big) = f(0).$$

Sæt nu $y = \sqrt[3]{4}z$ og $x = -\frac{y}{2}$. Uligheden giver da:

$$f(0) = f\Big(\frac{2x + y}{3}\Big) \geq f\Big(\sqrt[3]{\frac{y^3}{4}}\Big) = f(z).$$

Her af ses at funktionen må være konstant. Det ses desuden let at samtlige konstante funktioner er løsninger.

Opgave 7 Da $f(f(n)) = n + 1$, er

$$f(n + 1) = f(f(f(n))) = f(n) + 1 > f(n). \quad \dagger$$

Antag at $f(1) = m$. Da er $f(m) = f(f(1)) = 1 + 1 = 2$.
Hvis $m = 1$, er $f(f(1)) = f(1) = 1$, hvilket er en modstrid.
Hvis $m > 1$, gælder ifølge † at $2 = f(m) > f(1) = m$, hvilket er en modstrid.
Dermed findes ingen funktioner som opfylder det ønskede.

Opgave 8 Sæt $x = 0$, og lad y være et vilkårligt reelt tal. Da er

$$f(f(y)) = y + (f(0))^2, \quad \dagger$$

hvilket viser at f er bijektiv. Der findes nu et a så $f(a) = 0$. Dermed er

$$f(a^2) = f(a^2 + f(a)) = a + (f(a))^2 = a.$$

Heraf ses at

$$0 = f(a) = f(0 + f(a^2)) = a^2 + (f(0))^2,$$

dvs. at $a = 0$ og $f(0) = 0$. Det følger nu af † at $f(f(y)) = y$ for alle reelle tal y.
På følgende måde ses at f er voksende: Lad $u > t$. Da er

$$f(u) = f(u - t + f(f(t))) = f((\sqrt{u - t})^2 + f(f(t))) = f(t) + (f(\sqrt{u - t}))^2 > f(t).$$

Vi har nu at f er voksende, og at $f(f(y)) = y$ for alle reelle y. Antag at der findes et x så $f(x) > x$. Da er $x < f(x) < f(f(x))$ hvilket er en modstrid. Tilsvarende findes heller ikke et x så $f(x) < x$. Dermed må $f(x) = x$.
Bemærk at vi indtil nu kun har vist at der ikke findes andre løsninger end $f(x) = x$, og ikke at $f(x) = x$ er en løsning. Ved indsættelse ses dog let at $f(x) = x$ er en løsning til funktionalligningen.