Funktionalligninger

Anders Schack-Nielsen

25. februar 2007

Disse noter er en introduktion til funktionalligninger. En funktionalligning er en ligning (eller et ligningssystem) hvor den ubekendte er en funktion.

Lad os starte med et eksempel:

Eksempel 1 (Georg Mohr 1999)**.** Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f(x) + xf(1-x) = x \tag{1}$$

for alle reelle tal x.

Denne opgave er en typisk funktionalligning. Ved første øjekast kan en sådan ligning se uhåndterlig ud; vi har jo kun en enkelt ligning og to forskellige indgående størrelser vi ikke har styr på, nemlig $f(x)$ og $f(1-x)$.

Skinnet bedrager dog. Vi har nemlig ikke kun én ligning, men derimod *uendelig* mange ligninger. Da ligningen skal være opfyldt for alle x, har vi jo en ligning for ethvert reelt tal.

Det er selvfølgelig ikke muligt at indsætte alle tal på en gang og derefter overskue et ligningssystem bestående af uendelig mange ligninger. Vi bliver derfor nødt til at finde på noget smart.

Nu til løsningen:

Løsning. Da ligningen gælder for ethvert reelt tal x kan vi sætte $x = 1-y$ for et vilkårligt reelt tal y. Det giver en ny ligning

$$f(1-y) + (1-y)f(y) = 1-y \tag{2}$$

som altså er opfyldt for alle reelle tal y. Hvis vi omskriver den til $f(1-y) = 1-y-(1-y)f(y)$ kan vi indsætte dette i (1):

$$f(x) + x(1-x-(1-x)f(x)) = x$$

Nu kan vi isolere $f(x)$ og få:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x+x^2} \tag{3}$$

Vi bemærker at divisionen er i orden idet $1-x+x^2 = (x-1/2)^2 + 3/4 > 0$.

Funktionen (3) er altså den eneste mulige løsning.

Nu kunne man fristes til at tro at vi var færdige, men der mangler en vigtig ting. Vi skal indsætte (3) i (1) og se om ligningen er opfyldt:

$$\frac{x^2}{1-x+x^2} + x\frac{(1-x)^2}{1-(1-x)+(1-x)^2} = \frac{x(x+(1-x)^2)}{1-x+x^2} = x.$$

Vi ser at (3) opfylder ligningen og at den dermed er en løsning. □

Husk indsættelse af løsningen

Eksempel 1 illustrerer allerede flere vigtige pointer og teknikker, men lad os starte med afslutningen:

- **Du er ikke færdig før du har tjekket om dine løsninger opfylder den/de oprindelige ligning/ligninger.**

Hvis vi kigger beviset ovenfor igennem, kan vi se at vi faktisk har arbejdet med en implicit antagelse om at der fandtes mindst én løsning. Efterhånden som beviset skrider frem finder vi flere og flere ligninger som en evt. løsning skal opfylde, nemlig først (2) og derefter (3). Men selvom (3) virker meget konkret og peger på en helt bestemt funktion, er det jo ikke umiddelbart sikkert at denne funktion opfylder den oprindelige ligning.

Denne pointe gælder generelt for alle funktionalligninger (og ligningssystemer generelt), så man skal derfor altid huske at indsætte de fundne løsninger i de oprindelige ligninger. I modsat fald kan man være sikker på ikke at få fuld point i en afleveret besvarelse.

De smarte indsættelser

I eksempel 1 så vi at nøglen til at løse opgaven var at sætte $x = 1 - y$. Det gav os en ny ligning der kunne kombineres med den oprindelige og løse opgaven.

Det er typisk for funktionalligninger at man skal finde et antal smarte indsættelser og kombinere resultaterne for at løse en opgave. Det naturlige spørgsmål er så bare hvordan man finder på de rigtige indsættelser. Her er der ikke noget entydigt svar, men nogen indsættelser er mere hyppige end andre og der er som regel nogen oplagte indsættelser som man bør prøve. Som tommelfingerregel gælder:

- **Indsættelser, der simplificerer et udtryk eller hele ligningen, er ofte en god ide.**

Antag for eksempel at du et sted har $f(A)$ og et andet sted har $f(B)$. En indsættelse, der gør at de to udtryk A og B bliver ens, vil i mange tilfælde åbne nye muligheder.

Betragt endnu en gang eksempel 1. Vi har to deludtryk på formen $f(\ldots)$. Udtrykket $f(x)$ er der ikke meget at sige til, men se derimod på $f(1-x)$. Spørgsmålet vi bør stille os selv er: Hvad skal indsættes på x'ets plads for at det bliver pænt? Svaret er som vi allerede har set $1 - y$ idet $1 - (1 - y) = y$.

Lad os tage endnu et eksempel:

Eksempel 2. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f(x)f(y) = f(x - y) \tag{4}$$

for alle x og y.

Løsning. Hvilke indsættelser simplificerer (4)? Her er et uddrag af de ideer man bør få når man ser (4):

- Vi har at gøre med to variable, så lad os prøve at sætte $x = y$.
- Hvis vi sætter $y = 0$ bliver $f(x)$ og $f(x - y)$ ens.

- Hvis vi sætter $x = 2y$ bliver $f(y)$ og $f(x - y)$ ens.
- To af de ovenstående indsættelser producerer $f(0)$, så vi bør måske også prøve med $x = 0$.

Disse forsøg giver:

$$(f(x))^2 = f(0), \quad f(x)f(0) = f(x), \quad f(2y)f(y) = f(y), \quad f(0)f(y) = f(-y)$$

Nu har vi lige pludselig masser af information. Hvis $f(0) = 0$ er funktionen konstant 0 ifølge både den første, anden og fjerde ligning. I modsat fald siger den første ligning bl.a. at f aldrig tager værdien 0. Dermed giver den anden ligning at $f(0) = 1$ hvorefter den fjerde giver at f er lige. Og den tredje ligning fortæller endnu mere: Eftersom f aldrig er nul, må $f(2y) = 1$, dvs. funktionen er konstant 1.

Nu har vi altså reduceret det til to muligheder: Enten er $f(x) = 0$ for alle x eller også er $f(x) = 1$ for alle x. Hvis vi så prøver at indsætte disse to funktioner ser vi at de *begge* opfylder (4). Ligningen har altså netop to løsninger. □

Induktion

De funktionalligninger vi foreløbig har betragtet har efterspurgt funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dette er selvfølgelig ikke altid tilfældet, så lad os tage et eksempel der holder sig indenfor de hele tal:

Eksempel 3. Find alle funktioner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ der opfylder

$$f(m + f(n)) = f(m) + n \tag{5}$$

for alle hele tal n og m.

Dette eksempel indeholder en forekomst af $f(\ldots f(\ldots)\ldots)$, og vi kommer i beviset nedenfor også til at se nogle tricks der har med dette at gøre.

Løsning. Når man ser på (5) er det oplagt at forsøge at indsætte $m = 0$, da det gør venstresiden en del pænere:

$$f(f(n)) = f(0) + n \tag{6}$$

Hvad nu? Jo, vi har lige fået en ligning der tillader os at simplificere udtryk på formen $f(f(\ldots))$. Dermed bliver det oplagt at forsøge at indsætte $f(n)$ på n's plads i (5) eller at tage f på begge sider. Men der er et standardtrick vi lige kan prøve først:

- **Givet en ligning for $f(f(x))$ kan vi få en ny (og forhåbentlig interessant) ligning ved at betragte udtrykket $f(f(f(x)))$. At anvende f tre gange på x kan nemlig både ses som at anvende f to gange på $f(x)$ og som at have anvendt f på udtrykket for $f(f(x))$.**

I vores tilfælde giver det:

$$f(f(0) + n) = f(f(f(n))) = f(0) + f(n)$$

For $n = 0$ giver dette sammen med (6) at $f(0) = 2f(0)$, dvs. $f(0) = 0$. Dermed kan (6) simplificeres til

$$f(f(n)) = n \tag{7}$$

Lad os vende tilbage til de ideer der blev nævnt ovenfor. Hvis vi tager f på begge sider af (5) kan vi godt nok simplificere venstresiden, men den resulterende ligning giver ikke noget nyt (andet end endnu et bevis for $f(0) = 0$ hvis vi ikke havde fundet ud af det endnu).

Hvad med indsættelse af $f(n)$ på n's plads i (5)? Det giver:

$$f(m+n) = f(m) + f(n)$$

Indsættes nu $m = -n$ får vi at funktionen er ulige, dvs. $f(-n) = -f(n)$. Og indsættes $m = 1$ får vi en ligning der indbyder til induktion:

$$f(n+1) = f(n) + f(1)$$

Induktionen giver

$$f(n) = nf(1) \tag{8}$$

Og vi bemærker at (8) også gælder for $n \leq 0$. Kombineres (8) og (7) får vi $f(1) = \pm 1$ og dermed $f(n) = n$ eller $f(n) = -n$. Indsætter vi dette i den oprindelige ligning (5), ser vi at $f(n) = n$ og $f(n) = -n$ begge er løsninger. $\square$

Vigtigt: Induktion er ikke kun relevant at overveje når vi er begrænset til de hele tal. I funktionalligninger der bruger rationale tal kan man nogen gange også anvende induktion, hvis det kan lade sig gøre at betragte tæller og nævner hver for sig. Men i funktionalligninger som de to første vi så på er induktion sjældent vejen frem (medmindre man kan vise at funktionen f.eks. er voksende og derved udvide kendskab til funktionen på $\mathbb{Q}$ til hele $\mathbb{R}$).

Cauchys funktionalligning

Betragt ligningen

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

for reelle tal x og y. Det er nemt at se at $f(0) = 0$ og $f(-x) = -f(x)$. Som vi så i løsningen til eksempel 3 kan vi også ved induktion få $f(n) = nf(1)$ for $n \in \mathbb{Z}$. Vi kan udvide dette til et resultat for alle rationale tal:

$$nf(1) = f(n) = f\left(\frac{n}{m} + \cdots + \frac{n}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{m}\right) = mf\left(\frac{n}{m}\right)$$

Dvs. $f(q) = qf(1)$ for $q \in \mathbb{Q}$. Nu er det fristende at tro at $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$ er de eneste løsninger, men det kan vi ikke konkludere! Dog kan vi nemt bevise at der ikke er andre, hvis vi antager at f er kontinuert.[1]

Der gælder altså følgende sætning:

Sætning (Cauchys funktionalligning). Samtlige kontinuerte løsninger til

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{for } x, y \in \mathbb{R}$$

er $f(x) = ax$, hvor $a \in \mathbb{R}$.

[1]Der findes også svagere begrænsninger som reducerer løsningsmængden til $f(x) = ax$. F.eks. er det nok at forudsætte at funktionen er begrænset i et interval.

Cauchys funktionalligning kan også forekomme i andre variationer:

$$f(x+y) = f(x)f(y), \qquad f(xy) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = f(x)f(y)$$

De tre ligninger kan nemt reduceres til den additive form vi allerede har set på ved at substituere $x = e^s, y = e^t$ og/eller ved at tage logaritmen på begge sider (der er mere information om disse ligninger i Engels bog).

Eksempel 4 (Jensens funktionalligning)**.** Find alle kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2} \tag{9}$$

for alle reelle tal x og y.

Løsning. Vi sætter $f(0) = a$. For $y = 0$ fås $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+a}{2}$ og dermed gælder

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} = f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y) + a}{2}.$$

Hvis vi sætter $g(x) = f(x) - a$ gælder altså $g(x+y) = g(x) + g(y)$, dvs. g opfylder Cauchys funktionalligning. Dermed er $g(x) = cx$ og $f(x) = cx + a$. Ved indsættelse ses at disse funktioner opfylder (9). $\square$

Opgaver

Opgave 1. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

for alle reelle tal $x \neq 0, 1$.

Opgave 2. Find alle funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der opfylder

$$f(m - n + f(n)) = f(m) + f(n)$$

for alle hele tal $m, n \geq 1$.

Opgave 3. Find alle kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 6xy^2$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 4 (BW 1995)**.** Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ der opfylder ligningssystemet

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f\left(\frac{1}{x+y}\right) &= f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{for alle } x, y, x+y \neq 0, \\ (x+y)f(x+y) &= xyf(x)f(y) \quad \text{for alle } x, y, x+y \neq 0. \end{aligned}$$

Opgave 5 (BW 2003)**.** Find alle funktioner $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_+$ der for alle positive, rationale tal x opfylder

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) \quad \text{og} \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right) f(x) = f(x+1).$$

Opgave 6. Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \geq f\left(\sqrt[3]{x^2y}\right)$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 7. Find alle funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ der opfylder

$$f(f(n)) = n + 1$$

for alle naturlige tal n.

Opgave 8 (IMO 1992)**.** Find alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der opfylder

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$$

for alle reelle tal x og y.

Hint: Vis at f er surjektiv og at der dermed findes et a så $f(a) = 0$. Vis at $a = 0$ og benyt dette til at vise $f(f(x)) = x$ for alle x. Vis at f er voksende og dermed at $f(x) = x$ er den eneste løsning.