Farvning

1 Farvning

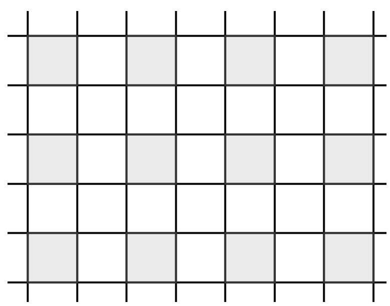
Mange opgaver kan løses ved at farvelægge de objekter man betragter, på en hensigtsmæssig måde.

1.1 Eksempel

Et klassisk eksempel på dette er at et skakbræt hvor to diagonalt modsatte hjørner er fjernet, ikke kan dækkes med 1×2 brikker. Disse dækker nemlig alle et hvidt og et sort felt, men når de to hjørner er fjernet, er der ikke lige mange sorte og hvide felter.

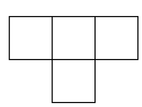
1.2 Eksempel

I foregående eksempel var farvningen allerede givet på forhånd, men nogle gange skal man selv finde på en smart farvelægning. I dette eksempel skal vi se på et rektangulært gulv som er dækket af 2×2 fliser og 1×4 fliser. Spørgsmålet er nu: Hvis en flise knækker, kan den så hvis man omarrangerer fliserne, erstattes af en flise af den anden type? Vi ønsker nu at finde en smart farvning der viser at dette ikke kan lade sig gøre, dvs. vi skal finde en farvelægning således at de to flisetyper ikke dækker lige mange hvide felter og lige mange sorte. Den traditionelle skakbrætfarvning virker ikke i dette tilfælde, men farvelægningen på figuren opfylder netop dette, og det viser at en enkelt flise ikke kan erstattes af en flise af den anden type. (Engel)



1.3 Opgave

Kan et skakbræt hvor alle fire hjørner er fjernet, dækkes af brikker af følgende type?

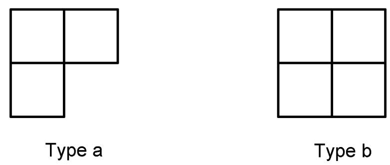


1.4 Opgave

Kan et 13×13 skakbræt hvor det midterste felt er fjernet, dækkes af 1×4 brikker? (Baltic Way 1998)

1.5 Opgave

Et 7×7 skakbræt er dækket af brikker af følgende to typer:



Vis at der netop er en brik af type b. (Georg Mohr 1997)

1.6 Opgave

På et uendeligt skakbræt spilles følgende spil. Til at begynde med er der n^2 brikker som står på et $n \times n$ kvadrat således at der er en brik på hvert felt. Et træk består i lade en brik hoppe hen over en nabobrik lodret eller vandret til et tomt felt lige på den anden side, og fjerne den brik man hoppede henover.
Bestem samtlige værdier af n for hvilke det er muligt at ende med en brik på brættet. (IMO 1993)

1.7 Eksempel

I de foregående opgaver har vi udnyttet en smart farvning, men nogen gange er det hensigtsmæssigt ikke at knytte farver, men tal til de enkelte felter da det giver nye muligheder som vi skal se i dette eksempel.
Et skakbræt dækkes med 32 dominobrikker således at brikkerne dækker netop to felter hver. De brikker der ligger vandret, og hvis venstre del dækker et sort felt, kalder vi SH-brikker, og de brikker hvis venstre del dækker et hvidt felt, kalder vi HS-brikker. Vi vil nu ved at knytte tal til de enkelte felter på skakbrættet vise at der er lige mange af de to typer brikker. Nummerer søjlerne 1-8 fra venstre mod højre. Alle sorte felter får tildelt nummeret fra den søjle de ligger i, og alle hvide felter får tildelt minus dette nummer. Alle brikker der ligger lodret, dækker nu to felter hvis sum er nul, mens SH-brikker dækker to felter hvis sum er -1, og HS-brikker dækker to felter hvis sum er 1. Da summen af samtlige felter er nul, må der være lige mange SH-brikker og HS-brikker.

1.8 Opgave

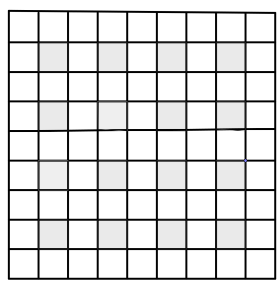
En kube med sidelængde $2n$ er sammensat af $4n^3$ brikker af formen $2 \times 1 \times 1$ som hver af sammensat af et hvidt og et sort enhedskvadrat. Brikkerne ligger sådan at alle sidefladerne i de hvide enhedskvadrater støder op til sorte og omvendt.
Vis at hvis man ser på alle de brikker der ligger lodret, så har halvdelen den hvide del opad og halvdelen den sorte del opad.

2 Løsningsskitser

Opgave 1.3
Nej. Ved den almindelige skakbrætsfarvning ser vi at de 30 hvide felter og 30 sorte felter skal dækkes af 15 brikker som hver dækker 3 sorte og en hvid eller en sort og tre hvide.

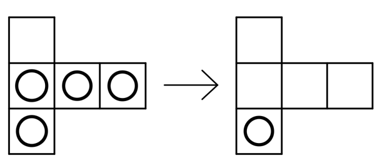
Opgave 1.4
Nej. Farv felterne i række 1, 5, 9 og 13 røde, felterne i række 2,6 og 10 gule, felterne i række 3, 7 og 11 blå og felterne i række 4, 8 og 12 grønne. En brik dækker enten fire felter med forskellige farver eller fire felter med samme farve, dvs. differensen mellem antallet af felter der er malet røde, og antal felter der er malet gule, skal være delelig med 4 hvis brættes skal kunne dækkes. Men der er 52 røde felter og 39 gule.
(Alternativt kan man bruge følgende farvelægning: I rækker med lige numre farves de to første felter hvide, de to næste sorte osv. I rækker med ulige numre modsat farvelægning.)

Opgave 1.5
Farv brættet på følgende måde:



Da hver brik højst dækker et sort felt, skal der bruges mindst 16 brikker til at dække brættet. Da der er 49 felter, ses let at der skal bruges 15 brikker af type a og kun en af type b.

Opgave 1.6
Det er muligt at ende med en brik når n ikke er et multiplum af 3.
Først viser vi at det ikke er muligt for $n = 3m$. Farv diagonalerne på brættet på skift i tre forskellige farver. Til at starte med står de $9m^2$ brikker på $3m^2$ felter af hver farve. I hvert træk vil der komme en brik mere på en af farverne, og en brik mindre på felter af hver af de to andre farver. Differensen mellem antal brikker på felter af to forskellige farver er derfor altid lige. Dermed kan man ikke ende med en brik på brættet.



Nu viser vi at det kan lade sig gøre når n ikke er et multiplum af 3. Her skal vi ikke udnytte nogen farvning, men blot finde en procedure der virker. Det ses nemt at det kan lade sig gøre for $n = 2$. Bemærk nu at hvis man har fire brikker placeret som på figuren, kan man fjerne de tre på række. Dette trick kan bruges til at reducere $n = 4$ til tilfældet $n = 2$. Hvis $n \equiv 2 \pmod 3$, kan man fjerne baner på tre rækker brikker langs kanterne ved hjælp af tricket på figuren og dermed reducere til tilfældet $n = 2$. Hvis $n \equiv 1 \pmod 3$, $n > 1$, kan man på tilsvarende måde reducere til tilfældet $n = 4$.

Opgave 1.8

Nummerer de vandrette lag i kuben $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Alle sorte enhedskvadrater får nu tildelt det nummer lag de tilhører, mens de hvide får tildelt dette nummer med modsat fortegn. Alle brikker der ligger vandret, består af to enhedskvadrater med sum nul, men de lodrette brikker der ligger med den sorte del opad, består af to enhedskvadrater med sum -1, og dem der ligger med den hvide ende opad, består af to med sum 1. Da summen af samtlige enhedskvadrater er nul, ligger halvdelen af de lodrette brikker med den sorte ende opad og halvdelen med den hvide ende opad.