

# Polynomier

Disse noter giver en kort introduktion til polynomier, og de fleste sætninger nævnes uden bevis. Undervejs er der forholdsvis nemme opgaver, mens der til sidst er opgaver af stigende sværhedsgrad. Der er løsningskitser til samtlige opgaver bagerst i noterne.

I noterne betegner  $\mathbb{Z}$  sædvanligvis mængden af hele tal,  $\mathbb{Q}$  mængden af rationale tal,  $\mathbb{R}$  mængden af reelle tal og  $\mathbb{C}$  mængden af komplekse tal. Desuden betegner  $\mathbb{L}$  en af disse fire talmængder. De komplekse tal kan beskrives som mængden af alle tal på formen  $a + ib$ , hvor  $i = \sqrt{-1}$  og  $a$  og  $b$  er reelle tal. Alle opgaver kan regnes uden brug af komplekse tal.

## 1 Polynomier

### 1.1 Definition

Et polynomium

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

hvor  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{L}$  og  $a_n \neq 0$  kaldes et  $n$ 'te grads polynomium med koefficienter i  $\mathbb{L}$ .

Nulpolynomiet er funktionen der er konstant nul, dvs.  $p(x) = 0$ , og dets grad sættes per konvention til  $-\infty$ .

Tallet  $x_0$  kaldes en rod i  $p(x)$ , hvis  $p(x_0) = 0$ .

Et polynomium kaldes for *lige*, hvis  $p(x) = p(-x)$  for alle reelle tal  $x$ , og et polynomium kaldes tilsvarende for *ulige*, hvis  $p(x) = -p(-x)$  for alle reelle tal  $x$ .

### 1.2 Entydighedssætningen

Hvis to polynomier  $p$  og  $q$  er identiske, dvs. at  $p(x) = q(x)$  for alle  $x \in \mathbb{R}$ , da er deres koefficienter identiske.

Opskrivningen af polynomier er altså entydig.

### 1.3 Øvelse

Vis at de lige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af ulige potenser af  $x$  er nul.

Vis tilsvarende at de ulige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af lige potenser af  $x$  er nul.

## 2 Polynomiumsdivision

### 2.1 Sætning

Lad  $p(x)$  være et  $n$ 'te grads polynomium med koefficienter i  $\mathbb{L}$ .

Hvis  $x_0 \in \mathbb{L}$  er rod i  $p(x)$ , da findes et entydigt bestemt polynomium  $q(x)$  af grad  $n - 1$  med koefficienter i  $\mathbb{L}$  så

$$p(x) = (x - x_0)q(x).$$

Specielt gælder at hvis  $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{L}$  er rødder i  $p(x)$ , da findes et entydigt bestemt polynomium  $q(x)$  af grad  $n - m$  med koefficienter i  $\mathbb{L}$  så

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)q(x).$$

## 2.2 Definition

Et polynomium  $q(x)$  siges at gå op i  $p(x)$  (begge med koefficienter i  $\mathbb{L}$ ) hvis der findes et polynomium  $d(x)$  så

$$p(x) = q(x)d(x).$$

Man skriver at  $q(x) \mid p(x)$ .

## 2.3 Sætning

Lad  $p(x)$  og  $q(x)$  være polynomier med koefficienter i  $\mathbb{L}$  af grad henholdsvis  $n$  og  $m$  med  $n > m \geq 0$ . Antag at koefficienten til  $m$ 'tegradsleddet i  $q(x)$  er  $\pm 1$ .

Da findes entydigt bestemte polynomier  $d(x)$  af grad  $n - m$  og  $r(x)$  af grad mindre end  $m$  med koefficienter i  $\mathbb{L}$  så

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x).$$

Polynomiet  $r(x)$  kaldes resten af  $p(x)$  ved division med  $q(x)$ .

Dette svarer til sætningen om hele tal der siger at hvis  $n$  og  $m$  er hele tal,  $m \neq 0$ , da findes to entydigt bestemte hele tal  $d$  og  $r$ ,  $0 \leq r < m$ , således at  $n = dm + r$ . Her er  $r$  resten ved division af  $n$  med  $m$ . At et polynomium går op i et andet polynomium vil ligesom for hele tal sige at resten ved division er 0.

## 2.4 Eksempel på polynomiumsdivision

Man dividerer  $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15$  med  $q(x) = x - 3$  på følgende måde:

$$\begin{array}{r} \underline{x-3} \mid x^3 - 2x^2 + 2x - 15 \quad |x^2 + x + 5 \\ \quad \underline{x^3 - 3x^2} \\ \qquad \quad x^2 + 2x - 15 \\ \qquad \quad \underline{x^2 - 3x} \\ \qquad \qquad \quad 5x - 15 \\ \qquad \qquad \quad \underline{5x - 15} \\ \qquad \qquad \qquad \quad 0 \end{array}$$

Dvs. at  $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 15 = (x - 3)(x^2 + x + 5)$ .

## 2.5 Eksempel på polynomiumsdivision med rest

Man dividerer  $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7$  med  $q(x) = x^2 + 1$  på følgende måde:

$$\begin{array}{r} \underline{x^2+1} \mid x^3 + 3x^2 - 2x + 7 \quad |x+3 \\ \quad \underline{x^3 + 0x^2 + x} \\ \qquad \quad \underline{3x^2 - 3x + 7} \\ \qquad \quad \underline{3x^2 + 0x + 3} \\ \qquad \qquad \quad - 3x + 4 \end{array}$$

Dvs. at  $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 7 = (x^2 + 1)(x + 3) - 3x + 4$ .

Hvis du ikke er fortrolig med polynomiumsdivision, så lav følgende øvelse.

## 2.6 Øvelse

Udfør disse to divisioner

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 3x - 2}{x - 1}$$

$$\frac{3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4}{x^2 + x + 1}$$

## 2.7 Algebraens fundamentalsætning

Lad  $p(x)$  være et  $n$ 'te grads polynomium med koefficienter i  $\mathbb{C}$ . Da har polynomiet  $n$  ikke nødvendigvis forskellige rødder  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$  således at

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

## 2.8 Korollar

Et  $n$ 'te grads polynomium har højst  $n$  reelle rødder.

## 2.9 Øvelse

Vis at et polynomium af ulige grad med reelle koefficienter altid har mindst en reel rod.

## 2.10 Definition

Tallet  $x_0$  siges at være  $m$ -dobbelt rod i et polynomium  $p(x)$  hvis  $(x - x_0)^m$  går op i  $p(x)$ .

## 2.11 Sætning

For et polynomium  $p(x)$  gælder at  $x_0$  er  $m$ -dobbeltrod i  $p$  netop hvis

$$p(x_0) = p'(x_0) = p^{(2)}(x_0) = \dots = p^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

## 2.12 Eksempel

Lad  $p(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$ . Vi vil vise at  $(x-1)^2$  går op i  $p(x)$ .

Ved differentiation får man  $p'(x) = (n+1)nx^n - (n+1)nx^{n-1}$ , dvs.  $p(1) = p'(1) = 0$ .

Dermed er 1 dobbeltrod i  $p$  og  $(x-1)^2$  går op i  $p(x)$ .

## 2.13 Eksempel

Vi undersøger for hvilke  $n$  det gælder at

$$x^2 + 1 \text{ går op i } x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1.$$

Sæt  $p_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$ . Da  $p_3(x) = (x^2 + 1)(x + 1)$  må

$$x^2 + 1 \mid x^m + x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3}.$$

Dermed vil  $x^2 + 1 \mid p_{4t+s}(x)$  netop når  $x^2 + 1 \mid p_s(x)$ . Da  $x^2 + 1$  ikke går op i  $p_2(x), p_1(x)$  og  $p_0(x)$ , går  $x^2 + 1$  op i  $p_n(x)$ , netop hvis  $n$  har rest 3 ved division med 4.

## 2.14 Nyttige faktoriseringer

$$(x + a)^n = x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1}a + \binom{n}{n-2}x^{n-2}a^2 + \dots + \binom{n}{1}xa^{n-1} + a^n$$

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

$$x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 - \dots - xa^{n-2} + a^{n-1}) \text{ for ulige } n$$

Her betegner  $\binom{n}{m}$  antallet af måder hvorpå man kan udtage  $m$  elementer af  $n$ .

## 2.15 Opgaver

### Opgave 2.15.1

Vis at der findes et polynomium af grad større end nul med heltallige koefficienter som går op i  $p(x) = x^{4n} + x^{2n} + 1$ .

### Opgave 2.15.2

Bestem resten ved division af  $x^{100} - 2x^{51} + 1$  med  $x^2 - 1$ . (Engel)

### Opgave 2.15.3

Bestem  $a$  og  $b$  så  $(x - 1)^2$  går op i  $ax^4 + bx^3 + 1$ . (Engel)

### Opgave 2.15.4

Undersøg om der findes et polynomium af grad større end nul med heltallige koefficienter som går op i  $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

## 3 Koefficienter

### 3.1 Andengradspolynomiets koefficienter

Hvis andengradspolynomiet  $p(x) = x^2 + bx + c$  har rødderne  $x_1$  og  $x_2$ , da er

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2,$$

dvs. at  $b = -(x_1 + x_2)$  og  $c = x_1x_2$ .

### 3.2 Tredjegradspolynomiets koefficienter

Hvis tredjegradspolynomiet  $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$  har rødderne  $x_1, x_2$  og  $x_3$ , da er

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3,$$

dvs. at  $b = -(x_1 + x_2 + x_3)$ ,  $c = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$  og  $d = -x_1x_2x_3$ .

På samme måde kan man bestemme koefficienterne i polynomier af højere grad ud fra rødderne.

### 3.3 Eksempel

Hvis  $p(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  har rødderne  $-3, -1, 1, 3$ , da er

$$a_2 = (-3)(-1) + (-3)1 + (-3)3 + (-1)1 + (-1)3 + 1 \cdot 3 = -10.$$

### 3.4 Opgaver

#### Opgave 3.4.1

Vis at  $p(x) = (x - 1)^n(x + 1)^n$  kun indeholder led af lige grad.

#### Opgave 3.4.2

Lad  $x_1$  og  $x_2$  være rødderne i  $p(x) = x^2 + ax + bc$  og  $x_2$  og  $x_3$  være rødderne i  $q(x) = x^2 + bx + ac$ .

Vis at hvis  $ac \neq bc$ , da er  $x_1$  og  $x_3$  rødderne i  $r(x) = x^2 + cx + ab$ .

#### Opgave 3.4.3

For hele tal  $a$  og  $n$  har polynomiet  $p(x) = x^3 - x^2 + ax - 2^n$  tre heltallige rødder. Bestem  $a$  og  $n$ .

## 4 Polynomier med heltallige koefficienter

I dette afsnit er alle tal hele tal, og alle polynomier har heltallige koefficienter.

### 4.1 Sætning

For et polynomium  $p(x)$  gælder at hvis  $a \equiv b \pmod{n}$ , da er

$$p(a) \equiv p(b) \pmod{n}.$$

Specielt vil  $a - b \mid p(a) - p(b)$ , når  $a \neq b$ .

#### Bevis

Lad  $p(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ . Hvis  $n \mid a - b$ , vil

$$n \mid a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1}),$$

og dermed vil

$$n \mid p(a) - p(b) = a_m(a^m - b^m) + a_{m-1}(a^{m-1} - b^{m-1}) + \dots + a_1(a - b).$$

### 4.2 Eksempel

For et polynomium  $p(x)$  er  $p(n)$  lig et trecifret tal for alle  $n = 1, 2, 3, \dots, 1998$ . Vi vil vise at  $p(x)$  ikke har nogle heltallige rødder. (BW 1998)

Da  $p(n) \not\equiv 0 \pmod{1998}$  for alle  $n = 1, 2, 3, \dots, 1998$ , vil der for ethvert helt tal  $m$  findes et  $n \in \{1, 2, \dots, 1998\}$  så  $m \equiv n \pmod{1998}$ , og dermed  $p(m) \equiv p(n) \not\equiv 0$ . Dvs. at  $p(x)$  ikke har nogen heltallige rødder.

### 4.3 Sætning

Hvis et rationalt tal skrevet som uforkortelig brøk  $\frac{p}{q}$  er rod i polynomiet

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

med heltallige koefficienter, da vil  $p \mid a_0$  og  $q \mid a_n$ .

Specielt vil de eneste rationale rødder i

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

være hele tal.

#### 4.4 Eksempel

For at bestemme samtlige rationale rødder i  $p(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 6$  er det altså nok at tjekke de hele tal der går op i 6, dvs. at eneste rationale rod er  $x = -1$ .

#### 4.5 Definition

Et polynomium  $p(x)$  med koefficienter i  $\mathbb{L}$  kaldes irreducibelt indenfor  $\mathbb{L}$  hvis der ikke findes to polynomier med koefficienter i  $\mathbb{L}$  og grad mindst en, så  $p(x)$  er et produkt af disse.

#### 4.6 Sætning

Hvis  $p(x)$  er et polynomium med heltallige koefficienter som er irreducibelt indenfor  $\mathbb{Z}$ , da er det også irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$ .

#### 4.7 Eisensteins irreducibilitetskriterium

Lad  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  være et polynomium med heltallige koefficienter, hvor et primtal  $p$  går op i  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , men  $p \nmid a_n$  og  $p^2 \nmid a_0$ . Da er  $p(x)$  irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$ .

#### 4.8 Eksempel

For at undersøge om polynomiet  $p(x) = x^5 + 4$  er irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$ , kan man bruge Eisensteins irreducibilitetskriterium, men ikke direkte. Bemærk først at  $p(x)$  er irreducibelt, netop hvis  $p(x+1)$  er irreducibelt. Da  $p(x+1) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 5$ , er det irreducibelt ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium med primtallet  $p = 5$ , og dermed er  $p(x)$  det også.

#### 4.9 Opgaver

##### Opgave 4.9.1

Lad  $p(x)$  være et polynomium med heltallige koefficienter således at der findes to hele tal  $a$  og  $b$  så  $p(a) = 1$  og  $p(b) = 3$ .

Kan ligningen  $p(x) = 2$  have to forskellige heltallige løsninger? (BW 1994)

##### Opgave 4.9.2

Lad  $p(x)$  være et polynomium med heltallige koefficienter således at der findes et helt tal  $n$  så  $p(-n) < p(n) < n$ .

Vis at da er  $p(-n) < -n$ . (BW 1991)

##### Opgave 4.9.3

Vis at  $p(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$  er irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$ .

##### Opgave 4.9.4

Vis at  $p(x) = x^p + p^2 x^2 + px + p - 1$  er irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$  for alle ulige primtal  $p$ .

## 5 Blandede opgaver

### Opgave 5.1

Et tredjegradspolynomium  $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$  har rødderne  $a$ ,  $b$  og  $c$ .  
Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  og  $\frac{1}{c}$ . (GM 1994)

### Opgave 5.2

Det reelle tal  $a$  er rod i  $p(x) = x^3 - x - 1$ .

Bestem et tredjegradspolynomium med heltallige koefficienter som har  $a^2$  som rod.

### Opgave 5.3

Bestem samtlige mulige værdier af  $x + \frac{1}{x}$  hvor  $x$  tilfredsstiller ligningen

$$x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0,$$

og løs denne ligning. (GM 2000)

### Opgave 5.4

Lad  $p(x)$  være et sjettegradspolynomium som for to reelle tal  $a$  og  $b$ ,  $0 < a < b$ , opfylder at  $p(a) = p(-a)$ ,  $p(b) = p(-b)$  samt  $p'(0) = 0$ .

Vis at  $p(x) = p(-x)$  for alle reelle tal  $x$ . (BW 1998)

### Opgave 5.5

I et tredjegradspolynomium  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  er  $b < 0$  og  $ab = 9c$ .

Vis at  $p(x)$  har tre forskellige reelle rødder. (BW 1992)

### Opgave 5.6

Bestem alle fjerdegradspolynomier  $p(x)$  som opfylder følgende:

i)  $p(x) = p(-x)$  for alle  $x$ .

ii)  $p(x) \geq 0$  for alle  $x$ .

iii)  $p(0) = 1$ .

iv)  $p(x)$  har præcis to lokale minima i  $x_1$  og  $x_2$  således at  $|x_1 - x_2| = 2$ .

(BW 1992)

### Opgave 5.7

Et polynomium  $p(x)$  har heltallige koefficienter og grad  $n$ . Desuden findes præcis  $k$  hele tal som er løsning til ligningen  $(p(x))^2 = 1$ .

Vis at  $k - n \leq 2$ . (IMO 1974)

### Opgave 5.8

Lad  $p(x)$  være et  $n$ 'te grads polynomium med  $p(k) = \frac{k}{k+1}$  for  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Bestem  $p(n+1)$ .

### Opgave 5.9

Lad  $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ , hvor  $n > 1$  er et helt tal.

Vis at  $f(x)$  ikke kan skrives som et produkt af to polynomier med heltallige koefficienter og grad mindst en. (IMO 1993)

## 6 Løsningsskitser/facitliste til opgaver

### Øvelse 1.3

Lad  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  være et lige polynomium, dvs. at  $p(x) = p(-x)$ .  
Dermed er

$$0 = p(x) - p(-x) = 2(a_{2m+1} x^{2m+1} + a_{2m-1} x^{2m-1} + \dots + a_1 x),$$

hvor  $m$  er det største hele tal så  $n \geq 2m + 1$ . Da det eneste polynomium der er nul for alle  $x$  ifølge entydighedssætningen er nulpolynomiet, består  $p(x)$  kun af led af lige potens af  $x$ .

At et ulige polynomium kun indeholder led af ulige potens af  $x$ , vises på tilsvarende måde.

### Øvelse 2.6

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^2 + 3x - 2 &= (x - 1)(x^3 + x^2 - x + 2) \\ 3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4 &= (x^2 + x + 1)(3x^2 + 5x + 4) \end{aligned}$$

### Øvelse 2.9

Lad  $p(x)$  være et polynomium af ulige grad. Da vil  $p(x) \rightarrow \infty$  for  $x \rightarrow \infty$  og  $p(x) \rightarrow -\infty$  for  $x \rightarrow -\infty$  eller omvendt. Da et polynomium er kontinuert og defineret for alle reelle tal, findes dermed mindst et reelt tal  $r$ , så  $p(r) = 0$ .

### Opgave 2.15.1

$$p(x) = x^{4n} + x^{2n} + 1 = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - x^n + 1).$$

### Opgave 2.15.2

Vi ved at  $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1)q(x) + ax + b$ . Ved at indsætte henholdsvis  $x = 1$  og  $x = -1$  får man  $a + b = 0$  og  $-a + b = 4$ , dvs. resten er  $-2x + 2$ .

### Opgave 2.15.3

Sæt  $p(x) = ax^4 + bx^3 + 1$ . Da vil  $(x - 1)^2 \mid p(x)$  netop hvis  $p(1) = p'(1) = 0$ , dvs. netop når  $a + b + 1 = 0$  og  $4a + 3b = 0$ . Dette giver  $a = 3$  og  $b = -4$ .

### Opgave 2.15.4

Bemærk først at  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x) + 1 > 0$  for alle hele tal  $x$ , dvs. at  $p(x)$  ikke har nogle heltallige rødder. Hvis der findes et polynomium med heltallige koefficienter som går op i  $p(x)$ , må det altså være et andengradspolynomium. Antag at  $p(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ . Det ses let at dette ikke er muligt.

### Opgave 3.4.1

Da  $p(x) = (x - 1)^n (x + 1)^n = (x^2 - 1)^n$  ses det ønskede.

### Opgave 3.4.2

Oplysningerne giver at  $a = -(x_1 + x_2)$ ,  $bc = x_1 x_2$ ,  $b = -(x_2 + x_3)$  og  $ac = x_2 x_3$ , og vi skal vise at  $c = -(x_1 + x_3)$  og  $ab = x_1 x_3$ . Af ligningerne ses at  $a - b = x_3 - x_1$  og  $c(a - b) = x_2(x_3 - x_1)$ . Da  $ac \neq bc$  får vi at  $c = x_2$ ,  $a = x_3$  og  $b = x_1$ . Sluttelig fås let at  $c = -(x_1 + x_3)$ .

### Opgave 3.4.3

Kald de heltallige rødder for  $x_1, x_2$  og  $x_3$ . Da er  $x_1 x_2 x_3 = 2^n$ ,  $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = a$

og  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ . Af sidste ligning ses at en eller tre af rødderne skal være ulige, og da  $x_1x_2x_3 = 2^n$  kan vi uden tab af generalitet antage at  $x_1 = \pm 1$ . Hvis  $x_1 = 1$  skal  $x_2 + x_3 = 0$  og  $x_2x_3 = 2^n$  hvilket er umuligt. Altså er  $x_1 = -1$  og  $x_2x_3 = -2^n$ ,  $x_2 + x_3 = 2$  og  $-2 + x_2x_3 = a$ . Heraf ses let at  $x_2$  og  $x_3$  er henholdsvis 4 og -2, dvs.  $a = -10$  og  $n = 3$ .

**Opgave 4.9.1**

Da  $a \neq b$  vil  $b - a \mid p(b) - p(a) = 3 - 1 = 2$ . Antag at  $p(c) = 2$ . Da vil  $c - a \mid p(c) - p(a) = 1$  og  $b - c \mid p(b) - p(c) = 1$ . Vi ved altså at  $c = a \pm 1$ ,  $c = b \pm 1$  samt at  $a = b \pm 2$ . Der findes højst et tal  $c$  der opfylder dette.

**Opgave 4.9.2**

Vi ved at  $2n = n - (-n) \mid p(n) - p(-n)$ , dvs. at  $p(n) - p(-n) \geq 2n$ . Dermed er  $p(n) - 2n \geq p(-n)$ , og vi ved yderligere at  $p(n) < n$ . Samlet giver dette  $p(-n) \leq p(n) - 2n < n - 2n = -n$ .

**Opgave 4.9.3**

Polynomiet  $p(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$  er irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$  ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium hvor man benytter  $p = 3$ .

**Opgave 4.9.4**

Polynomiet  $p(x) = x^p + p^2x^2 + px + p - 1$  er irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$  for alle ulige primtal  $p$ , netop hvis

$$p(x + 1) = (x^p + \binom{p}{p-1}x^{p-1} + \dots + \binom{p}{1}x + 1) + p^2(x^2 + 2x + 1) + (px + p) + p - 1$$

er irreducibelt. Da  $\binom{p}{i}$  er delelig med  $p$  for alle  $i = 1, 2, \dots, p - 1$ , når  $p$  er et primtal, er alle koefficienterne på nær højstegrads-koefficienten til  $p(x + 1)$  delelige med  $p$ . Desuden er konstantleddet  $p^2 + 2p$  ikke delelig med  $p^2$ , når  $p$  er et ulige primtal. Dermed er  $p(x + 1)$ , og altså også  $p(x)$ , irreducibelt indenfor  $\mathbb{Q}$  ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium.

**Opgave 5.1**

Bemærk at  $p(x) = x^3(1 + 2\frac{1}{x} - 3(\frac{1}{x})^2 - 5(\frac{1}{x})^3)$ , dvs.  $q(x) = 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3$  har rødderne  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  og  $\frac{1}{c}$ .

**Opgave 5.2**

Da  $a$  er rod i  $p$ , har vi at

$$(a^3 - a - 1)^2 = a^6 + a^2 + 1 - 2a^4 - 2a^3 + 2a = 0 \text{ og } a^3 - a = 1.$$

Her af ses at  $(a^2)^3 - 2(a^2)^2 + a^2 + 1 - 2 = 0$ , dvs. at  $a^2$  er rod i

$$q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

**Opgave 5.3**

Da  $x = 0$  ikke er løsning til ligningen, kan vi dividere begge sider med  $x^2$  og omskrive til en andengrads-ligning i  $x + \frac{1}{x}$ .

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{x})^2 + 5(x + \frac{1}{x}) - 6 = 0.$$

Dermed er  $x + \frac{1}{x} = -6 \vee x + \frac{1}{x} = 1$ . Af første ligning fås  $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$ , mens den sidste ikke har nogen løsninger.

**Opgave 5.4**

Polynomiet  $q(x) = p(x) - p(-x)$  har grad højst fem samt fem forskellige rødder  $-b, -a, 0, a$  og  $b$ . Desuden er  $q'(0) = 0$  hvilket viser at 0 er dobbeltrod. Dermed må  $q(x)$  være nulpolynomiet, dvs. at  $p(x) = p(-x)$  for alle  $x$ .

**Opgave 5.5**

For  $p'(x) = 3x^2 + 2ax + b$  vil diskriminanten være positiv da  $b < 0$ , dvs.  $p'(x)$  har to forskellige reelle rødder  $x_1$  og  $x_2$ . Da  $p(x)$  er et tredjegradspolynomium, vil det have tre forskellige reelle rødder netop hvis  $p(x_1)$  og  $p(x_2)$  har forskellige fortegn, dvs. netop hvis  $p(x_1)p(x_2) < 0$  (overvej). Ved at udnytte at  $ab = 9c$ , får man ved division af  $p(x)$  med  $p'(x)$  at resten er  $x(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)$ . Da  $p(x) = p'(x)q(x) + x(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)$  og  $x_1x_2 = \frac{b}{3} < 0$ , er

$$p(x_1)p(x_2) = x_1x_2(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2)^2 < 0.$$

**Opgave 5.6**

Lad  $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ . Ifølge i) er  $b = d = 0$ , og ifølge iii) er  $e = 1$ . Yderligere giver ii) at  $a > 0$ , dvs.  $p(x) = ax^4 + cx^2 + 1$ , hvor  $a > 0$ .

Da  $p(x)$  har to lokale minima, må  $p'(x) = 4ax^3 + 2cx$  have tre forskellige reelle rødder, og da  $a > 0$  giver dette at  $c < 0$ . Rødderne i  $p'(x)$  er  $x = 0$  og  $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$ , dvs. at  $2\sqrt{-c/(2a)} = 2$  og dermed  $c = -2a$ . Endelig giver ii) at  $p(x) = ax^4 - 2ax^2 + 1 = a(x^2 - 1)^2 + 1 - a > 0$ , dvs. at  $0 < a \leq 1$ . Det er nemt at tjekke at alle sådanne polynomier opfylder de fire betingelser.

**Opgave 5.7**

Bemærk først at  $(p(x))^2 = 1 \Leftrightarrow (p(x) - 1)(p(x) + 1) = 0$ . Antag at  $p(a) = 1$  og  $p(b) = -1$  for to hele tal  $a$  og  $b$ . Da vil  $a - b \mid p(a) - p(b) = 2$ , dvs. at  $b = a \pm 1 \vee b = a \pm 2$ .

Antag nu at  $m$  er den mindste heltallige løsning til  $(p(x) - 1)(p(x) + 1) = 0$ , og antag fx at  $p(m) - 1 = 0$ . Da findes højst to heltallige løsninger til  $p(x) + 1 = 0$ , nemlig  $m + 1$  og  $m + 2$ . Polynomiet  $p(x) - 1$  er af  $n$ 'te grad og har derfor højst  $n$  rødder. Dermed har  $(p(x) - 1)(p(x) + 1) = 0$  højst  $n + 2$  heltallige løsninger.

**Opgave 5.8**

Da  $p(k) - \frac{k}{k+1} = 0$  for  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , vil  $n + 1$ 'te grads polynomiet  $q(x) = p(x)(x + 1) - x$  have rødderne  $0, 1, 2, \dots, n$ . Dermed er

$$q(x) = a(x - 0)(x - 1)(x - 2) \dots (x - n).$$

Da  $q(-1) = 1$ , må  $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ , og dermed

$$p(n+1) = \frac{q(n+1) + n+1}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1} + n+1}{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{for ulige } n \\ \frac{n}{n+2} & \text{for lige } n \end{cases}.$$

**Opgave 5.9**

Antag at

$$f(x) = (x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_1x \pm 3)(x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \dots + b_1x \pm 1).$$

Vi ønsker nu at vise at alle  $a_i$ 'erne er delelige med 3 da det fører til en modstrid.

Bemærk først at  $r, s > 1$  da ingen af tallene  $\pm 3$  og  $\pm 1$  er rod i  $f$ .

Nu er  $r \leq n - 2$ , og dermed er alle koefficienterne til  $x, x^2, \dots, x^r$  i  $f$  lig med nul. Da koefficienten til  $x$  er nul, må  $a_1 + 3b_1 = 0$ , dvs. at  $a_1$  er delelig med 3. Ved induktion viser vi nu at  $a_2, a_3, \dots, a_{r-1}$  også er delelige med 3.

Antag at  $a_1, a_2, \dots, a_t$  alle er delelige med 3, og betragt koefficienten til  $x^{t+1}$ . Hvis  $s - 1 \geq t + 1$ , er  $a_{t+1}$  en linearkombination af  $a_1, a_2, \dots, a_t, 3$ . Hvis  $s - 1 < t + 1$ , er  $a_{t+1}$  en linearkombination af  $a_1, a_2, \dots, a_t$ . I begge tilfælde er  $a_{t+1}$  delelig med 3.

Betragt nu koefficienten til  $x^r$  som skal være nul. Den er en linearkombination af  $a_1, a_2, \dots, a_{r-1} \pm 1$ , hvilket aldrig kan være nul. Dermed var antagelsen om at  $f$  kunne skrives som produkt af to ikke konstante polynomier med heltallige koefficienter forkert.

I noterne står GM for Georg Mohr-Konkurrence, NMC for Den Nordiske Matematikkonkurrence, BW for Baltic Way og IMO for Den Internationale Matematik Olympiade.

Desuden betyder (Engel) at opgaven er taget fra Arthur Engel: Problem-Solving Strategies, Springer 1998.