Lektie til Sorøophold 2009

Opvarmning

Inden du regner opgave 1, 2 og 3, skal du repetere hvordan man benytter Fermats lille sætning til nemt at udregne fx 2^{1802} modulo 19, hvordan man tilsvarende nemt benytter Euler-Fermat til at udregne fx 3^{323} modulo 50, samt hvordan man benytter binomialformlen til nemt at udregne fx 99^{224} modulo 1000. (*Hint* Til det sidste skal du se på $(100-1)^{224}$ modulo 1000.)

Opgave 1

Bestem de to sidste cifre i $3^{214} \cdot 97^{828} \cdot 13^{521}$.

Opgave 2

Bestem sidste ciffer i $\underbrace{7^{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}}_{1000}$.

Opgave 3

Bestem de sidste tre cifre i $2003^{2002^{2001}}$.

Opgave 4

To cirkler C_1 og C_2 skærer hinanden i punkterne A og B. En linje r gennem B skærer C_1 og C_2 i henholdsvis P_r og Q_r. Vis at der findes et punkt M, således at midtnormalen på P_rQ_r går gennem M uanset beliggenheden af r.
(Du kan eventuelt nøjes med at vise tilfældet hvor de to cirkler har samme radius.)

Opgave 5

Lad $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ og $q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$, hvor a, b og c er reelle tal, være to forskellige polynomier der har to fælles reelle rødder r_1 og r_2.
Bestem samtlige mulige værdier af r_1 og r_2.

Opgave 6

Lad a, b og c være tre positive reelle tal således at $a + b + c = abc$.
Vis at

$$\begin{array}{rc} \text{i)} & abc \geq 3\sqrt{3} \\ \text{ii)} & \sqrt{1+a^{-2}} + \sqrt{1+b^{-2}} + \sqrt{1+c^{-2}} \geq 2\sqrt{3} \end{array}$$

.