

Talteori

Opgave 1

Tre positive heltal k , m og n opfylder at $m^n \mid n^m$ og $n^k \mid k^n$. Vis at $m^k \mid k^m$.

Opgave 2

Vis at der ikke findes en tripel af positive hele tal (a, b, c) så

$$(2a + b)(2b + a) = 2^c.$$

Opgave 3

Lad p og q være primtal, og x og y positive hele tal som opfylder at $x < p$ og $y < q$, samt at $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ er et helt tal. Vis at $x = y$.

Opgave 4

For et positivt helt tal n betegner $\sigma(n)$ summen af alle positive divisorer i n , fx er $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$. Lad a og b være to positive hele tal. Vis at hvis $\sigma(a) > 2a$, da er også $\sigma(ab) > 2ab$.

Opgave 5

Bestem samtlige par (x, y) af positive hele tal som opfylder at $(x + y)(xy + 1)$ er en potens af 2.

Opgave 6

Bestem alle heltalsværdier af $\frac{m^2+n^2}{nm}$ når m og n er hele positive tal.

Opgave 7

Lad d og n være positive hele tal så d er en ægte divisor i $n!$. Vis at der findes en divisor f i $n!$ så $d + f$ også er divisor i $n!$.

Opgave 8

Vis at for positive hele tal n og m hvor $m \leq n$, er

$$\frac{\binom{n}{m}}{n} \binom{n}{m}$$

et helt tal.

Opgave 9

For et helt positivt tal m betegner $f(m)$ det mindste hele tal n for hvilket følgende er sandt:

Ud af en mængde med n hele tal er det altid muligt at finde en delmængde med m hele tal hvis sum er delelig med m .

Bestem $f(m)$.

Opgave 10

Lad p_1, p_2, \dots, p_n være forskellige primtal større end 3. Vis at

$$2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$$

har mindst 4^n positive divisorer.