Kombinatorik

Opgave 1
Seks 4−cifrede tal er indbyrdes primiske, dvs. at der ikke findes et primtal p som går op i alle seks tal. Vis at det altid er muligt at vælge fem blandt de seks tal som ikke har en fælles primdivisor.

Opgave 2
I en gruppe på 45 mennesker vil to der har samme antal bekendte blandt de resterende 43, ikke kende hinanden. Hvor mange bekendtskaber kan der maksimalt være blandt de 45 mennesker?

Opgave 3
To spillere spiller følgende spil. Spiller A skriver et ciffer, hvorefter B skriver et ciffer til højre for dette, hvorefter A skriver et ciffer til højre for dette, osv. Fx kan A vælge først at skrive 6, B derefter 5, A herefter 1, og B herefter 3 således at de efter fire træk har tallet 6513. Det er tilladt at starte med cifferet 0. Spillet stopper når mindst to på hinanden følgende cifre i den rækkefølge de står, danner et tal som er deleligt med 11, og den spiller som har skrevet det sidste ciffer, taber. Vis at spillet slutter efter et endeligt antal træk, og afgør hvem af de to spillere der har en vindende strategi.

Opgave 4
Et enmandsspil består af en cirkelskive med n røde knapper i en cirkel langs kanten, $n \geq 3$. Knapperne kan lyse, og fra starten er der netop en knap som lyser. Når man trykker på en knap som lyser, så slukkes den, og de to naboknapper skifter status, dvs. hvis de lyste så slukkes de, og omvendt. Hvis man trykker på en knap der ikke lyser, så sker der ingenting. Spillet vindes hvis man kan få slukket alle knapperne. For hvilke n er det muligt at vinde?

Opgave 5
To spillere A og B spiller følgende spil. Til at starte med ligger der n, $n \geq 2$, tændstikker på bordet. Spillerne skiftes til at trække, og i første træk må A højst fjerne $n-1$ tændstikker. Derefter må hver spiller højst fjerne lige så mange som der blev fjernet i det foregående træk, og mindst en, dvs. hvis A fjerner k tændstikker, må B i næste træk fjerne m tændstikker hvor $1 \leq m \leq k$, osv. Den der fjerner den sidste tændstik har vundet. For hvilke værdier af n har A en vindende strategi?

Opgave 6 (IMO 1990)
To spillere A og B spiller følgende spil. Fra starten står et helt tal n, $n > 1$, på en tavle. Spillerne skiftes til at trække, A starter og må i hvert træk erstatte det tal m som står på tavlen, med et tal m' som opfylder at $m \leq m' \leq m^2$, mens B i sit træk må erstatte det tal m som står på tavlen, med et tal m' som opfylder at $\frac{m}{m'}$ er en primtalspotens. Spiller A vinder hvis hun kan vælge tallet 1990, og spiller B vinder hvis han kan vælge tallet 1. For hvilke startværdier n har A en vindende strategi, og for hvilke har B?