Løsninger til kombinatorik

Opgave 1
Vi beviser påstanden indirekte. Antag at når vi vælger vilkårlige fem af de seks tal $\{a_1, a_2, \ldots, a_6\}$ har de en fælles primdivisor. Lad p_i betegne et primtal der går op i alle seks tal pånær a_i. Dermed har vi seks forskellige primtal $p_1, p_2, \ldots, p_6$, og vi kan uden tab af generelitet antage at $p_1 < p_2 < \cdots < p_6$. Da de seks mindste primtal er $2, 3, 5, 7, 11, 13$, må $P = p_2p_3p_4p_5p_6 \geq 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 15015$, men dette er umuligt da P går op i det $4-$cifrede tal a_1. Dermed findes der fem af de seks tal som ikke har en fælles primdivisor.

Opgave 2
Det maksimale antal bekendtskaber er 870. Først kommer vi med et eksempel på 870 bekendtskaber: Vi inddeler de 45 mennesker i 9 grupper med henholdsvis $1, 2, \ldots, 8$ og 9 i hver. Antag at hver person har et bekendtskab med alle personer i de andre grupper, men ikke med dem fra sin egen gruppe. Da har to personer fra to forskellige grupper ikke samme antal bekendte, og betingelsen er dermed opfyldt. Dette eksempel giver

$$\binom{45}{2} - \left(\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \cdots + \binom{9}{2}\right) = 870$$

bekendtskaber. Nu viser vi, at det er umuligt med flere end 870 bekendtskaber. For k, $0 \leq k \leq 44$, lader vi A_k betegne antal personer som har netop k bekendte. Der må gælde at $A_k \leq 45 - k$, for ellers kunne vi finde to personer som kendte hinanden, og som havde samme antal bekendte blandt de øvrige 43. Vi ved at $A_0 + A_1 + \cdots + A_{44} = 45$, og at det samlede antal bekendtskaber kan udtrykkes som

$$S = \frac{1}{2}\Big(44 \cdot A_{44} + 43 \cdot A_{43} + \cdots + 1 \cdot A_1 + 0 \cdot A_0\Big).$$

Men ud fra betingelsen $A_k \leq 45 - k$, får vi da

$$S \leq 44 \cdot 1 + 43 \cdot 2 + 42 \cdot 3 + 41 \cdot 4 + \cdots + 36 \cdot 9 = 870.$$

Opgave 3
Lad c_1 betegne det ciffer A først vælger, c_2 betegne det ciffer B dernæst vælger, osv. Efter n træk har vi tallet $C_n = c_1c_2 \ldots c_n$. Et tal er deleligt med 11, netop når den alternerende tværsum er. Vi sætter derfor

$$S_n = c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1}c_n.$$

Spillet slutter derfor første gang $S_n \equiv 0 \pmod{11}$ for et $n \geq 2$, eller $S_n \equiv S_i \pmod{11}$ for $n \geq i+2$, og spillet slutter derfor senest efter 22 træk. Nu viser vi at A har en vindende strategi, og det er hver gang at skrive 0: Første gang A skriver 0, er der kun et ciffer, så spillet stopper ikke. Når A i træk nummer i skriver 0, $i > 1$, da bliver $S_i = S_{i-1}$, dvs. vi har $S_{2k+1} = S_{2k}$, $k \geq 1$, lige indtil spillet stopper, og dermed må A vinde. (Overvej).

Opgave 4
Det er muligt når n ikke er delelig med tre.
Vi ser først på tilfældet hvor n er delelig med tre. Knapperne inddeles i tre grupper således at hver gruppe indeholder hver tredje knap hele vejen rundt. Antal knapper der lyser i de tre grupper kaldes henholdsvis a, b og c, og vi antager at i startsituationen er $a = 1$ og $b = c = 0$. Vi bemærker at hvis vi trykker på en knap fra en gruppe, så ændres a, b og c med ± 1, dvs. at $a - b$ ikke ændrer paritet. Fra starten er $a - b = 1$, dvs. at vi aldrig kan opnå $a = b = 0$ som ønsket.
Nu ser vi på tilfældet hvor n ikke er delelig med tre. Knapperne nummereres fortløbende $1, 2, \ldots, n$,

således at det er knap nummer 1 der lyser fra starten. Ved at trykke på knap $1, 2, \dots, n-2$ i nævnte rækkefølge opnår vi en situation hvor alle knapper på nær nummer $n-2$ lyser. Hvis n har rest 1 ved division med 3, da kan vi slukke dem alle i grupper af tre, for hvis man trykker på den midterste af tre lysende lamper, så slukkes de alle. Hvis n har rest 2 ved division med 3, da trykker vi først på knap $n-1$, og opnår en situation hver alle knapper på nær nummer $n-1$ og n lyser. Disse kan vi slukke på samme måde som før, da antallet er deleligt med tre, og de sidder på række.

Opgave 5

Spiller A har en vindende strategi nå n ikke er en potens af 2. For et helt tal $m = 2^2u$, u er ulige, lader vi $e(m) = 2^s$. Den situation en spiller står i når det er hendes tur til at trække, betegner vi (n, k) hvor n betegner antal tændstikker der er tilbage, og k betegner det største antal tændstikker som spilleren må fjerne. Vi påstår nu at vindermængden er $V = \{(n, k)|k \geq e(n)\}$, mens tabermængden tilsvarende er $T = \{(n, k)|k < e(n)\}$. For at vise dette, skal vi vise at der for hver situation i vindermængden findes et træk som fører til en situation i tabermængden, samt at for enhver situation i tabermængden vil alle tilladte træk føre til en situation i vindermængden. Antag først at (n, k) tilhører vindermængden. Spilleren fjerner da $e(n)$ tændstikker, og hvis $n = e(n) \cdot u$, efterlader det situationen $\Big(e(n)(u-1), e(n)\Big)$ hvilket er en situation fra tabermængden da $u-1$ er lige. Antag til slut at (n, k) er en situation fra tabermængden. Hvis spilleren fjerner l tændstikker, $1 \leq l \leq k$, efterlader hun situationen $(n-l, l)$. Da $l \leq k < e(n)$, er $e(l) < e(n)$, og dermed $e(n-l) = e(l) \leq l$, dvs. at $(n-l, l)$ ligger i vindermængden.
Når A starter spillet, er situationen $(n, n-1)$, dvs. A vinder netop hvis $n-1 \geq e(n)$, altså netop hvis n ikke er en potens af 2.

Opgave 6

For $n = 2, 3, 4, 5$ har B en vindende strategi, for $n \geq 8$ har A en vindende strategi, og for $n = 6, 7$ har ingen af spillerne en vindende strategi.
Det er nemt at tjekke at B har en vindende strategi for $n \leq 5$.
Nu viser vi at A vinder hvis $n \geq 8$:
Hvis $45 \leq n \leq 1990$, kan A i første træk vælge 1990 og vinde.
Hvis $23 \leq n \leq 44$, kan A vælge $n' = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$. Dermed kan B kun vælge et n'' så $56 \leq n'' \leq 504$ hvilket betyder at A vinder.
Hvis $17 \leq n \leq 22$, kan A vælge $n' = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$. Dermed kan B kun vælge et n'' så $35 \leq n'' \leq 280$ hvilket betyder at A vinder.
Hvis $12 \leq n \leq 16$, kan A vælge $n' = 140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$. Dermed kan B kun vælge et n'' så $20 \leq n'' \leq 140$ hvilket betyder at A vinder.
Hvis $8 \leq n \leq 11$, kan A vælge $n' = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Dermed kan B kun vælge et n'' så $12 \leq n'' \leq 60$ hvilket betyder at A vinder.
Hvis $n = 1991$ kan A vælge $n' = 1991 = 11 \cdot 181$, for da må B vælge $n'' = 11$ eller $n'' = 181$, og dermed vinder A.
Hvis $11^k \cdot 181 < n \leq 11^{k+1} \cdot 181$, kan A vælge $n' = 11^{k+1} \cdot 181$, da det tvinger B til at vælge et n'' som opfylder at $n'' \leq 11^{k \cdot 181}$, dvs. ved at fortsætte på denne måde, vil A vinde. Vi har nu vist at A har en vindende strategi når $n \geq 8$.
Hvis $n = 6$, er det eneste n' som A kan vælge således at B ikke kan erstatte det med et tal $n'' \leq 5$, tallet $n' = 30$. Hvis B skal erstatte $n' = 30$ med et tal $n'' \leq 7$, er den eneste mulighed $n'' = 6$. Dermed har ingen af spillerne en vindende strategi. For $n = 7$ sker noget tilsvarende; A vælger $n' = 42$, B vælger $n'' = 7$.