

Algebra

Opgave 1

Vis at

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{yx}$$

for alle positive reelle tal x og y .

Opgave 2

Vis at

$$a^6 - 6ab^5 + 5b^6 \geq 0$$

for alle reelle tal a og b .

Opgave 3

Lad a, b, c være positive reelle tal med sum 1. Vis at

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a} + \frac{2}{1+b} + \frac{2}{1+c}.$$

Opgave 4

Følgen af reelle tal a_1, a_2, a_3, \dots konstrueres ud fra et givent a_1 på følgende måde: $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$, for alle positive heltal n . Bestem samtlige værdier som a_{1001} kan antage.

Opgave 5

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være polynomier med heltallige, ikke-negative koefficienter, og lad m være den største blandt koefficienterne i f . Vis at hvis der findes positive heltal a og b som opfylder at $a < m < b$, $f(a) = g(a)$ og $f(b) = g(b)$, da er f og g identiske.

Opgave 6

Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ som opfylder at

$$f(x+y) + 6x = f(f(x)) + f(y), \text{ for alle } x, y \in \mathbb{Q}.$$

Opgave 7

Bestem alle positive reelle tal x og y som opfylder ligningen

$$\frac{64x^2y^2}{4x^2 + y^2} = (x+1)(y+2)(2x+y).$$