

Løsninger til algebra

Opgave 1

Ifølge AG-uligheden er

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{x}{2\sqrt{x^4 y^2}} + \frac{y}{2\sqrt{y^4 x^2}} = \frac{1}{yx}.$$

Opgave 2

Ifølge AG-uligheden er

$$a^6 + 5b^6 = a^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 + b^6 \geq 6\sqrt[6]{a^6 b^{30}} = 6|ab^5| \geq 6ab^5.$$

Opgave 3

Da $\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1+x} = \frac{-1+3x}{1-x^2}$, kan uligheden omskrives til

$$\frac{-1+3a}{1-a^2} + \frac{-1+3b}{1-b^2} + \frac{-1+3c}{1-c^2} \geq 0.$$

Antag wlog at $a \geq b \geq c$, dvs. at $1-c^2 \geq 1-b^2 \geq 1-a^2$. Da er

$$\frac{-1+3a}{1-a^2} + \frac{-1+3b}{1-b^2} + \frac{-1+3c}{1-c^2} \geq \frac{-1+3a}{1-c^2} + \frac{-1+3b}{1-c^2} + \frac{-1+3c}{1-c^2} = 0.$$

Opgave 4

Vi omskriver rekursionsbetingelsen til $a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$, og sætter $b_n = a_n + 1$. Da er $b_{n+1} = b_n^2$, dvs. at $b_{1001} = b_1^{2^{1000}}$. Ud fra dette ses at $a_{1001} \geq -1$, og at a_{1001} kan være et vilkårligt reelt tal $\alpha \geq -1$, da

$$a_1 = \sqrt[2^{1000}]{\alpha + 1} - 1$$

giver $a_{1001} = \alpha$.

Opgave 5

Antag at f og g ikke er identiske. Sæt

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0,$$

$$g(x) = d_k x^k + d_{k-1} x^{k-1} + \dots + d_1 x + d_0.$$

Da $c_i \leq m < b$, har vi i b -talssystemet

$$f(b) = c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$$

hvor c 'erne er cifrene. Hvis alle $d_i < b$, da må f og g være identiske pga. at $f(b) = g(b)$ skrives entydigt i b -talssystemet. Der findes altså et $d_i \geq b$. Lad d_i være den koefficient med det mindste indeks hvor $d_i \geq b$, og sæt $d_i = bq + r$, $0 \leq r < b$. Vi konstruerer nu et nyt polynomium $g_1(x)$ ud fra $g(x)$ hvor vi udskifter d_i med r , og d_{i+1} med $d_{i+1} + q$. På denne måde bliver $g_1(b) = g(b)$, men $g_1(a) < g(a)$ da

$$d_i a^i + d_{i+1} a^{i+1} = (bq + r)a^i + d_{i+1} a^{i+1} > (aq + r)a^i + d_{i+1} a^{i+1} = r a^i + (d_{i+1} + q)a^{i+1}.$$

Hvis g_1 også har en koefficient som er mindst b , fortsætter vi og konstruerer på samme måde som før et polynomium $g_2(x)$ ud fra $g_1(x)$. På denne måde får vi til sidst et polynomium

$g_m(x)$ hvor samtlige koefficienter er mindre end b , $g_m(b) = g(b) = f(b)$ og $g_m(a) < g(a) = f(a)$. Sæt

$$g_m(x) = e_l x^l + e_{l-1} x^{l-1} + \cdots + e_1 x + e_0.$$

I b -talssystemet er

$$c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0 = f(b) = g_m(b) = e_l e_{l-1} \dots e_1 e_0,$$

og da $f(b) = g_m(b)$ skrives entydigt i b -talssystemet, må f og g_m være identiske. Men dette er i modsrid med at $g_m(a) < f(a)$, dvs. at antagelsen om at f og g ikke er identiske, er forkert.

Opgave 6

Når $x = y = 0$, får vi $f(f(0)) = 0$. Sæt nu $x = f(0)$ og $y = 0$, da er

$$f(f(0)) + 6f(0) = f(f(f(0))) + f(0).$$

Ved at kombinere dette får vi $6f(0) = f(0) + f(0)$, og dermed $f(0) = 0$.

Hvis $y = 0$ er

$$f(x) + 6x = f(f(x)), \quad \dagger$$

og dermed

$$f(x + y) = f(f(x)) - 6x + f(y) = f(x) + f(y).$$

Det er velkendt alle alle funktioner $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ som opfylder denne Cauchy ligning, er på formen $f(x) = f(1)x$. Vi mangler dermed kun at bestemme de mulige værdier af $f(1)$. Ifølge \dagger er $f(1) + 6 = f(1)^2$, dvs. at $f(1) = 3 \vee f(1) = -2$, og det er nemt at tjekke at både $f(x) = 3x$ og $f(x) = -2x$ opfylder funktionalligningen.

Opgave 7

Ved at gange begge sider med $4x^2 + y^2$ omskrives uligheden til

$$\begin{aligned} 8x^4y + 2x^2y^3 + 4x^3y^2 + xy^4 + 16x^4 + 4x^2y^2 + 8x^3y + 2xy^3 + \\ 8x^3y + 2xy^3 + 4x^2y^2 + y^4 + 16x^3 + 4xy^2 + 8x^2y + 2y^3 = 64x^2y^2. \end{aligned}$$

Ved at bruge AG -uligheden på venstresiden VS får vi

$$VS \geq 16 \sqrt[16]{2^{32}x^{32}y^{32}} = 64x^2y^2,$$

med lighedstegn netop når alle summerter i VS er lig hinanden. For at finde de x og y for hvilke der gælder lighedstegn, ser vi på $8x^4y = 8x^3y$, som giver $x = 1$, og $8x^3y = 16x^3$ som giver $y = 2$. Hvis ligningen har en løsning, må det være $x = 1$ og $y = 2$, og ved at indsætte ses at disse tal løser ligningen.