Talteoriopgaver
Træningsophold ved Sorø Akademi 2007

18. juli 2007

Opgave 1. Vis at når a, b og c er positive heltal, er

$$a^4 + b^4 + 4c^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2$$

et sammensat tal.

Opgave 2. Der står nogle positive hele tal på en tavle. Georg må lave følgende træk:

(1) Erstatte to af tallene med deres sum.
(2) Erstatte et tal x med to tal hvis sum er x.
(3) Bytte om på cifrene i et af tallene.
(4) Gange samtlige tal på tavlen med 2.

Antag der oprindeligt står tallene 5 og 7 på tavlen. Kan Georg ved hjælp af (1)–(4) sørge for, at summen af samtlige cifre på tavlen er 2007?

Kan det lade sig gøre hvis der oprindeligt står et enkelt 1-tal?

Opgave 3. Vis at der for alle hele tal $n \geq 2$ gælder at sidste ciffer i tallet $2^{2^n} + 1$ er 7.

Opgave 4. Lad n være et positivt helt tal. Vis at hvis $4^n + 2^n + 1$ er et primtal, så er n en potens af 3.

Opgave 5. Vis at hvis der om et naturligt tal n gælder at $2n + 1$ og $3n + 1$ er kvadrattal, da er $n \equiv 0 \pmod{40}$.

Opgave 6. Lad n være et positivt heltal, og lad $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ være de positive divisorer i n. Find alle n for hvilke $2n = d_5^2 + d_6^2 - 1$.

Opgave 7. For et givet n starter tallene 2^n og 5^n med samme ciffer d. Hvad er dette ciffer?

Opgave 8. Lad $t(n)$ betegne tværsummen af det naturlige tal n. Løs ligningen

$$n + t(n) + t(t(n)) = 2008.$$

Opgave 9. Lad k være et positivt heltal. Vis at der eksisterer k på hinanden følgende sammensatte tal.

Opgave 10. Vis at der ikke findes heltal $n > 1$, $m > 1$ og $k > 1$ så $n! = m^k$. (*Hint: se Bertrands postulat nedenfor*)

Opgave 11. Vis at ligningen

$$x^2 + x + 1 = py$$

har heltalsløsninger for uendeligt mange primtal p

Et par bemærkninger om fordelingen af primtal

Der findes uendeligt mange primtal. Et klassisk bevis (som Euklid kendte) for dette, går ud på at antage at der kun findes endeligt mange primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$, og så danne et tal $n = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ der ikke kan deles af nogen af disse, og derved nå til en modstrid. Du er velkommen til selv at fylde detaljerne ud.
Men selv om der er uendeligt mange af dem, er primtallene fordelt meget irregulært. Som opgave 9 viser, eksisterer der vilkårligt store huller i fordelingen. På den anden side er det altid muligt at finde intervaller hvori der er mindst et primtal:
Sætning: (Bertrands postulat)
For ethvert helt tal $n > 1$ eksisterer der mindst et primtal p så $n < p < 2n$.
Sætningen er blevet bevist siden Bertrand postulerede den i 1845 (Chebyschef beviste den i 1850), men navnet hænger ved. Vi vil ikke bevise den, men I må gerne bruge den i konkurrencesammenhæng.