Talteoriopgaver
Træningsophold ved Sorø Akademi 2007

18. juli 2007

Opgave 1. *Vis at når a, b og c er positive heltal, er*

$$a^4 + b^4 + 4c^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2$$

et sammensat tal.

Løsningsforslag:

$$\begin{aligned}
&a^4 + b^4 + 4c^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2 \\
=&(a+b)^4 + 4c^4 \\
=&\left((a+b)^2 + 2c^2\right)^2 - 4(a+b)^2c^2 \\
=&\left((a+b)^2 + 2c^2\right)^2 - (2(a+b)c)^2 \\
=&\left((a+b)^2 + 2c^2 + 2(a+b)c\right)\left((a+b)^2 + 2c^2 - 2(a+b)c\right).
\end{aligned}$$

Opgave 2. *Der står nogle positive hele tal på en tavle. Georg må lave følgende træk:*

(1) Erstatte to af tallene med deres sum.
(2) Erstatte et tal x med to tal hvis sum er x.
(3) Bytte om på cifrene i et af tallene.
(4) Gange samtlige tal på tavlen med 2.

Antag der oprindeligt står tallene 5 og 7 på tavlen. Kan Georg ved hjælp af (1)–(4) sørge for, at summen af samtlige cifre på tavlen er 2007?

Kan det lade sig gøre hvis der oprindeligt står et enkelt 1-tal?

Løsningsforslag: Nej, det kan ikke lade sig gøre: Tricket er at udnytte, at et tal er kongruent med sin tværsum modulo 9. Summen af cifrene på tavlen er det samme som summen af tværsummerne af tallene. Under trækkene (1), (2) og (3) er denne sum uforandret (modulo 9). Under træk (4) ændres summen med en faktor 2 modulo 9. Oprindelig står der $5 + 7 = 12 \equiv 3 \pmod 9$, og vi kan derfor aldrig få andet end 6 og $2 \cdot 6 = 12 \equiv 3 \pmod 9$; specielt kan vi aldrig få summen $2007 \equiv 0 \pmod 9$.

I det andet tilfælde kan man kun få tal som er kongruente med 1, 2, 4, 8, 7 og 5 modulo 9, med samme argument.

Opgave 3. *Vis at der for alle hele tal $n \geq 2$ gælder at sidste ciffer i tallet $2^{2^n} + 1$ er 7.*

Løsningsforslag: Kan vises ved induktion.
For $n = 2$ er $2^{2^2} + 1 = 17$.
Antag nu at $2^{2^n} + 1 = 10k + 7$. Da er $2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 = (10k + 6)^2 + 1 = (10(10k^2 + 12k + 3) + 6) + 1 = 10(10k^2 + 12k + 3) + 7$.
Det sidste ciffer er igen 7, og påstanden er vist.

Opgave 4. *Lad n være et positivt helt tal. Vis at hvis $4^n + 2^n + 1$ er et primtal, så er n en potens af 3.*

Løsningsforslag: Hvis n er lige, er $4^n + 2^n + 1 = 4^{2m} + 4^m + 1 \equiv 0 \pmod 3$, så tallet er divisibelt med 3 (og da $n > 0$ er $4^n + 2^n + 1 > 3$). Altså er n ulige.

Antag at p er en primdivisor i n forskellig fra 3, og sæt $n = pk$. Lad $a = 2^k$, så $4^n + 2^n + 1 = a^{2p} + a^p + 1$. Vi har at $\frac{a^3-1}{a^2+a+1} = a - 1$, så $a^3 \equiv 1 \pmod{a^2 + a + 1}$. Da $p > 3$ er der to muligheder:

- Hvis $p = 3\ell + 1$ er $a^{2p} + a^p + 1 = (a^3)^{2\ell} a^2 + (a^3)^p a + 1 \equiv a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{a^2 + a + 1}$.
- Hvis $p = 3\ell + 2$ er $a^{2p} + a^p + 1 = (a^3)^{2\ell+1} a + (a^3)^\ell a^2 + 1 \equiv a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{a^2 + a + 1}$.

I begge tilfælde ser vi altså at $a^{2p} + a^p + 1 = 4^k + 2^k + 1$ er en ægte divisor i $4^n + 2^n + 1$.

Opgave 5. *Vis at hvis der om et naturligt tal n gælder at $2n + 1$ og $3n + 1$ er kvadrattal, da er $n \equiv 0 \pmod{40}$.*

Løsningsforslag: $2n + 1 = x^2$ og $3n + 1 = y^2$. Første ligning medfører at x er ulige (og kan skrives $x = 2m_1 + 1$).

$2n = (2m_1+1)^2 - 1 = 4(m_1^2 + m_1) = 8m_2$, da $m_1^2 + m_1$ altid er lige. Vi har altså at $n = 4m_2$.
Sættes det ind i den anden ligning indses at også y må være ulige ($y = 2m_3 + 1$). Det giver som før
$3n = 4(m_3^2 + m_3) = 8m_4$. Da $(3, 8) = 1$ (3 og 8 er primiske), må der eksistere et m_5 så $n = 8m_5$. Det betyder at $n \equiv 0 \pmod 8$.
Vi mangler nu blot at vise at $n \equiv 0 \pmod 5$. De kvadratiske rester modulo 5 er 0, 1 og 4, men hvis vi regner modulo 5 får vi:

$$\begin{aligned} n \equiv 1 &\Rightarrow x^2 = 2n+1 \equiv 3 \\ n \equiv 2 &\Rightarrow y^2 = 3n+1 \equiv 2 \\ n \equiv 3 &\Rightarrow x^2 = 2n+1 \equiv 2 \\ n \equiv 4 &\Rightarrow y^2 = 3n+1 \equiv 3 \end{aligned}$$

De er alle usande så n må være kongruent med 0 modulo 5. Vi har derfor samlet at $n \equiv 0 \pmod{40}$.

Opgave 6. *Lad n være et positivt heltal, og lad $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ være de positive divisorer i n. Find alle n for hvilke $2n = d_5^2 + d_6^2 - 1$.*

Løsningsforslag: Antag at $d_5 \geq \sqrt{n}$. Da er $d_5^2 + d_6^2 - 1 \geq n + (\sqrt{n}+1)^2 - 1 = 2n + 2\sqrt{n} > 2n$. Men så må $d_5 < \sqrt{n}$. Hvis vi på den anden side antager at $d_6 \leq \sqrt{n}$ får vi $d_5^2 + d_6^2 - 1 \leq n + n - 1 = 2n - 1 < 2n$, der giver os at $d_6 > \sqrt{n}$. Dette medfører at $d_5 d_6 = n$ og at n har 10 divisorer (inklusiv 1 og n).
$(d_6 - d_5)^2 = d_5^2 + d_6^2 - 2d_5 d_6 = 2n + 1 - 2n = 1$. Derfor er $d_6 - d_5 = 1$ og $(d_5, d_6) = 1$. Da n har 10 divisorer, og $(d_5, d_6) = 1$, har det højst to primfaktorer (og en af dem er 2) og må være på formen $n = pq^4$ hvor p, q er primtal. Derudover gælder at $\{d_5, d_6\} = \{p, q^4\}$ og $|p - q^4| = 1$. Herfra kan vi konkludere at $q = 2$ og $p = 17$. Eneste løsning er da $n = 272$.

Opgave 7. *For et givet n starter tallene 2^n og 5^n med samme ciffer d. Hvad er dette ciffer?*

Løsningsforslag: Antag at 2^n og 5^n begge starter med cifferet d og at de har hhv. $r+1$ og $s+1$ cifre. Da har vi, for $n > 3$, at

$$d \cdot 10^r < 2^n < (d+1) \cdot 10^r \quad \text{og} \quad d \cdot 10^s < 5^n < (d+1) \cdot 10^s.$$

Produktet af disse uligheder giver

$$d^2 \cdot 10^{r+s} < 10^n < (d+1)^2 \cdot 10^{r+s} \Rightarrow d^2 < 10^{n-r-s} < (d+1)^2.$$

Da vi ved at $1 \leq d$ og $d+1 \leq 10$ får vi at $n - r - s = 1$. Dvs. $d^2 < 10$ og $(d+1)^2 > 10$. Det kan kun lade sig gøre for $d = 3$. Mindste eksempel: $2^5 = 32$ og $5^5 = 3125$.

Opgave 8. *Lad $t(n)$ betegne tværsummen af det naturlige tal n. Løs ligningen*

$$n + t(n) + t(t(n)) = 2008.$$

Løsningsforslag: t har rest ved division med 3 som invariant. Regner vi modulo 3 bliver ligningen derfor til $0 \equiv 2 \pmod 3$. Der er altså ingen løsninger.

Opgave 9. *Lad k være et positivt heltal. Vis at der eksisterer k på hinanden følgende sammensatte tal.*

Løsningsforslag: Betragt heltallene

$$(k+1)! + 2,\ (k+1)! + 3,\ (k+1)! + 4,\ \ldots,\ (k+1)! + (k+1).$$

De er alle sammensatte da m deler $(k+1)! + m$ når $m \leq k+1$.
Kan også løses med kinesisk restklasse-sætning.

Opgave 10. *Vis at der ikke findes heltal $n > 1$, $m > 1$ og $k > 1$ så $n! = m^k$.* (Hint: se Bertrands postulat nedenfor)

Løsningsforslag: Lad p være det største primtal så $p \leq n$. Ifølge Bertrands postulat eksisterer der et primtal q så $p < q < 2p$, hvilket giver at $n < q < 2p$. Herfra følger at p^2 ikke deler n, og at p^2 ikke deler $n!$. På denne måde kan k ikke være større end 1.

Opgave 11. *Vis at ligningen*

$$x^2 + x + 1 = py$$

har heltalsløsninger for uendeligt mange primtal p

Løsningsforslag: Antag at der kun findes heltalsløsninger for et endeligt antal primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Dan nu tallene $P = p_1 p_2 \ldots p_k$ og $N = P^2 + P + 1$. Ingen af de oprindelige primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$ deler N, så der eksisterer et primtal $p \neq p_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$ og et tal $M \geq 1$ så $N = pM$. Men da parret (P, M) løser ligningen $x^2 + x + 1 = py$ har vi en modstrid.

Et par bemærkninger om fordelingen af primtal

Der findes uendeligt mange primtal. Et klassisk bevis (som Euklid kendte) for dette, går ud på at antage at der kun findes endeligt mange primtal $p_1, p_2, \ldots, p_k$, og så danne et tal $n = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ der ikke kan deles af nogen af disse, og derved nå til en modstrid. Du er velkommen til selv at fylde detaljerne ud.

Men selv om der er uendeligt mange af dem, er primtallene fordelt meget irregulært. Som opgave 9 viser, eksisterer der vilkårligt store huller i fordelingen. På den anden side er det altid muligt at finde intervaller hvori der er mindst et primtal:

Sætning: (Bertrands postulat)

For ethvert helt tal $n > 1$ eksisterer der mindst et primtal p så $n < p < 2n$.

Sætningen er blevet bevist siden Bertrand postulerede den i 1845 (Chebyschef beviste den i 1850), men navnet hænger ved. Vi vil ikke bevise den, men I må gerne bruge den i konkurrencesammenhæng.