

Opgavesæt i diskret matematik

Opgave 1

En mængde M består af n elementer.

Bestem antallet af par af delmængder af M som ikke har nogen elementer tilfælles.

(Tjekkosllovakiet, 73)

Opgave 2

På et 9×9 skakbræt sidder der netop en trænet loppe på hvert felt. Når man fløjter i en speciel loppefløjte, hopper hver loppe over på et felt der netop har et hjørne tilfælles med det felt den kom fra. Efter dette er der nogle felter som er tomme, og nogle felter med flere løpper.

Bestem det minimale antal tomme felter. (New Zealand 2004)

Opgave 3

En binær streng af længde n består af n nuller og 1-taller i rækkefølge. Fx er 0100 og 0010 to forskellige binære strenge af længde 4.

Lad k og n være naturlige tal, lad a_n betegne antallet af binære strenge af længde n som ikke indeholder k på hinanden følgende nuller, og b_{n+1} betegne antallet af binære strenge af længde $n + 1$ som ikke indeholder $k + 1$ på hinanden følgende nuller eller $k + 1$ på hinanden følgende 1-taller.

Vis at $2a_n = b_{n+1}$. (New Zealand 2004)

Opgave 4

I en rektangulær $m \times n$ tabel er der n søjler og m rækker, $n \geq m$. I hver celle står 0 eller 1 på en sådan måde at der ikke findes to identiske rækker.

Bevis at det er muligt at fjerne en søjle således at der stadig ikke findes to identiske rækker.

(New Zealand 2004)

Opgave 5

En ligesidet trekant med sidelængde n inddeles i n^2 ligesidede trekanter med sidelængde en.

Hvor mange linjestykker af længde en hvis endepunkter er hjørner i en trekant, kan farves røde, således at ingen af trekkanterne har tre røde sider? (New Zealand 2004)

Opgave 6

Lad n være et naturligt tal. I et sæt spillekort kan kortene sammenlignes efter n forskellige parametre, og for hver parameter er der tre værdier. Hvert kort antager præcis en af disse tre værdier for hver parameter, og sættet af spillekort indeholder præcis et kort for hver mulig evaluering af de n parametre.

Tre kort kaldes et *set* hvis de for hver parameter har samme karakteristika eller tre forskellige karakteristika.

Vis at hvis antallet af *set* er et kvadrattal, da er $n \equiv 1 \pmod{4}$.

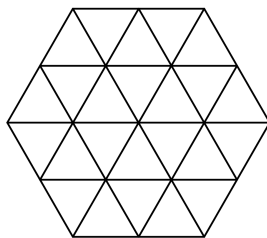
Opgave 7

En graf har n knuder, $n \geq 5$, og $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 2$ kanter.

Vis at grafen indeholder en *butterfly*, dvs. to trekanter med netop et fælles hjørne. (New Zealand 2004)

Opgave 8

En regulær heksagon er inddelt i 24 regulære trekanter som vist på figuren.



Ved hvert af de 19 hjørner skrives et tal således at der ikke er to ens tal. En trekant har nu tilknyttet tre tal, og hvis tallene vokser mod uret, farves trekanten rød, mens hvis de vokser med uret, farves den blå.

Bevis at der findes mindst syv trekanter af hver farve. (New Zealand 2004)

Princippet om inklusion og eksklusion. PIE

Hvis man skal bestemme antallet af elementer i foreningsmængden mellem to mængder A og B , ses det nemt ved et Venn-diagram at $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Tilsvarende ses for tre mængder A , B og C at

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Man inkluderer med andre ord først alt det der er i A og i B og i C , men så har man fået alt det de har tilfælles, med to gange hvis det ligger i to af mængderne, og tre gange hvis det ligger i alle tre mængder. Derfor ekskluderer man nu alt det der ligger i fællesmængden mellem A og B , fællesmængden mellem A og C samt fællesmængden mellem B og C . Nu har man sørget for at alt det der ligger i en eller to af mængderne er regnet med præcis en gang. De elementer der ligger i alle tre mængder, har man imidlertid først taget med tre gange, men derefter fjernet dem tre gange, dvs. vi skal til slut inkludere disse elementer igen.

Generelt gælder:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Formlen bevises ved at se på et element der indgår i præcis k af mængderne. Dette element er talt med

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^k (-1)^k \binom{k}{i} = 1$$

gang.

Opgave 9

Hvor mange permutationer af tallene $1, 2, \dots, n$ er fikspunktsfri dvs. at intet tal afbildes på sig selv?

Opgave 10 (IMO 1989)

Lad S_{2n} være mængden af permutationer af tallene $1, 2, 3, \dots, 2n$. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P hvis der findes et $i \in \{1, 2, 3, \dots, 2n-1\}$, så $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Vis at mere end halvdelen af alle permutationerne i S_{2n} har egenskaben P .