

Løsningsskitser til opgavesæt i diskret matematik

Opgave 1

Først udregner vi mængden af ordnede par af delmængder (A, B) som ikke har nogen elementer tilfælles. Hvert element kan enten ligge i A , i B eller i ingen af de to mængder, dvs. at antallet af ordnede par (A, B) er 3^n . Der er netop et af disse tilfælde hvor A og B er identiske, tilfældet hvor de begge er tomme, dvs. antallet af par af delmængder som ikke har nogen elementer tilfælles, er

$$\frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^n + 1}{2}.$$

Opgave 2

Der er mindst ni tomme felter.

Farv felterne i søjle 2, 4, 6 og 8 sorte og resten af felterne hvide. Når lopperne hopper, hopper de til et felt af modsat farve. Dvs. der vil minimum være ni tomme hvide felter.

Nu viser vi hvordan man opnår ni tomme felter. Feltet i række i og søjle j kaldes $x_{i,j}$. Sæt $X = \{x_{i,j} | i \text{ og } j \text{ har modsat paritet, og det ulige tal er det største}\}$. På alle felterne i X hopper lopperne skråt op mod venstre, og på alle de resterende felter hopper lopperne skråt ned mod højre.

Opgave 3

Vi laver en afbildning fra mængden af binære strenge af længde n til mængden af binære strenge af længde $n + 1$. Strengen $x_1x_2 \dots x_n$ afbildes i $y_0y_1y_2 \dots y_n$ således at $y_0 = 0$ og $y_i = y_{i-1}$ hvis $x_i = 0$, og $y_i \neq y_{i-1}$ hvis $x_i = 1$. Denne afbildning parrer samtlige binære strenge af længde n som ikke indeholder k på hinanden følgende nuller, med samtlige binære strenge af længde $n + 1$ hvis første ciffer er nul, og som ikke indeholder $k + 1$ på hinanden følgende nuller eller 1-taller (overvej). En tilsvarende parring kan laves hvor $y_0 = 1$. Dermed er $2a_n = b_{n+1}$.

Opgave 4

Vi beviser påstanden ved induktion efter antallet af rækker m . Det er let at se at påstanden er sand for $m = 2$. Antag nu at påstanden er sand i tilfældet med m rækker, og betragt tilfældet med $m + 1$ rækker. Først ser vi bort fra nederste række og får derved et skema hvor der mindst er en søjle mere end der er rækker. Derfor kan vi ifølge induktionsantagelsen fjerne to søjler i og j således at de m rækker stadig er forskellige. Vi ser nu igen på den nederste række. Hvis man ser bort fra søjle i og j , findes højst en anden række som denne række er identisk med. Disse to rækker kan ikke være identiske i både søjle i og j , lad os fx uden tab af generalitet antage at de er forskellige i søjle i . Da kan man fra det oprindelige skema fjerne søjle j således at samtlige rækker stadig er forskellige.

Opgave 5

Der er i alt $\frac{3n(n+1)}{2}$ sådanne linjestykker. Det er oplagt at hvis vi farver alle linjestykker i to af de tre retninger røde, da har alle trekanter præcis to røde sider. Det er altså muligt at farve $n(n + 1)$ linjestykker. Betragt alle de trekanter der vender samme vej som den store trekant. Alle de små linjestykker er en side i netop en af disse trekanter, og derfor kan vi højst farve $\frac{2}{3}$ af siderne. Dermed er det maksimale antal $n(n + 1)$.

Opgave 6

Der er i alt 3^n kort. Vi tæller først antallet af ordnede *set*. Der er 3^n måder at vælge første kort på, herefter er der $(3^n - 1)$ måder at vælge andet kort på, og det tredje kort er entydigt bestemt ud fra de to første. Der er altså $3^n(3^n - 1)$ ordnede *set*, dvs. der er $\frac{3^n(3^n - 1)}{6} = 3^{n-1} \frac{3^n - 1}{2}$ forskellige *set*.

Antag nu at antallet af *set* er et kvadrattal. For lige n er dette ikke muligt da potensen af 3 i

primfaktoropløsningen af $3^{n-1} \frac{3^n-1}{2}$ er $n-1$ som er ulige. Dermed er n ulige. Antag at $n \equiv 3 \pmod{4}$. Da er 3^{n-1} et kvadrattal, og derfor må også $\frac{3^n-1}{2}$ være et kvadrattal. Da $3^4 \equiv 1 \pmod{5}$, er $3^n \equiv 3^3 \equiv 2 \pmod{5}$. Vi har nu at $\frac{3^n-1}{2} \equiv 3 \pmod{5}$, hvilket er en modstrid da 3 ikke er kvadratisk rest modulo 5.

Opgave 7

Påstanden vises ved induktion efter antallet af knuder n . Det er nemt at tjekke at påstanden er sand for $n = 5$. Antag at påstanden er sand for alle grafer med $n-1$ knuder, og betragt en graf med n knuder.

Først betragter vi tilfældet $n = 2k$, dvs. $k > 2$. Lad v_{min} være valensen af en knude med minimal valens. Da antallet af kanter er $\lfloor \frac{(2k)^2}{4} \rfloor + 2 = k^2 + 2$, er

$$v_{min} \leq \lfloor \frac{2(k^2 + 2)}{2k} \rfloor = k.$$

Hvis vi fjerner en knude med minimal valens, får vi en graf med $n-1 = 2k-1$ knuder og mindst $k^2 + 2 - k$ kanter, og da $\lfloor \frac{(2k-1)^2}{4} \rfloor + 2 = k^2 + 2 - k$ giver induktionsantagelsen at grafen indeholder en butterfly.

Nu ser vi på tilfældet $n = 2k+1$. I dette tilfælde er antallet af kanter $\lfloor \frac{(2k+1)^2}{4} \rfloor + 2 = k^2 + k + 2$, og dermed

$$v_{min} \leq \lfloor \frac{2(k^2 + k + 2)}{2k+1} \rfloor = k + \lfloor \frac{k+4}{2k+1} \rfloor.$$

Hvis $k > 3$, er $v_{min} = k$, og når vi fjerner en knude med minimal valens, får vi en graf med $n-1 = 2k$ knuder og mindst $k^2 + 2$ kanter, og denne graf indeholder ifølge induktionsantagelsen en butterfly, da $k^2 + 2 = \lfloor \frac{(2k)^2}{4} \rfloor + 2$.

Tilfældet $k = 3$, dvs. $n = 7$ kræver en særlig behandling. I en graf med 7 knuder er der $\lfloor \frac{7^2}{4} \rfloor + 2 = 14$ kanter. Hvis der findes en knude med valens $v = 3$, kan vi fjerne denne knude og opnå en graf med 6 knuder og 11 kanter, og denne indeholder ifølge beviset ovenfor en butterfly. Vi ser derfor kun på tilfældet hvor samtlige knuder har valens 4. Betragt en knude X som er forbundet med fire knuder A, B, C og D . De to knuder som ikke er forbundne med X , betegnes Y og Z . Vi inddeler i to tilfælde alt efter om Y og Z er forbundne eller ej.

Antag at der ikke er en kant mellem Y og Z . Da er de begge forbundet med en kant til A, B, C og D . Nu har vi overblik over de 12 af kanterne, og de to sidste kanter må forbinde A, B, C og D parvis, fx A med B og C med D . Dette giver to trekanter XAB og XCD der netop har en fælles knude.

Antag at Y og Z er forbundet af en kant. Da de er forbundet til i alt 4 knuder, er der mindst en af knuderne A, B, C og D som de begge har en kant tilfælles med, lad os sige A . Knuden A er forbundet til en af knuderne B, C og D , lad os sige B . Dette giver to trekanter AYZ og ABX som netop har et fælles hjørne.

Opgave 8

For hver kant med tallet a i den ene ende og b i den anden ende, $a < b$, betragtes kanten således at a er til venstre og b er til højre, og der sættes en prik lige **over** kanten. Hver trekant indeholder nu en eller to prikker, og hvis den indeholder to prikker, er den rød, og hvis den indeholder en prik, er den blå. Hvis vi betragter de 12 ydre kanter, kan alle de 12 tilhørende prikker ikke alle ligge uden for heksagonen eller alle ligge inden i heksagonen, da der nødvendigvis er et mindste tal tilknyttet de 12 hjørner, og de to tilhørende kanter derfor har en prik inde i heksagonen og en prik uden for heksagonen. Da der er 30 indre kanter, indeholder heksagonen derfor mindst 31 prikker og maksimalt 41 prikker, dvs. der er mindst 7 trekanter med to prikker, dvs. mindst 7 røde trekanter, og mindst 7 trekanter med en prik, dvs. mindst 7 blå trekanter.

Opgave 9

Der er i alt $n!$ permutationer af de n tal. Lad A_i være mængden af permutationer som fikserer elementet i . Antallet af fikspunktsfri permutationer P er da

$$P = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$P = n! - \left(\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \right).$$

Antallet af permutationer som fikser k bestemte tal, er $(n-k)!$, dvs.

$$P = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots (-1)^n \binom{n}{n} 0! = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Opgave 10

Lad A_k , $k = 1, 2, \dots, n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i) = k$ og $\sigma(i+1) = k+n$ eller $\sigma(i) = k+n$ og $\sigma(i+1) = k$. Lad A være mængden af permutationer med egenskaben P . Da er

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n.$$

PIE giver dermed at

$$|A| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Hvis et element er indeholdt i m af mængderne A_1, A_2, \dots, A_n , er det talt med $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} \leq 1$ gange i

$$\sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|.$$

Dermed er

$$|A| \geq \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|.$$

Desuden er $|A_k| = (2n-1)2(2n-2)! = 2(2n-1)!$ og $|A_k \cap A_l| = (2n-2)!2^2$. Det sidste ses på følgende måde. Vi skal vælge to elementer $i, j \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ således at i og $i+1$ afbildes i k og $k+n$, og j og $j+1$ afbildes i l og $l+n$. Dette kan gøres på

$$(2n-1)(2n-2) - 2(2n-2) = (2n-2)(2n-3)$$

måder da vi ikke må vælge i og j som to på hinanden følgende tal. Desuden skal vi vælge om i skal afbildes i k eller $k+n$, og om j skal afbildes i l eller $l+n$. Dette kan gøres på 2^2 måder. For de resterende $2n-4$ elementer er der $(2n-4)!$ muligheder. Dermed er

$$|A| \geq \binom{n}{1} 2(2n-1)! - \binom{n}{2} (2n-2)! 2^2 = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2} = \frac{|S_{2n}|}{2}.$$