Hjemmeopgaver Sorø 2007

Opgave 1. Lad a, b og c være løsningerne til $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.
Vis at $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$.

Opgave 2. En ikke retvinklet trekant T har sidelængderne a, b og c. Trekant T_a har sidelængderne a_1, b og c. Trekant T_b har sidelængderne a, b_1 og c. Trekant T_c har sidelængderne a, b og c_1. Hver af de fire trekanter har areal 1. Yderligere er $a \neq a_1$, $b \neq b_1$ og $c \neq c_1$.
Vis, at der eksisterer en trekant med sidelængderne a_1, b_1 og c_1 og bestem dets areal.

Opgave 3. Bestem de naturlige tal n, som opfylder $\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^{n-1}}}{2}} < 1 - \frac{2}{n}$.

Opgave 4. Lad f være en reel funktion, som for et givet a opfylder $f(a+x) = f(a-x)$ og $f(2a+x) = -f(2a-x)$ for ethvert tal x.
Vis, at $f(-x) = -f(x)$ for ethvert tal x.
Vis. at f er en periodisk funktion.

Opgave 5. Lad $ABCD$ være en indskrivelig firkant, hvori diagonalerne står vinkelret på hinanden i punktet M. Lad N være midtpunktet af AB og P være punktet på den rette linje CD så NP er vinkelret på CD.
Vis, at punkterne M, N og P er kolineære (dvs ligger på samme rette linje).

Opgave 6. Lad n være et givet naturligt tal. Vis:
(i) Hvis der eksisterer et naturligt tal a, $a < n$, så linjen givet ved ligningen $\frac{x}{n} + \frac{y}{n-a} = 1$ indeholder et punkt med positive heltallige koordinater, så er n ikke et primtal.
(ii) Hvis n ikke er et primtal. så eksisterer et naturligt tal a, $a < n$, sådan at linjen med ligning $\frac{x}{n} + \frac{y}{n-a} = 1$ indeholder et punkt med positive heltallige koordinater.

Opgave 7. Følgen $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ er givet ved rekusionsformlen $x_{n+1} = ax_n + b$ for givne tal a og b.
Vis at for $a \neq 1$ er $x_n = a^n(x_0 - \frac{b}{1-a}) + \frac{b}{1-a}$ og for $a = 1$ er $x_n = x_0 + nb$.

Opgave 8. Lad følgen $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ være givet ved rekursionsformlen $x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_2x_n = 0, a_2 \neq 0$, hvor a_1 og a_2 er givne reelle tal. Lad m_1 og m_2 være løsningerne til $x^2 + a_1x + a_2 = 0$.
Vis:
(i) Hvis m_1 og m_2 er forskellige reelle tal så eksisterer reelle tal c_1 og c_2 så $x_n = c_1m_1^n + c_2m_2^n$
(ii) Hvis $m_1 = m_2$ så eksisterer reelle tal c_1 og c_2 så $x_n = c_1m_1^n + c_2nm_2^n$.
Tilføjelse: Hvis m_1 ikke er et reelt tal er det et komplekst tal der kan skrives på formen $r(\cos t + i \sin t)$. Da findes reelle tal c_1 og c_2 så $x_n = c_1r^n \cos nt + c_2r^n \sin nt$.

Opgave 9. Givet en 5×7 ternet papir. Hvad er det mindste antal tern som skal farvelægges, hvis hvert ufarvet tern har præcist ét farvet nabotern (to tern kaldes naboer, hvis de har en fælles kant).