Sorø 2007

Lille opgavesæt i algebra

1. Vis at det reelle tal x er rationalt hvis og kun hvis der findes hele tal a, b og c, hvor $a \neq b$, så $(x+a)(x+b) = (x+c)^2$.

2. Løs ligningen
$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 15\,.$$

3. Bevis uligheden
$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)\,,$$
hvor $x, y, z \geq 0$.

   Hvornår gælder lighedstegnet?

4. Lad $1 < x_1 < 2$, og lad x_n være givet ved $x_n = 1 + x_{n-1} - \frac{1}{2}x_{n-1}^2$ for $n \geq 2$. Vis $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ for $n \geq 3$.

5. En funktion f på de positive hele tal er givet ved
$$f(1) = 1\,, \quad f(2) = 2\,,$$
$$f(n) = f(n - f(n-1)) + f(n-1-f(n-2))\,, \quad n \geq 3\,.$$

   a) Vis at

      (1) $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$ for alle n,

      (2) for ethvert m findes et $n \geq m$ så $f(n+1) - f(n) = 1$,

      (3) $f(n+1) - f(n) = 1$ hvis $f(n)$ er ulige.

   b) Løs ligningen
$$f(n) = 2^{10} + 1\,.$$

(Opgaverne stammer fra kanadiske olympiader).