Sorø 2007

Løsninger til lille opgavesæt i algebra

1. Tilstrækkeligt: Ligningen kan skrives om til

$$(a+b-2c)x = c^2 - ab\,.$$

Hvis der gjaldt $a+b-2c=0$, ville vi have $c^2-ab=((a+b)/2)^2-ab=((a-b)/2)^2=0$ og dermed $a=b$. Altså gælder $a+b-2c\neq 0$, og vi har

$$x = \frac{c^2-ab}{a+b-2c}\,.$$

Her er højre side et rationalt tal.

Nødvendigt: Antag at x er rational, og lad det hele tal a være valgt så $x+a>0$. Sæt $x+a=p/q$, hvor p og q er positive hele tal. Så er ligningen opfyldt for $b=a+2p+pq$ og $c=a+p$. Her er a, b og c hele tal, og der gælder $b>a$ da p og q er positive.

2. Da

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2} = \left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2 + \frac{2x^2}{(x+1)}\,,$$

og

$$x-\frac{x}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}\,,$$

kan ligningen skrives om til

$$\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\frac{x^2}{x+1} = 15\,.$$

Dette er en andengradsligning i $x^2/(x+1)$ med løsningerne

$$\frac{x^2}{x+1}=3 \quad \text{og} \quad \frac{x^2}{x+1}=-5\,.$$

Disse ligninger har løsningerne henholdsvis

$$x=\tfrac{1}{2}(3\pm\sqrt{21}) \quad \text{og} \quad x=\tfrac{1}{2}(-5\pm\sqrt{5})\,.$$

3. Af omskrivningen

$$x(x-z)^2+y(y-z)^2-(x-z)(y-z)(x+y-z)=$$

$$x(x-z)[(x-z)-(y-z)]+y(y-z)[(y-z)-(x-z)]+z(x-z)(y-z)=$$

$$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)$$

ses at differensen mellem ulighedens højre og venstre side er symmetrisk i x, y og z så vi kan antage $x \geq z \geq y$. Venstre side er da større end eller lig med nul, og højre side mindre end eller lig med nul, og uligheden dermed opfyldt.

Når $x \geq z \geq y$, gælder lighedstegnet kun hvis begge sider af uligheden er lig med nul. Da begge led på venstre side er større end eller lig med nul, må de så være lig med nul hver for sig. Begge sider af uligheden er lig med nul for $x = y = z$. Hvis $x > y$, og dermed $x > 0$, er det første led på venstre side kun lig med nul for $z = x$. Hvis dette gælder, er også højre side lig med nul, mens det andet led på venstre side kun er lig med nul hvis $y = 0$. Generelt gælder lighedtegnet altså når x, y og z enten er lige store alle tre, eller to af dem er lige store, og den tredje lig med nul.

4. Da $1 + x - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x-1)^2$ aftager fra $\frac{3}{2}$ til 1 for $1 \leq x \leq 2$, har vi

$$\tfrac{3}{2} > x_2 > 1\,, \quad 1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{11}{8} < x_3 < \tfrac{3}{2}\,.$$

Da $(\frac{11}{8})^2 = \frac{121}{64} < 2 < (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, følger $|x_3 - \sqrt{2}| < \frac{3}{2} - \frac{11}{8} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$.
Vi har

$$1 + x - \tfrac{1}{2}x^2 - \sqrt{2} = x - \sqrt{2} - \tfrac{1}{2}(x^2 - 2) = (x - \sqrt{2})(1 - \tfrac{1}{2}(x + \sqrt{2})) =$$
$$-\tfrac{1}{2}(x + \sqrt{2} - 2)(x - \sqrt{2})\,.$$

Hvis $|x - \sqrt{2}| < \frac{1}{8}$, gælder

$$x + \sqrt{2} - 2 > 2\sqrt{2} - \tfrac{1}{8} - 2 > \tfrac{17}{8} - \tfrac{1}{8} - 2 = 0\,,$$
$$x + \sqrt{2} - 2 < 2\sqrt{2} + \tfrac{1}{8} - 2 < \tfrac{23}{8} + \tfrac{1}{8} - 2 = 1\,,$$

idet $(\frac{17}{8})^2 = \frac{289}{64} < (2\sqrt{2})^2 = 8 = \frac{512}{64} < (\frac{23}{8})^2 = \frac{529}{64}$. Ved induktion følger $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ for $n \geq 4$.

5. a) (1) Vi sætter $n + 1 - f(n) = g(n)$ og $f(g(n)) = h(n)$ og bemærker at rekursionsligningen medfører

$$f(n+1) - f(n) = (h(n) + h(n-1)) - (h(n-1) + h(n-2)) = h(n) - h(n-2)$$

for $n \geq 3$.

Opgavens påstand bevises ved induktion. Da rekursionsligningen giver $f(3) = 2$ og $f(4) = 3$, gælder påstanden for $n \leq 3$. Vi antager at den gælder for $n \leq m$, hvor $m \geq 3$, og vil vise at den så gælder for $n = m + 1$.

For $n \leq m$ medfører induktionsantagelsen at $f(n)$ er et helt tal i intervallet $1 \leq f(n) \leq n$, og at der gælder

$$g(n+1) - g(n) = (n+2-f(n+1)) - (n+1-f(n)) = 1 - (f(n+1) - f(n)) \in \{0, 1\}\,.$$

Da $g(n) = n + 1 - f(n) \geq n + 1 - n = 1$, og $g(n) = n + 1 - f(n) \leq n + 1 - 1 = n \leq m$, følger heraf

$$h(n+1) - h(n) = f(g(n+1)) - f(g(n)) \in \{0, 1\}\,.$$

Der er nu to muligheder:

1) $f(m+1)-f(m)=1$. Heraf følger $g(m+1)-g(m)=1-(f(m+1)-f(m))=0$, altså $g(m+1)=g(m)$, og dermed $h(m+1)=f(g(m+1))=f(g(m))=h(m)$. Vi har så

$$f(m+2)-f(m+1)=h(m+1)-h(m-1)=h(m)-h(m-1)\in\{0,1\}\,.$$

2) $f(m+1)-f(m)=h(m)-h(m-2)=(h(m)-h(m-1))+(h(m-1)-h(m-2))=0$. Da hver af parenteserne er større end eller lig med nul, følger $h(m)=h(m-1)$, og vi har

$$f(m+2)-f(m+1)=h(m+1)-h(m-1)=h(m+1)-h(m)\in\{0,1\}\,.$$

(2) Antag at der findes et positivt helt tal m så $f(n)$ er konstant lig med k for $n\geq m$. Da $m+k+1\geq 1+1+1=3$, har vi så

$$f(m+k+1)=f(m+k+1-f(m+k))+f(m+k-f(m+k-1))=$$

$$f(m+k+1-k)+f(m+k-k)=f(m+1)+f(m)=k+k\neq k\,.$$

Modstrid.

(3) Påstanden er opfyldt for $n\leq 2$. Hvis $n\geq 3$, og $f(n)=h(n-1)+h(n-2)$ er ulige, må der gælde $h(n-1)\neq h(n-2)$ og da $h(n)-h(n-1)\in\{0,1\}$ og $h(n-1)-h(n-2)\in\{0,1\}$, dermed $h(n)\geq h(n-1)>h(n-2)$. Vi har så

$$f(n+1)-f(n)=h(n)-h(n-2)>0\,,$$

hvorefter opgavens påstand følger af $f(n+1)-f(n)\in\{0,1\}$.

b) Det følger af resultaterne ovenfor at ligningen $f(n)=m$ har en entydig løsning for ethvert positivt ulige tal m. Vi vil for $m\geq 3$ vise at løsningen $n=v$ til ligningen $f(n)=2m-1$ kan udtrykkes ved løsningen $n=u$ til ligningen $f(n)=m$.

Da $m\geq 3$ medfører $2m-1\geq 5$, hvilket udelukker $v\leq 2$, har vi $f(v)=h(v-1)+h(v-2)=2m-1$. Heraf og af $h(v-1)-h(v-2)\in\{0,1\}$ følger $h(v-1)=f(g(v-1))=m$. Dette medfører $g(v-1)=v-f(v-1)=u$, hvoraf vi får $v=u+f(v-1)$. Da løsningen $n=v$ er entydig, og $f(v)-f(v-1)\in\{0,1\}$, har vi $f(v-1)=f(v)-1=(2m-1)-1=2m-2$. Alt i alt følger så $v=u+2m-2$.

Vi kan nu vise at ligningen $f(n)=2^k+1$ har løsningen $n=2^{k+1}$ for et vilkårligt positivt helt tal k. Dette er sandt for $k=1$ idet $f(2^2)=f(4)=3=2^1+1$. Antag at $n=2^{k+1}$ er løsning til ligningen $f(n)=2^k+1$. Det følger så af det foregående at løsningen til ligningen $f(n)=2^{k+1}+1=2(2^k+1)-1$ er $n=2^{k+1}+2(2^k+1)-2=2^{k+2}$. Heraf fås det generelle resultat ved induktion.

Specielt har ligningen $f(n)=2^{10}+1$ den entydige løsning $n=2^{11}$.

Bemærkning Funktionen f er givet ved

$$f(n) = \min\{m \mid \phi(m) \geq n\}\,,$$

hvor

$$\phi(m) = 2m - m\text{'s binære tværsum}\,.$$

Med b led på højre side af rekusionsligningen gælder det tilsvarende resultat med

$$\phi(m) = \frac{bm - m\text{'s tværsum i basis } b}{b-1}\,.$$