

IMO-sæt 2

Sorø 2007

Opgave 4

Lad et reelt tal a_0 være givet. Talfølgen a_0, a_1, a_2, \dots er givet ved formlen

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \langle a_i \rangle \quad \text{for } i \geq 0,$$

hvor $\lfloor a_i \rfloor$ betegner det største heltal mindre end eller lig a_i , og $\langle a_i \rangle = a_i - \lfloor a_i \rfloor$.

Bevis at der findes et n sådan at $a_i = a_{i+2}$ for alle $i \geq n$.

Opgave 5

Følgen $f(1), f(2), f(3), \dots$ er defineret ved

$$f(n) = \frac{1}{n} \left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right),$$

hvor $\lfloor x \rfloor$ betegner det største heltal mindre end eller lig x .

- (a) Bevis at $f(n+1) > f(n)$ for uendelig mange n .
- (b) Bevis at $f(n+1) < f(n)$ for uendelig mange n .

Opgave 6

En (n, k) -turnering består af n spillere og k runder sådan at:

1. Alle spillere spiller i hver runde, og to spillere spiller højst mod hinanden én gang.
2. Hvis spiller A møder spiller B i runde i , spiller C møder spiller D i runde i , og spiller A møder spiller C i runde j , så møder spiller B og spiller D hinanden i runde j .

Bestem samtlige par (n, k) for hvilke der findes en (n, k) -turnering.