

# IMO-sæt 1

Sorø 2007

## Opgave 1

Der er stillet  $n \geq 2$  lamper  $L_1, \dots, L_n$  op på en række. Lamperne  $L_1$  og  $L_n$  har således kun en enkelt nabo, mens resten af lamperne har to naboer. Hver lampe er enten tændt eller slukket. Hvert sekund ændrer vi samtidigt alle lampernes tilstand som følger:

Hvis lampen  $L_i$  og dens nabo/naboer er i samme tilstand bliver  $L_i$  slukket. I modsat fald bliver  $L_i$  tændt.

Til at begynde med er alle lamper slukkede, undtagen  $L_1$  der er tændt.

- (a) Bevis at der er uendelig mange  $n$  for hvilke alle lamperne på et tidspunkt vil være slukkede.
- (b) Bevis at der er uendelig mange  $n$  for hvilke der altid vil være mindst en lampe tændt.

## Opgave 2

Lad  $ABCD$  være et trapez med  $AB$  og  $CD$  parallelle således at  $|AB| > |CD|$ . Punkterne  $K$  og  $L$  ligger henholdsvis på linjestykkerne  $AB$  og  $CD$  således at  $|AK|/|KB| = |DL|/|LC|$ . Antag at der findes punkter  $P$  og  $Q$  på linjestykket  $KL$  der opfylder

$$\angle APB = \angle BCD \quad \text{og} \quad \angle CQD = \angle ABC.$$

Bevis at punkterne  $P$ ,  $Q$ ,  $B$  og  $C$  ligger på en cirkel.

## Opgave 3

Find alle heltalsløsninger til ligningen

$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1.$$