Sorø 2004

Opgaver, geometri

1. [Balkan olympiade 1999]. For en given trekant ABC skærer den omskrevne cirkel BC's midtnormal i punkterne D og E, og F og G er spejlbillederne af D og E i BC. Vis at midtpunkterne af ABC's sider og midtpunkterne af AF og AG alle ligger på samme cirkel.

2. [Grossman Memorial Olympiad 1999]. For $n \in \mathbb{N}$ er A_{n+1}, B_{n+1} og C_{n+1} røringspunkterne mellem siderne i trekant $A_nB_nC_n$ og dens indskrevne cirkel. Vis $\angle A_n \to 60^\circ$ for $n \to \infty$.

3. [Canadian Open Mathematics Challenge 2002]. I den spidsvinklede trekant ABC skærer højden fra B cirklen med diameter AC i P og Q og højden fra C cirklen med diameter AB i S og T. Vis at P, Q, S og T ligger på samme cirkel.

4. [Tjekkisk og Slovakisk olympiade 1998]. Givet en cirkel og et punkt A. Vis at de indskrevne trapezer i cirklen hvis forlængede ben mødes i A, har et fælles skæringspunkt for deres diagonaler.

5. [Iransk olympiade 1998-99]. I trekant ABC er AD vinkelhalveringlinje. Cirklen $\mathcal{C}$ går gennem A og rører BC i D. M er skæringspunktet mellem AC og $\mathcal{C}$ og N skæringspunktet mellem BM og $\mathcal{C}$. Vis at AN er median i trekant ABD.

Sorø 2004

Løsninger, geometri

1. Lad K, L, M, P og Q betegne midtpunkterne af henholdsvis BC, AC, AB, AF og AG. Trekant KLM er ligedannet med og vender modsat af trekant ABC, og trekant LMP er ligedannet med og vender samme vej som trekant CBF, som er kongruent med og vender modsat af trekant BCD. Dermed er firkant $KLMP$ ligedannet med firkant $ABCD$. På samme måde ses at firkant $KLMQ$ er ligedannet med firkant $ABCE$. Da A, B, C, D og E ligger på samme cirkel, ligger K, L, M, P og Q så også på samme cirkel.

2. Antag først at A_{n+1} er trekant $A_nB_nC_n$'s indskrevne cirkels røringspunkt med B_nC_n, og tilsvarende B_{n+1} og C_{n+1}. Hvis O er den indskrevne cirkels centrum og D røringpunktet mellem den indskrevne cirkel og siden B_nC_n, har vi $\angle A_{n+1} = \frac{1}{2}\angle B_{n+1}OC_{n+1} = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A_n)$, eller
$$6o^\circ - \angle A_{n+1} = -\tfrac{1}{2}(6o^\circ - \angle A_n)\,.$$
Følgelig
$$\begin{aligned}&\max\{|6o^\circ - \angle A_{n+1}|, |6o^\circ - \angle B_{n+1}|, |6o^\circ - \angle C_{n+1}|\}\\ &= \tfrac{1}{2}\max\{|6o^\circ - \angle A_n|, |6o^\circ - \angle B_n|, |6o^\circ - \angle C_n|\}\,.\end{aligned}$$
Dette gælder stadig efter en vilkårlig ombytning af betegnelsene A_{n+1}, B_{n+1} og C_{n+1}. Heraf følger påstanden.

3. Da korden PQ er vinkelret på diameteren AC, har vi $AP = AQ$. Tilsvarende $AS = AT$. Vi vil vise at der gælder $AP = AS$. P, Q, S og T ligger så alle på samme cirkel med centrum i A.

   Lad D og E betegne fodpunkterne af højderne fra B og C. Da $\angle APC$ er ret, har vi $AP^2 = AD \cdot AC$. Tilsvarende $AS^2 = AE \cdot AB$. Da $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, har vi desuden $AB \cdot AE = AC \cdot AD$. Heraf følger påstanden.

4. Lad trapezet $KLMN$ med $LM \parallel KN$ og $LM < KN$ være indkrevet i cirklen så KL og NM mødes i A, og lad O betegne cirklens centrum og P og Q midtpunkterne af de disjunkte buer KN og LM. Lad endvidere D betegne skæringspunktet mellem diagonalerne KM og LN. De trapezet er spejlsymmetrisk med hensyn til cirklens diagonal PQ, ligger A, D og O alle på PQ eller dens forlængelse. Lad $u = \angle KOP$ og $v = \angle LOQ$. Vi har så $\angle LDA = \angle LDQ = \frac{1}{2}\angle LDM = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\angle LOM + \angle KON) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(2u + 2v) = \frac{1}{2}(u + v)$. Følgelig $\angle OLD = \angle LDA - \angle LOA = \frac{1}{2}(u+v) - v = \frac{1}{2}(u-v) = \angle OAL$. Dermed

er trekanterne OLD og OAL ligedannede, og vi har $OD \cdot OA = OL^2 = r^2$, hvor r er cirklens radius. Det følger heraf at afstanden OD er den samme for alle trapezer med de forudsatte egenskaber.

5. Lad P betegne skæringspunkt mellem BC og AN's forlængelse og Q skæringspunktet mellem AB og $\mathcal{C}$. Da buerne QD og DM er lige store, er QM parallel med BC. Vi har så $\angle ABP = \angle AQM = \angle ANM = \angle BNP$. Dermed er trekanterne ABP og BNP ligedannede, og der gælder $BP^2 = BN \cdot BA$. Da også $PD^2 = BN \cdot BA$, har vi $BP = PD$.

Sorø 2004

Flere opgaver, geometri

1. Vis at hvis to linjer skærer hinanden i punktet A og rører samme cirkel i punkterne B og C, er midtpunktene af de to buer BC centrum for henholdsvis trekant ABC's indskrevne cirkel og trekantens ydre røringscirkel modsat A.

2. [Spansk olympiade 1993]. Punkterne D, E og F på siden BC i trekant ABC opfylder følgende: 1) AD er vinkelhalveringslinje. 2) $BD = CE$. 3) $\angle BAE = \angle CAF$. Vis $BF/CF = (AB/AC)^3$.

3. [Iransk olympiade 1998-99]. $ABCDEF$ er en konveks sekskant med $\angle A+\angle C+\angle E = 360°$ og
$$\frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = 1\,.$$
Vis
$$\frac{BC \cdot AE \cdot FD}{CA \cdot EF \cdot DB} = 1\,.$$

4. [Russisk olympiade 1999]. $ABCD$ er en omskrivelig firkant hvis indskrevne cirkel rører AB i K, BC i L, CD i M og DA i N. $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ og $\mathcal{C}_4$ er de indskrevne cirkler i trekanterne ANK, BKL, CLM og DMN og l_1, l_2, l_3 og l_4 de fælles ydre tangenter til $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_2$ og $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_3$ og $\mathcal{C}_4$ og $\mathcal{C}_4$ og $\mathcal{C}_1$ som ikke er sider i $ABCD$. Vis at l_1, l_2, l_3 og l_4 danner en rombe. [Benyt resultatet fra opgave 1].

Sorø 2004

Flere løsninger, geometri

1. Lad M betegne midtpunktet af buen på samme side af BC som A. Da $\angle ABM = \angle MBC$ og $\angle ACM = \angle MCB$, er M vinkelhalveringernes skæringspunkt i trekant ABC. På tilsvarende måde ses at midtpunktet af buen på den modsatte side af BC er skæringspunktet mellem halveringslinjerne for de ydre vinkler B og C.

2. Lad AD, AE og AF være forlænget til henholdsvis P, Q og S så $BS \parallel AC$, P og Q ligger på samme rette linje gennem C, og $CP \parallel AB$. Vi har så
$$\frac{BF}{CF} = \frac{BS}{AC} = \frac{BS}{CQ} \cdot \frac{CQ}{AB} \cdot \frac{AB}{AC}\,.$$
Da $\triangle ABS \sim \triangle ACQ$, gælder
$$\frac{BS}{CQ} = \frac{AB}{AC}\,.$$
Da $\angle CPA = \angle PAB = \angle PAC$, gælder $CP = AC$. Følgelig
$$\frac{CQ}{AB} = \frac{CE}{BE} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{CP} = \frac{AB}{AC}\,.$$
Alt i alt
$$\frac{BF}{CF} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3\,.$$

3. Da $\angle A + \angle C + \angle E = 360^\circ$, findes der en halvlinje h fra A så $\angle BAh = \angle C$ og $\angle FAh = \angle E$. Vælges P og Q på h så $\angle ABP = \angle CBD$ og $\angle AFQ = \angle EFD$, har vi så $\triangle ABP \sim \triangle CBD$ og $\triangle AFQ \sim \triangle EFD$. Heraf følger
$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AB \cdot AP \cdot AF}{BA \cdot QA \cdot FA} = \frac{AB \cdot CD \cdot EF}{BC \cdot DE \cdot FA} = 1$$
og dermed $P = Q$. Da $BC/BA = BD/BP$ og $\angle CBA = \angle DBP$, har vi $\triangle CBA \sim \triangle DBP$ og tilsvarende $\triangle EFA \sim \triangle DFP$. Følgelig
$$\frac{BC \cdot AE \cdot FD}{CA \cdot EF \cdot DB} = \frac{BD \cdot PD \cdot FD}{DP \cdot DF \cdot DB} = 1\,.$$

4. Ifølge resultatet i opgave 1 er centrene P og Q for $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ midtpunkterne af buerne NK og KL på firkant $ABCD$'s indskrevne cirkel. Ved spejling i PQ's midtnormal afbildes K i midtpunktet S af buen NL. Hvis O er den

indskrevne cirkels centrum, gælder nemlig $\angle NOP = \angle POK = \angle QOS$ og $\angle POS = \angle QOK = \angle LOQ$. Spejlingen kan opnås ved først at spejle i PQ og så dreje $180°$ om PQ's midtpunkt. Ved spejlingen i PQ afbildes AB i l_1, og ved drejningen om midtpunkt afbildes l_1 i en linje m som er parallel med l_1.

Da m rører den indskrevne cirkel i S, er m og dermed l_1 parallel med NL, og O's afstand fra m er lig med cirklens radius r. Da afstanden mellem l_1 og m er lig med summen $r_1 + r_2$ af radierne i $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$, er O's afstand fra l_1 så lig med $r - r_1 - r_2$.

På samme måde indses at l_3 er parallel med NL og O's afstand fra l_3 lig med $r - r_3 - r_4$, hvor r_3 og r_4 er radierne i $\mathcal{C}_3$ og $\mathcal{C}_4$. l_1 og l_3 er så parallelle og deres indbyrdes afstand er lig med $2r - r_1 - r_2 - r_3 - r_4$. Helt tilsvarende indses at l_2 og l_4 er parallelle og deres indbyrdes afstand også lig med $2r - r_1 - r_2 - r_3 - r_4$. Dermed danner l_1, l_2, l_3 og l_4 en rombe.