

# Geometri

Formålet med disse noter er at give en grundig introduktion til geometri med fokus på hvad man har brug for til internationale matematikkonkurrencer. Noterne forudsætter kendskab til grundlæggende viden om vinkler, retvinklede trekanter og ensvinklede trekanter samt trigonometri. I hvert afsnit er der engelske gloser, og til slut er der en oversigt over teorien.

## Indhold

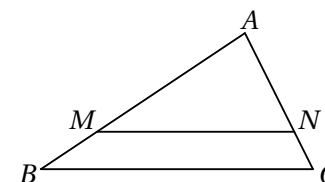
1	Trekantens linjer	1
2	Cirkler og vinkler	4
3	Indskrivelige firkanter	6
4	Ptolemæus'	7
5	Et punkts potens	8
6	Cevas sætning	9
7	Areal og radius i den omskrevne cirkel	11
8	Multiplikation omkring et punkt	13
9	Trekantens ydre røringcirkler	15
10	Radikalakse og radikalcentrum	16
11	Eulerlinjen og Simsonlinjen	19
12	Menelaos sætning	21
13	Inversion	22
14	Oversigt	28
15	Løsningsskitser	30

## 1 Trekantens linjer

De vigtigste linjer i en trekant udover siderne er medianerne, midtnormalerne, vinkelhalveringslinjerne og højderne. De har alle hver deres særlige egenskaber.

### Definition af transversal

En *transversal* i en trekant er et linjestykke der forbinder to punkter på hver sin side i trekanten. En transversal kaldes en *paralleltransversal* hvis den er parallel med en af siderne i trekanten, og en *midtpunktstransversal* hvis den forbinder midtpunkterne af to sider.

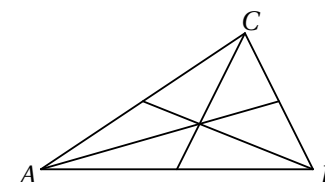


### Sætning om transversaler

En transversal fra punktet  $M$  på siden  $AB$  til punktet  $N$  på siden  $AC$  er en paralleltransversal netop hvis  $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ . At  $MN$  er parallel med  $BC$ , er nemlig ensbetydende med at  $\triangle BAC$  er ensvinklet med  $\triangle MAN$ , hvilket igen er ensbetydende med at  $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$  da de to trekanter har en fælles vinkel  $A$ . En midtpunktstransversal er derfor også en paralleltransversal. At forholdet  $\frac{|AM|}{|AN|}$  er lig med forholdet  $\frac{|AB|}{|AC|}$ , er ensbetydende med at forholdet  $\frac{|AM|}{|AN|}$  er lig med forholdet  $\frac{|MB|}{|NC|}$ . Dette følger af brøkretnereglen der siger at  $\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$  er ensbetydende med at  $\frac{s}{t} = \frac{s-u}{t-v}$  når  $t \neq v$ .

### Definition af median

En *median* er et linjestykke i en trekant der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af modstående side.



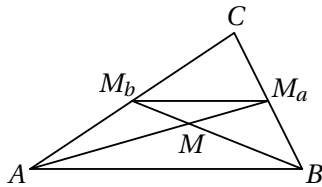
**Sætning om medianer**

De tre medianer i en trekant går igennem samme punkt, og dette punkt deler medianerne i forholdet 1:2.

Medianernes skæringspunkt betegnes normalt  $M$ .

**Bevis**

Lad  $ABC$  være en trekant, og kald medianerne for henholdsvis  $m_a$ ,  $m_b$  og  $m_c$ , og medianernes fodpunkter på siderne  $a$ ,  $b$  og  $c$  for henholdsvis  $M_a$ ,  $M_b$  og  $M_c$ . Medianerne  $m_a$  og  $m_b$  skærer hinanden i et punkt vi kalder  $M$ . Vi vil nu vise at de skærer hinanden i forholdet 1 : 2. Da  $M_a$  og  $M_b$  er midtpunkter på henholdsvis  $BC$  og  $AC$ , er  $M_aM_b$  midtpunktstransversal og dermed parallel med  $AB$ . Dvs. at  $\triangle ABC$  og  $\triangle M_bM_aC$  er ensvinklede med forholdet 1 : 2 og specielt  $2|M_aM_b| = |AB|$ .

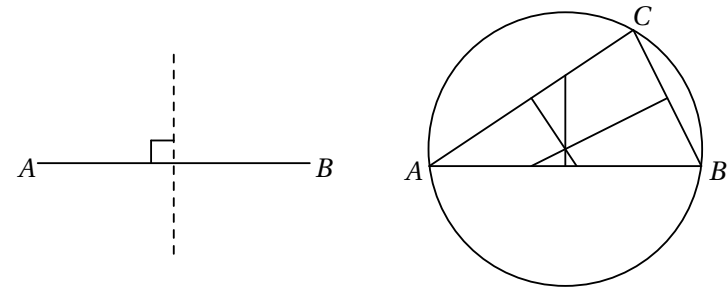


Desuden er trekanterne  $ABM$  og  $M_aM_bM$  ensvinklede da  $M_aM_b$  og  $AB$  er parallelle, og forholdet mellem trekanterne er netop forholdet mellem  $M_aM_b$  og  $AB$  dvs. 1 : 2. Her af ses at  $m_a$  og  $m_b$  deler hinanden i forholdet 1 : 2.

Da  $m_a$  og  $m_b$  var vilkårlige medianer, må  $m_a$  og  $m_c$  også skære hinanden i forholdet 1 : 2, dvs. at alle tre medianer går gennem samme punkt  $M$ .

**Definition af midtnormal**

En *midtnormal* til et linjestykke  $AB$  er det *geometriske sted* for de punkter  $P$  der har samme afstand til  $A$  og  $B$ , altså mængden af punkter  $P$  som opfylder at  $|AP| = |BP|$ . Midtnormalen er dermed en linje som går gennem midtpunktet af linjestykket  $AB$  og står vinkelret på  $AB$ , da det netop er punkterne på denne linje som opfylder betingelsen.



**Sætning om midtnormaler**

I en trekant går de tre midtnormaler gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den *omskrevne cirkel*, dvs. den cirkel som går gennem trekantens tre vinkelspidser.

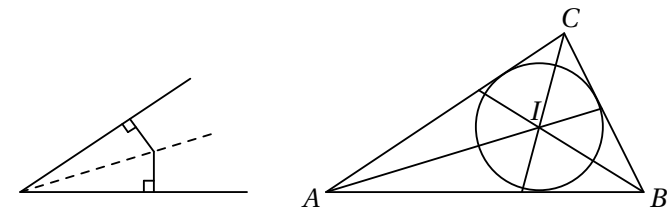
Midtnormalernes skæringspunkt betegnes normalt  $O$ .

**Opgave 1.1** (Om midtnormaler). Bevis ovenstående sætning om midtnormalerne i en trekant.

(*Hint*: Betragt to af midtnormalerne, og vis at deres skæringspunkt ligger i samme afstand til alle tre vinkelspidser i trekanten).

**Definition af vinkelhalveringslinje**

En *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er det *geometriske sted* for de punkter der har samme afstand til vinklens ben. Vinkelhalveringslinjen er altså en linje som deler en vinkel i to lige store vinkler, da det netop er punkterne på denne linje som opfylder betingelsen.



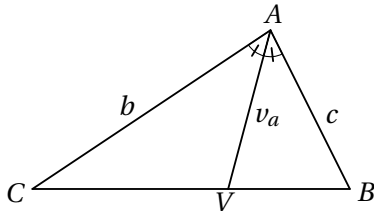
**Sætning om vinkelhalveringslinjer**

I en trekant går de tre vinkelhalveringslinjer gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den *indskevne cirkel*, dvs. den cirkel som tangerer

alle tre sider i trekanten.

Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt betegnes normalt  $I$ .

En vinkelhalveringslinje deler modstående side i trekanten i samme forhold som forholdet mellem vinklens to hosliggende sider,



dvs. hvis fodpunktet for vinkelhalveringslinjen  $v_a$  fra  $A$  til siden  $BC$  betegnes  $V$ , da er

$$\frac{|CV|}{|VB|} = \frac{b}{c}.$$

**Opgave 1.2** (Om vinkelhalveringslinjer). Bevis ovenstående sætning om vinkelhalveringslinjer i en trekant.

(Hint: Første del: Betragt to vinkelhalveringslinjer, og vis at deres skæringspunkt har samme afstand til alle tre sider i trekanten. Anden del: Benyt sinusrelationen på  $\triangle AVC$  og  $\triangle AVB$ .)

**Definition af højde**

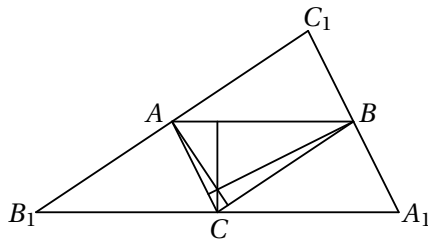
En *højde* i en trekant er en linje der går gennem en vinkelspids og er ortogonal med modstående side.

**Sætning om højder**

I en trekant går højderne gennem samme punkt.

**Bevis**

Tegn linjer gennem henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $C$  som er parallelle med modstående sider.



Firkant  $ACBC_1$  og firkant  $ACA_1B$  er parallellogrammer, dvs. at  $|C_1B| = |AC| = |BA_1|$ . Tilsvarende ses at  $|C_1A| = |AB_1|$  og  $|B_1C| = |CA_1|$ . Højderne i  $\triangle ABC$  er derfor midtnormaler i  $\triangle A_1B_1C_1$ , og de går ifølge sætningen om midtnormaler gennem samme punkt.

**Sætning om areal og radius i den indskrevne cirkel**

I en trekant betegner  $r$  radius i den indskrevne cirkel,  $s$  den halve omkreds og  $T$  arealet. Der gælder at

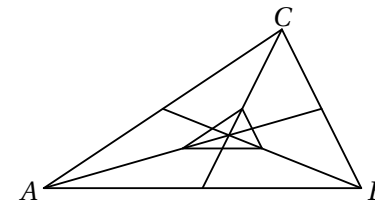
$$T = rs.$$

**Opgave 1.3.** Bevis sætningen om areal og radius i den indskrevne cirkel.

**Opgave 1.4.** Vis at medianerne i en trekant deler trekanten i seks små trekanter med samme areal.

**Opgave 1.5.** I trekant  $ABC$  er  $|AB| = |BC|$ . Punktet  $F$  er et punkt på siden  $AB$ , og punktet  $M$  er et punkt på siden  $AC$  således at  $\angle MBC = \angle FCA$ . Vis at hvis  $|BM| = |FC|$ , da er trekant  $ABC$  ligesidet.

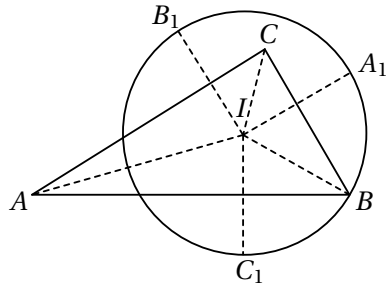
**Opgave 1.6.** I en trekant  $ABC$  med areal 1 indtegnes medianerne. Midtpunktet af medianen  $m_a$  kaldes for  $A'$ , midtpunktet af medianen  $m_b$  kaldes for  $B'$ , og midtpunktet af medianen  $m_c$  kaldes for  $C'$ .



Bestem arealet af trekant  $A'B'C'$ .

**Opgave 1.7.** Lad  $I$  være centrum i den indskrevne cirkel til trekant  $ABC$ , og lad yderligere  $A_1$  og  $A_2$  være to forskellige punkter på linjen gennem  $B$  og  $C$  således at  $|AI| = |A_1I| = |A_2I|$ ,  $B_1$  og  $B_2$  være to forskellige punkter på linjen gennem  $A$  og  $C$  således at  $|BI| = |B_1I| = |B_2I|$ , og  $C_1$  og  $C_2$  være to forskellige punkter på linjen gennem  $A$  og  $B$  således at  $|CI| = |C_1I| = |C_2I|$ . Vis at  $|A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|$  er trekantens omkreds.

**Opgave 1.8.** Lad  $I$  være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt i en trekant  $ABC$ , og lad yderligere  $A_1$ ,  $B_1$  og  $C_1$  være spejlingerne af  $I$  i henholdsvis  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Cirklen gennem  $A_1$ ,  $B_1$  og  $C_1$  går også gennem  $B$ . Bestem vinklen  $\angle ABC$ .



**Opgave 1.9.** Fra vinkelspidsen  $C$  i trekant  $ABC$  tegnes en ret linje der halverer medianen fra  $A$ . I hvilket forhold deler denne linje siden  $AB$ ? (Georg Mohr 1995)

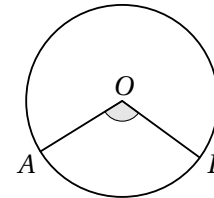
**Gloser**

- ligebenet trekant** *isosceles triangle*
- ligesidet trekant** *equilateral triangle*
- ensvinklede trekanter** *similar triangles*
- transversal** *transversal*
- median** *median*
- medianernes skæringspunkt** *centroid*
- midtnormal** *perpendicular bisector*
- den omskrevne cirkel** *the circumcircle*
- centrum for den omskrevne cirkel** *the circumcenter*
- vinkelhalveringslinje** *angle bisector*
- den indskrevne cirkel** *the incircle*
- centrum for den indskrevne cirkel** *the incenter*
- højde** *altitude*
- højderens skæringspunkt** *orthocenter*
- omkreds** *perimeter*
- linjestykke** *line segment*

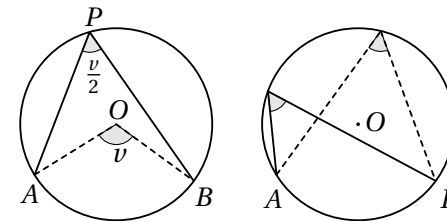
**2 Cirkler og vinkler**

**Definition af centervinkel**

En *centervinkel* er en vinkel der har toppunkt i centrum og radier som vinkelben. En centervinkel måles ved den bue den spænder over. På figuren er  $\angle AOB$  en centervinkel som spænder over buen  $AB$ , og vi skriver  $\angle AOB = \widehat{AB}$ .



**Definition af periferivinkel** En *periferivinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben.



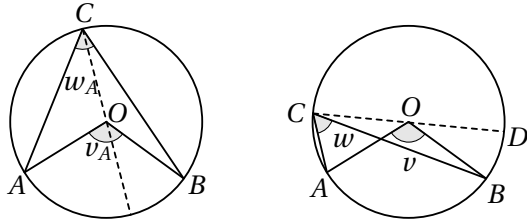
**Sætning om periferivinkler**

En periferivinkel er halvt så stor som den bue den spænder over. Dermed er to periferivinkler som spænder over samme bue, lige store, og en periferivinkel der spænder over en halvcirkel, er ret.

**Bevis**

Lad  $v$  være en centervinkel og  $w$  en periferivinkel der begge spænder over buen  $AB$ . Kald centrum for  $O$  og punktet hvor  $w$  rører periferien, for  $C$ . Antag først at vinkelbenene for vinkel  $v$  kun skærer vinkelbenene for  $w$  i punkterne  $A$  og  $B$ . Da deler diameteren gennem  $C$  vinklerne  $v$  og  $w$  i to vinkler som vi kalder henholdsvis  $v_A$  og  $v_B$  og  $w_A$  og  $w_B$ . Trekant  $AOC$  er nu en ligebenet trekant med to lige store vinkler  $w_A$ , og den sidste vinkel er

$180 - v_A$ . Da vinkelsummen i en trekant er  $180^\circ$ , er  $2w_A = v_A$ . Tilsvarende fås  $2w_B = v_B$ , dvs.  $2w = v$ .



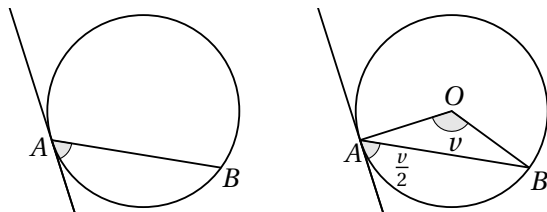
Antag nu at  $w$ 's ene vinkelben  $CB$  skærer  $v$ 's vinkelben  $OA$ . Diameteren gennem  $C$  skærer da yderligere periferien i et punkt vi kalder for  $D$ . Ifølge det vi lige har vist, er  $2\angle BCD = \angle BOD$  og  $2\angle ACD = \angle AOD$ , og dermed

$$2w = 2\angle ACD - 2\angle BCD = \angle AOD - \angle BOD = v.$$

**Opgave 2.1.** I en spidsvinklet trekant  $ABC$  kaldes centrum for den omskrevne cirkel  $O$  og højdernes skæringspunkt for  $H$ . Linjen gennem  $BO$  skærer den omskrevne cirkel i et punkt  $Q$  forskelligt fra  $B$ . Vis at  $AQCH$  er et parallelogram.

**Definition af korde-tangent-vinkel**

En *korde-tangent-vinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og en korde samt en tangent som vinkelben.



**Sætning om korde-tangent-vinkel**

En korde-tangent-vinkel er halvt så stor som den bue korden spænder over.

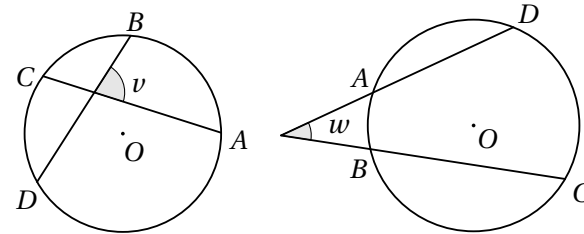
**Opgave 2.2** (Om korde-tangent-vinkler). Bevis sætningen om korde-tangent-vinkler.

(Hint: Husk at  $AO$  står vinkelret på tangenten.)

**Sætning om vinkler i cirkler**

Om vinklerne  $v$  og  $w$  på figurene gælder:

$$v = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} \quad \text{og} \quad w = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}.$$



**Opgave 2.3.** Bevis sætningen.

(Hint: Vinkel  $v$ : Kald skæringen mellem  $AC$  og  $BD$  for  $P$ . Tegn linjestykket  $AD$ , og betragt  $\triangle PAD$  og periferivinkler. Vinkel  $w$ : Tegn linjestykket  $BD$ , og kald vinkelspidsen ved  $w$  for  $P$ . Betragt  $\triangle PBD$  og periferivinkler.)

**Opgave 2.4. Sætning** I en trekant  $ABC$  betegner  $I$  centrum for den indskrevne cirkel, og  $M$  er skæringen mellem  $AI$  og den omskrevne cirkel. Vis at  $M$  er centrum for cirklen gennem  $B, C$  og  $I$ .

**Opgave 2.5.** Lad to cirkler  $C_1$  og  $C_2$  skære hinanden i punkterne  $A$  og  $B$ . Tangenten til  $C_1$  gennem  $B$  skærer  $C_2$  i punktet  $C$ , og tangenten til  $C_2$  gennem  $B$  skærer  $C_1$  i punktet  $D$ . Desuden oplyses at  $|AC| = 3$  og  $|AD| = 4$ . Bestem længden af  $AB$ .

**Gloser**

**ret vinkel** *right angle*

**spids vinkel** *acute angle*

**stump vinkel** *obtuse angle*

**centervinkel** *central angle*

**periferivinkel** *inscribed angle*

**bue** *arc*

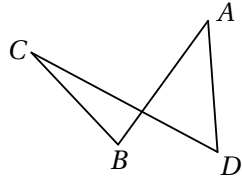
**korde** *chord*

**tangent** *tangent*

### 3 Indskrivelige firkanter

#### Definition af simple firkanter

En firkant kaldes *simpel* hvis dens sider ikke skærer hinanden. I disse noter betegner ordet *firkant* fremover en simpel firkant. Figuren viser et eksempel på en ikke-simpel firkant.



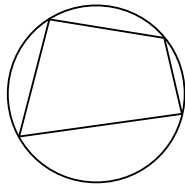
#### Definition af konvekse firkanter

En firkant kaldes *konveks* hvis der for vilkårlige to indre punkter gælder at linjestykket mellem punkterne er indeholdt i firkanten. De konvekse firkanter er altså netop dem der ikke har en vinkel der overstiger  $180^\circ$ .

Generelt defineres en *konveks* figur på tilsvarende måde.

#### Definition af indskrivelige firkanter

En firkant kaldes *indskrivelig* hvis den har en omskreven cirkel.



#### Sætning om indskrivelige firkanter

En firkant er indskrivelig netop hvis summen af modstående vinkler er  $180^\circ$ .

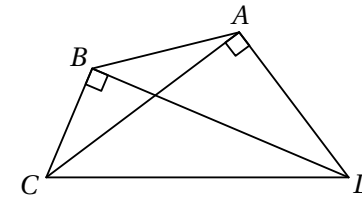
#### Bevis

Antag at en firkant er indskrivelig. To modstående vinkler spænder da tilsammen over hele cirkelperiferien, og summen er derfor  $180^\circ$ .

Antag at det for en given firkant  $ABCD$  gælder at summen af to modstående vinkler er  $180^\circ$ . Betragt nu den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ , og lad

punktet  $E$  være skæringen mellem cirklen og linjen gennem  $C$  og  $D$ . Hvis firkanten er indskrivelig, er  $D$  lig  $E$ . Vi ved at  $\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BCE = \angle BAE$ , dvs. at punktet  $E$  ligger på linjen  $AD$  og derfor er identisk med  $D$ .

**Opgave 3.1. Sætning** Vis at hvis begge diagonaler i en firkant  $ABCD$  står vinkelret på en side, da er firkanten indskrivelig.

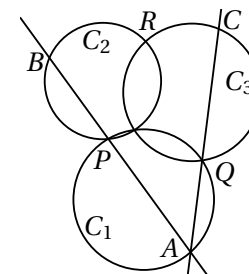


**Opgave 3.2. Sætning** Lad  $H_a$  og  $H_b$  være fodpunkterne for højderne fra henholdsvis  $A$  og  $B$  i trekant  $ABC$ . Vis at firkant  $ABH_aH_b$  er indskrivelig. Vis desuden at  $\triangle CAB$  og  $\triangle CH_aH_b$  er ensvinklede.

**Opgave 3.3. Sætning** Lad  $H_a$ ,  $H_b$  og  $H_c$  være fodpunkterne for højderne fra henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $C$  i trekant  $ABC$ . Vis at  $AH_a$  er vinkelhalveringslinje i  $\triangle H_aH_bH_c$ .

**Opgave 3.4. Sætning** Lad  $H$  være højdernes skæringspunkt i trekant  $ABC$ . Vis at spejlingen af  $H$  i en vilkårlig af trekantens sider ligger på trekantens omskrevne cirkel.

**Opgave 3.5.** Tre cirkler  $C_1$ ,  $C_2$  og  $C_3$  skærer hinanden i et fælles punkt,  $C_1$  og  $C_2$  skærer hinanden i  $P$ ,  $C_1$  og  $C_3$  skærer hinanden i  $Q$ , og  $C_2$  og  $C_3$  skærer hinanden i  $R$ .



Lad  $A$  være et punkt på cirkelbuen  $PQ$  som vist på figuren. Linjen gennem  $A$  og  $P$  skærer cirklen  $C_2$  i punktet  $B$ , og linjen gennem  $A$  og  $Q$  skærer cirklen  $C_3$  i  $C$ . Vis at punkterne  $B$ ,  $C$  og  $R$  ligger på linje.

**Opgave 3.6.** I rektanglet  $ABCD$  er  $M$  midtpunktet af siden  $AB$ , og  $H$  er et punkt på  $DM$  således at  $CH$  står vinkelret på  $DM$ . Vis at trekant  $BCH$  er ligebenet.

**Opgave 3.7.** En firkant  $ABCD$  er indskrevet i en cirkel med  $AB$  som diameter. Lad  $S$  være skæringspunktet mellem diagonalerne  $AC$  og  $BD$ , og lad  $T$  være projektionen af  $S$  på  $AB$ . Vis at linjen  $ST$  halverer vinkel  $\angle CTD$ .

### Gloser

**simpel firkant** *simple quadrilateral*

**konveks firkant** *convex quadrilateral*

**indskrivelig firkant** *cyclic quadrilateral*

**parallelogram** *parallelogram*

## 4 Ptolemæus'

### Ptolemæus' ulighed

For alle firkanter  $ABCD$  gælder Ptolemæus' ulighed

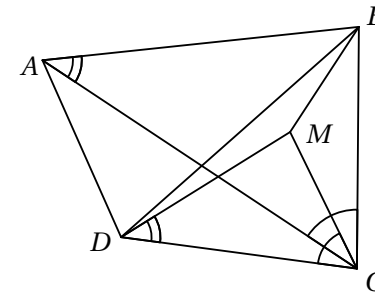
$$|AB||CD| + |BC||DA| \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop hvis firkant  $ABCD$  er indskrivelig.

I de fleste opgaver har man ikke brug for uligheden, men blot at der for indskrivelige firkanter gælder lighedstegn. Dette kaldes *Ptolemæus' sætning*

### Bevis

Givet en firkant  $ABCD$  lad  $M$  være et punkt så trekant  $CDM$  og trekant  $CAB$  er ensvinklede og vender samme vej. Dermed er  $|AB||DC| = |DM||AC|$ .



Pga. konstruktionen er  $\angle BCM = \angle ACD$ . Da trekant  $CDM$  og trekant  $CAB$  er ensvinklede, er  $|CB|/|CM| = |CA|/|CD|$ . Altså er også trekant  $CAD$  og trekant  $CBM$  ensvinklede med  $|AD||CB| = |BM||AC|$ . I alt giver dette

$$|AB||CD| + |BC||DA| = |AC|(|DM| + |MB|) \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop når  $M$  ligger på  $BD$ . Punktet  $M$  ligger på  $BD$  netop når  $\angle CDB = \angle CAB$ , dvs. netop når firkant  $ABCD$  er indskrivelig.

**Opgave 4.1.** En ligesidet trekant  $ABC$  er indskrevet i en cirkel. Lad  $M$  være et vilkårligt punkt på cirkelbuen  $BC$ . Vis at  $|MA| = |MB| + |MC|$ .

**Opgave 4.2.** En firkant  $ABCD$  er indskreven i en cirkel med radius 1,  $|AB| = 1$ ,  $|AC| = \sqrt{2}$  og  $|AD| = 2$ . Bestem  $|BC|$ .

**Opgave 4.3.** Lad  $ABCD$  være et kvadrat, og lad  $P$  være et punkt på cirkelbuen  $AD$  på den omskrevne cirkel til kvadratet. Vis at

$$\frac{|PA| + |PC|}{|PB|}$$

er konstant uanset valget af  $P$ .

**Opgave 4.4.** Lad  $ABCDEFGH$  være en regulær syvkant. Vis at

$$\frac{1}{|AB|} = \frac{1}{|AC|} + \frac{1}{|AD|}.$$

**Gloser**

**Ptolemæus' sætning** *Ptolemy's theorem*

**Ptolemæus' ulighed** *Ptolemy's inequality*

**5 Et punkts potens**

**Definition af et punkts potens**

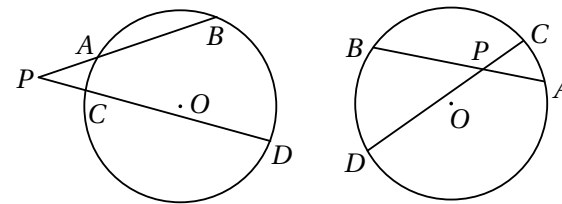
I en given cirkel betegnes centrum  $O$  og radius  $r$ . Et punkt  $P$ 's potens mht. cirklen er tallet

$$|PO|^2 - r^2.$$

Hvis  $P$  ligger på cirkelperiferien, er  $P$ 's potens derfor 0, mens den er positiv hvis  $P$  ligger uden for cirklen, og negativ hvis  $P$  ligger inden for cirklen.

**Sætning om et punkts potens**

I en given cirkel betegnes centrum  $O$  og radius  $r$ . Lad  $P$  være et punkt og  $l$  og  $m$  være to linjer gennem  $P$ , hvor  $l$  skærer cirklen i  $A$  og  $B$ , og  $m$  skærer cirklen i  $C$  og  $D$ . (Hvis en af linjerne tangenter cirklen, er de to punkter sammenfaldende.)



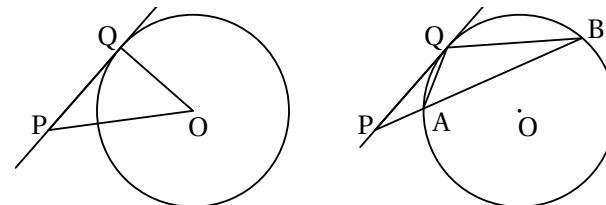
Da gælder at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

Hvis  $P$  ligger uden for cirklen, er  $|AP||BP|$  netop punktets potens mht. cirklen, og hvis  $P$  ligger inden for cirklen, er  $-|AP||BP|$  netop punktets potens.

**Bevis i tilfældet hvor punktet ligger uden for cirklen**

Lad  $P$  være et punkt uden for cirklen, og lad  $l$  være en vilkårlig linje gennem  $P$  som skærer cirklen i punkterne  $A$  og  $B$ . Vi viser først at  $|AP||BP|$  netop er  $P$ 's potens mht. cirklen.



Tegn tangenten til cirklen gennem  $P$  som vist på figuren, og kald røringspunktet for  $Q$ . Ifølge Pythagoras' sætning er  $|PQ|^2 = |PO|^2 - r^2$ .

Betragt nu trekanterne  $AQP$  og  $QBP$ . Korde-tangent-vinklen  $\angle PQA$  er lige så stor som periferivinklen  $\angle PBQ$ , ifølge sætningerne om periferivinkler og korde-tangent-vinkler. Dermed er  $\triangle AQP$  og  $\triangle QBP$  ensvinklede, og dette giver  $|PQ|^2 = |AP||BP|$ . Samlet har vi at  $|AP||BP|$  netop er punktet  $P$ 's potens mht. cirklen.

Lad nu  $m$  være endnu en linje gennem  $P$  som skærer cirklen i punkterne  $C$  og  $D$ . Ifølge det vi netop har vist, må også  $|CP||DP|$  være punktet  $P$ 's potens mht. til cirklen, dvs. at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

**Opgave 5.1** (Om et punkt potens). Bevis sætningen om et punkts potens i det tilfælde hvor punktet ligger inden i cirklen.

(Hint: Tegn linjen gennem  $P$  og centrum, og vis at  $|AP||PB| = (r - |PO|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2$ ).

**Opgave 5.2.** To cirkler skærer hinanden i punkterne  $M$  og  $N$ , og den fælles tangent til de to cirkler nærmest  $N$  rører cirklerne i  $P$  og  $Q$ . Vis at trekant  $PMN$  og trekant  $QMN$  har samme areal.

## Gloser

**et punkts potens** *the power of a point*

## 6 Cevas sætning

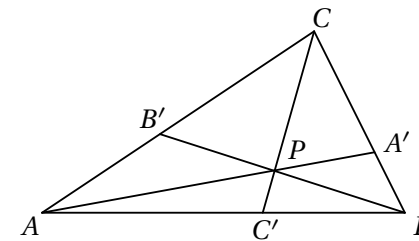
### Definition af cevian

En *cevian* er en linje i en trekant fra en vinkelspids til den modstående side (eller dens forlængelse). Fx er højder, medianer og vinkelhalveringslinjer alle cevianer.

### Cevas sætning

Cevas sætning siger at cevianerne  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CC'$  (hvor  $A'$  ligger på  $BC$  osv.), skærer hinanden i samme punkt, netop hvis

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$



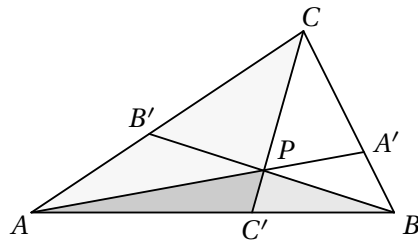
*Bemærkning* Cevas sætning gælder også hvis nogle af cevianerne går fra en vinkelspids til et punkt der ikke ligger på den modstående side men kun dens forlængelse. I dette tilfælde er det dog nødvendigt at regne længderne med fortegn således at positiv retning er  $AB$ ,  $BC$  og  $CA$ . Hvis  $C'$  fx ligger på forlængelsen af  $AB$  tættest på  $B$ , da er  $|C'B|$  negativ.

### Bevis

Her beviser vi kun sætningen i tilfældet hvor alle tre cevianer ligger inden for trekanten. Hvis nogle af cevianerne falder uden for trekanten, foregår beviset stort set på samme måde, men det kræver lidt flere overvejelser undervejs.

Først viser vi at hvis de tre cevianer går gennem samme punkt, så vil

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$



Antag at cevianerne går gennem samme punkt  $P$ . Der gælder at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne det samme som forholdet mellem grundlinjerne. Lad  $T(\triangle ABC)$  betegne arealet af en trekant. Dermed er

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABB')}{T(\triangle CBB')} \quad \text{og} \quad \frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle APB')}{T(\triangle B'PC)}.$$

Samlet får vi

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{T(\triangle ABB') - T(\triangle APB')}{T(\triangle CBB') - T(\triangle B'PC)} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}.$$

Her har vi benyttet brøkregeren der siger at hvis  $\frac{s}{t} = \frac{u}{v}$ , er  $\frac{s}{t} = \frac{s-u}{t-v}$ , når  $t \neq v$ .

Tilsvarende fås

$$\frac{|BC'|}{|C'A|} = \frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \quad \text{og} \quad \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}.$$

Samlet giver dette

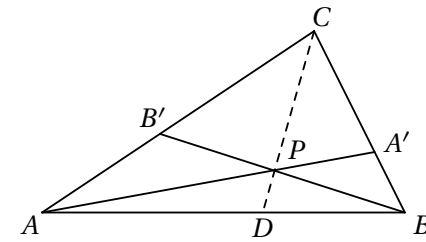
$$\frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)} \cdot \frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \cdot \frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)} = 1.$$

Nu viser vi den modsatte vej.

Antag at

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Kald skæringspunktet mellem  $AA'$  og  $BB'$  for  $P$ , og betragt cevianen  $CD$  fra  $C$  gennem  $P$ .



Da cevianerne  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CD$  går gennem samme punkt, gælder ifølge det vi lige har vist, at

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$

Ifølge vores antagelse er

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1,$$

dvs. at  $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC'|}{|C'B|}$ . Af dette ses at  $D$  og  $C'$  er samme punkt, og dermed at cevianerne  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CC'$  skærer hinanden i samme punkt  $P$ .

**Opgave 6.1.** Før benyttede vi sætningen om midtnormaler til at bevise at højderne skærer hinanden i samme punkt. Benyt nu i stedet Cevas sætning til at bevise dette.

**Opgave 6.2.** I trekant  $ABC$  er  $P$  og  $Q$  punkter på henholdsvis linjestykket  $AB$  og linjestykket  $AC$  således at  $PQ$  er parallel med  $BC$ , og  $X$  er skæringspunktet mellem  $BQ$  og  $CP$ . Vis at  $AX$  deler linjestykket  $BC$  på midten.

**Opgave 6.3. Sætning I** en trekant  $ABC$  tangerer den indskrevne cirkel siderne  $BC$ ,  $AC$  og  $AB$  i henholdsvis  $X$ ,  $Y$  og  $Z$ . Vis at  $AX$ ,  $BY$  og  $CZ$  skærer hinanden i et punkt. (Dette punkt kaldes trekantens Gergonne punkt).

**Opgave 6.4.** I trekant  $ABC$  er  $AD$  vinkelhalveringslinje og  $AH$  højde, og  $P$  og  $Q$  er projektionerne af  $D$  på henholdsvis  $AC$  og  $AB$ . Vis at  $AH$ ,  $BP$  og  $CQ$  skærer hinanden i et punkt.

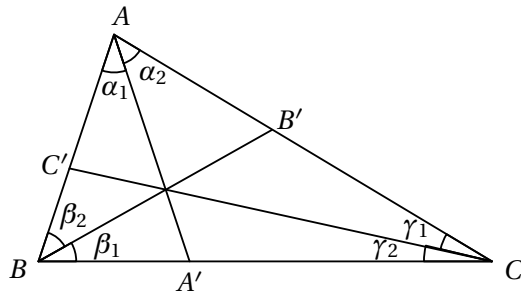
### Cevas sætning med vinkler

Cevas sætning kan også formuleres med de vinkler cevianerne danner med siderne, i stedet for med det forhold de deler siderne i.

Lad  $ABC$  være en trekant og  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CC'$  cevianer i trekanten. Lad  $\alpha_1 = \angle BAA'$ ,  $\alpha_2 = \angle A'AC$ ,  $\beta_1 = \angle CBB'$ ,  $\beta_2 = \angle B'BA$ ,  $\gamma_1 = \angle ACC'$  og  $\gamma_2 = \angle C'CB$ . Vinklerne regnes her med fortegn ligesom længderne i Cevas sætning, dvs. hvis fx  $A'$  ligger på forlængelsen af siden  $BC$  tættest på  $B$ , da er  $\alpha_1$  negativ.

Cevas sætning siger i denne version at cevianerne  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CC'$  skærer hinanden i samme punkt, netop hvis

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1.$$



**Opgave 6.5.** Bevis sætningen.

**Opgave 6.6.** Lad  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CC'$  være tre cevianer i trekant  $ABC$  som skærer hinanden i et fælles punkt. Lad  $A''$  være skæringen mellem  $BC$  og spejlingen af  $AA'$  i vinkelhalveringslinjen til  $A$ , og lad  $B''$  og  $C''$  være defineret tilsvarende. Vis at de tre cevianer  $AA''$ ,  $BB''$  og  $CC''$  skærer hinanden i et punkt.

### Gloser

**cevia** *cevia*

**Cavas sætning** *Ceva's theorem*

## 7 Areal og radius i den omskrevne cirkel

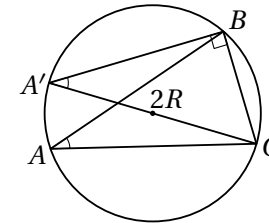
I dette afsnit ser vi på en trekant  $ABC$  hvor  $s$  betegner den halve omkreds,  $r$  er radius i den indskrevne cirkel,  $R$  er radius i den omskrevne cirkel, og  $T$  er arealet med mindre andet er nævnt.

### Sætning om radius i den omskrevne cirkel

Om radius i den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$  gælder

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

**Bevis**



Lad  $AC'$  være diameter i den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ . Da er  $\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}$ . Tilsvarende ses at  $\sin B = \frac{b}{2R}$  og  $\sin C = \frac{c}{2R}$ , og dermed i alt

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

### Sætning om areal og radius i den omskrevne cirkel

Der gælder at

$$4RT = abc.$$

**Bevis**

Ifølge sætningen om radius i den omskrevne cirkel samt sætningen om arealet af en trekant udtrykt ved sinus til en vinkel og længden af de hosliggende sider, er

$$4RT = 2 \cdot 2R \cdot T = 2 \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{2} bc \sin A = abc.$$

**Hérons formel**

Arealet af en trekant kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

**Bevis**

Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at  $4T = 2bc \sin A$ , og ved kvadrering  $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$ . Desuden er  $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ . Samlet giver dette

$$\begin{aligned} 16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\ &= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\ &= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\ &= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\ &= 16s(s-a)(s-b)(s-c). \end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist.

**Brahmaguptas formel**

Arealet af en indskrivelig firkant  $ABCD$  kan tilsvarende beregnes ud fra firkantens sidelængder:

$$T = \sqrt{(s-|AB|)(s-|BC|)(s-|CD|)(s-|DA|)}$$

hvor  $s$  også her betegner den halve omkreds. (Beviset udelades).

**Opgave 7.1.** Firkant  $ABCD$  er indskrevet i en cirkel med radius  $R$ . Diagonalerne står vinkelret på hinanden, og deres skæringspunkt kaldes  $E$ .

Vis at

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = 4R^2.$$

**Opgave 7.2.** Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995)

**Opgave 7.3.** Vis for en trekant  $ABC$  at

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{r}{R} + 1.$$

**Opgave 7.4.** Vis for en trekant  $ABC$  at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

**Gloser**

**Hérons formel** *Heron's formula*

## 8 Multiplikation omkring et punkt

Her gives en kort introduktion til den affine afbildning *multiplikation omkring et punkt* samt eksempler på hvordan denne afbildning kan bruges i løsningen af geometriopgaver. Hvis du ønsker en mere teoretisk indføring i affine afbildninger og deres egenskaber, så se Jens-Søren Andersens noter *Affine transformationer*.

### Definition af multiplikation omkring et punkt

Multiplikation omkring punktet  $O$  med multiplikationsfaktoren  $k$  er en afbildning af planen i sig selv hvor et punkt  $P$  afbildes i punktet  $P'$  så  $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$ . I det følgende ser vi bort fra tilfældet  $k = 0$ .

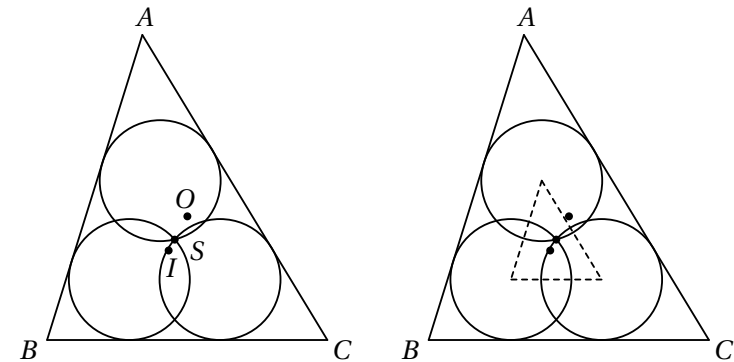
Hvis  $k = 1$  er det blot identitetsafbildningen, mens fx  $k = -1$  giver en drejning på  $180^\circ$  om  $O$ .

### Egenskaber

- Ved multiplikation omkring et punkt afbildes en linje i en linje parallel med linjen.
- Multiplikation omkring et punkt bevarer vinkler
- Alle figurer afbildes i lignedannede figurer.
- For to cirkler med forskellige radier findes netop et punkt og en multiplikation omkring dette med positiv multiplikationsfaktor som afbilder den ene cirkel i den anden. For to cirkler findes netop et punkt og en multiplikation med negativ multiplikationsfaktor som fører den ene cirkel i den anden.
- For to ensvinklede trekanter som ikke er kongruente, og hvor enslydende sider er parallelle, findes netop et punkt og en multiplikation omkring dette som afbilder den ene trekant i den anden.
- Sættningen af to multiplikationer om to punkter, hvor produktet af de to multiplikationsfaktorer ikke er 1, er igen en multiplikation omkring et punkt, og multiplikationsfaktoren er produktet af de to multiplikationsfaktorer.

**Eksempel 1** Multiplikation omkring et punkt kan fx benyttes til at vise at tre punkter ligger på linje ved at vise at en multiplikation omkring et af punkterne kan afbilde det andet punkt i det tredje.

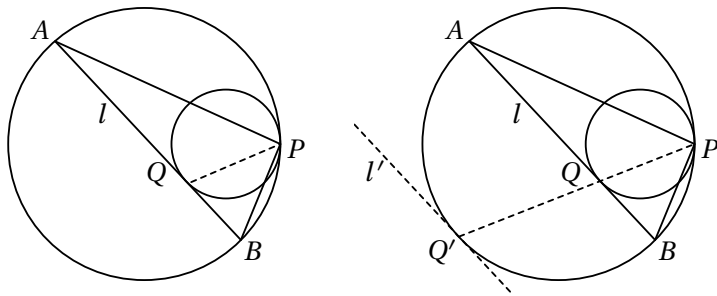
Hvis vi fx betragter tre cirkler med samme radius som skærer hinanden i et fælles punkt  $S$ , og den trekant  $ABC$  der opstår ved at tegne tangenter som vist på figuren, kan vi vise at  $S$  samt centrum  $I$  for den indskrevne cirkel og centrum  $O$  for den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$  ligger på linje.



Trekanten som opstår når man forbinder centrene for de tre cirkler, har parvis parallelle sider med trekant  $ABC$  da de tre cirkler har samme radius. Da  $I$  er skæringen mellem vinkelhalveringslinjerne i trekant  $ABC$ , og de tre centre ligger på disse vinkelhalveringslinjer, må  $I$  være centrum for den multiplikation som afbilder den lille trekant i trekant  $ABC$ . Punktet  $S$  er centrum for den omskrevne cirkel til den lille trekant da de tre cirkler har samme radius, og dermed afbildes  $S$  i  $O$ . Dette viser at  $I$ ,  $S$  og  $O$  ligger på samme linje.

**Eksempel 2** Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise noget om vinkler fx ved at udnytte sætningen om periferivinkler i en cirkel. Betragt en cirkel  $C_1$  som tangerer en cirkel  $C_2$  indvendigt i punktet  $P$ . Lad  $l$  være en tangent til  $C_1$  i et punkt  $Q$  forskelligt fra  $P$ . Linjen  $l$  skærer  $C_2$  i henholdsvis  $A$  og  $B$ . Vi ønsker at vise at  $PQ$  er vinkelhalveringslinje i trekant  $APB$ .

Multiplikationen i  $P$  som fører  $C_1$  i  $C_2$ , fører  $Q$  i  $Q'$  og tangenten  $l$  til  $C_1$  i en tangent  $l'$  til  $C_2$  i punktet  $Q'$ .



Da  $l$  og  $l'$  er parallelle, og  $l'$  er tangent til  $C_2$ , er cirkelbuerne  $AQ'$  og  $BQ'$  lige store. Derfor er  $\angle APQ' = \angle BPQ'$ , og altså  $PQ$  vinkelhalveringslinje i trekant  $APB$ .

**Bemærkning** Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise at nogle punkter ligger på samme cirkel, fx ved at finde en multiplikation som afbilder punkterne i en allerede kendt cirkel. Man kan også vha. af multiplikation omkring et punkt vise at to linjer er parallelle ved at finde en multiplikation der afbilder den ene i den anden, og man kan benytte multiplikation omkring et punkt til at bestemme forholdet mellem forskellige linjestykker ud fra multiplikationsfaktoren. I de følgende opgaver kan du selv prøve kræfter med dette.

**Opgave 8.1.** To cirkler  $C_1$  og  $C_2$  med samme radius tangerer en større cirkel  $C$  indvendigt i henholdsvis  $A_1$  og  $A_2$ . Lad  $M$  være et punkt på  $C$  forskelligt fra  $A_1$  og  $A_2$ , og lad  $B_1$  og  $B_2$  være skæringspunkterne mellem henholdsvis  $MA_1$  og  $C_1$  og mellem  $MA_2$  og  $C_2$ . Vis at  $B_1B_2$  er parallel med  $A_1A_2$ .

**Opgave 8.2.** En cirkel  $C_1$  tangerer en cirkel  $C_2$  indvendigt i punktet  $A$ . En linje  $l$  skærer de to cirkler i punkterne  $M, N, P$  og  $Q$  således at punkterne ligger i nævnte rækkefølge på linjen. Vis at  $\angle MAN = \angle PAQ$ .

**Opgave 8.3.** En cirkel  $C_1$  tangerer en cirkel  $C_2$  indvendigt i punktet  $A$ . Om to forskellige linjer gennem  $A$  gælder oplyses at den ene skærer  $C_1$  og  $C_2$  i henholdsvis  $X_1$  og  $X_2$  og den anden skærer  $C_1$  og  $C_2$  i henholdsvis  $Y_1$  og  $Y_2$ . Linjerne  $X_1Y_2$  og  $X_2Y_1$  skærer hinanden i punktet  $B$ . Vis at hvis  $B$  ligger på  $C_1$ , da tangerer den omskrevne cirkel til  $BX_2Y_2$  cirklen  $C_1$ .

**Opgave 8.4.** Punktet  $P$  er et indre punkt i en spidsvinklet trekant  $ABC$ , og  $X, Y$  og  $Z$  er projektionerne af  $P$  på henholdsvis  $a, b$  og  $c$ . Cirklen gennem

$X, Y$  og  $Z$  skærer henholdsvis  $a, b$  og  $c$  i tre nye punkter  $X_1, Y_1$  og  $Z_1$ . Vis at linjerne gennem henholdsvis  $X_1, Y_1$  og  $Z_1$  vinkelret på henholdsvis  $a, b$  og  $c$  skærer hinanden i et punkt.

**Opgave 8.5.** I en trekant  $ABC$  kaldes midtpunkterne af  $BC, AC$  og  $AB$  for henholdsvis  $M_a, M_b$  og  $M_c$ . Trekant  $ABC$ 's *Spieker centrum* er centrum for den indskrevne cirkel til trekant  $M_aM_bM_c$ . Vis at centrum  $I$  for den indskrevne cirkel til trekant  $ABC$ , medianernes skæringspunkt  $M$  og trekantens *Spieker centrum*  $S$  alle ligger på samme linje.

**Opgave 8.6.** I trekant  $ABC$  kaldes højderens skæringspunkt for  $H$  og fodpunkterne for de tre højder for henholdsvis  $H_a, H_b$  og  $H_c$ . Lad  $M_a, M_b$  og  $M_c$  være midtpunkterne af henholdsvis  $AH, BH$  og  $CH$ . Vis at  $H_a, H_b, H_c, M_a, M_b$  og  $M_c$  ligger på en cirkel. Vis desuden at radius for den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$  er dobbelt så stor som radius for den omskrevne cirkel til trekant  $H_aH_bH_c$ .

**Opgave 8.7.** (IMO 1978) I trekant  $ABC$  er  $|AB| = |AC|$ . En cirkel tangerer siderne  $AB$  og  $AC$  i henholdsvis  $P$  og  $Q$  samt den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$  indvendigt. Vis at midtpunktet af  $PQ$  er centrum for den indskrevne cirkel til trekant  $ABC$ .

## Gloser

**multiplikation omkring et punkt** *homothety*

**multiplikation omkring O med multiplikationsfaktor k** *homothety with center O and ratio k*

## 9 Trekantens ydre røringsskiver

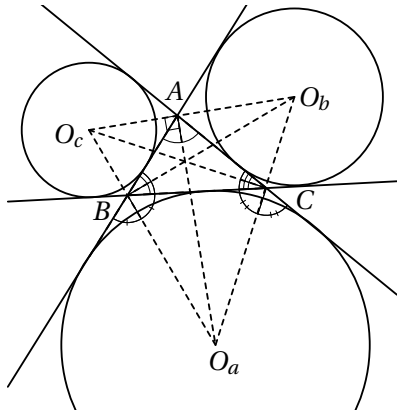
### Definition af trekantens ydre røringsskiver

En trekant  $ABC$  har tre ydre røringsskiver, en for hver side i trekanten. Den ydre røringsskive til siden  $BC$  er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden  $BC$  samt forlængelserne af  $AB$  og  $AC$ .

### Sætning om de ydre røringsskivers centre

Centrum for den ydre røringsskive til siden  $BC$  i trekant  $ABC$  er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel  $A$  og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel  $B$  og  $C$ .

De tre ydre røringsskivers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant  $ABC$  er højder.



### Bevis

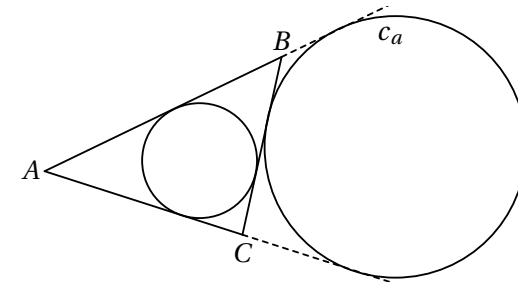
Da den ydre røringsskive til siden  $BC$  tangerer  $BC$  samt forlængelserne af  $AB$  og  $AC$ , må dens centrum ligge i samme afstand til disse tre linjer. Da vinkelhalveringslinjen netop er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til de to vinkelben, må den ydre røringsskives centrum ligge på vinkelhalveringslinjen til vinkel  $A$  samt de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel  $B$  og vinkel  $C$ .

Af dette ses at de ydre røringsskivers centre  $O_a$ ,  $O_b$  og  $O_c$  danner en trekant hvis sider går gennem henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $C$ . Vinkelhalveringslinjen til vinkel  $A$  står vinkelret på siden  $O_bO_c$ , da  $\angle BAO_a = \angle CAO_a$  og  $\angle O_bAC = \angle O_cAB$ .

### Sætning 1 om den ydre røringsskive

Lad  $ABC$  være en trekant,  $s$  den halve omkreds og  $c_a$  den ydre røringsskive til siden  $BC$ . Da gælder at

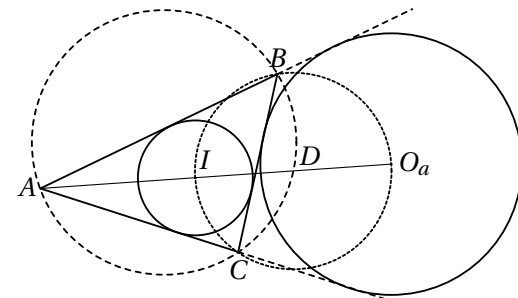
- i) Potensen af  $A$  mht.  $c_a$  er  $s^2$ .
- ii) Røringspunktet mellem  $BC$  og den indskrevne cirkel og røringspunktet mellem  $BC$  og den ydre røringsskive  $c_a$  ligger symmetrisk på linjestykket  $BC$  omkring dets midtpunkt.



**Opgave 9.1.** Vis sætningen.

### Sætning 2 om den ydre røringsskive

Lad  $ABC$  være en trekant,  $I$  centrum for den indskrevne cirkel,  $O_a$  centrum for den ydre røringsskive til siden  $BC$  og  $D$  skæringen mellem den omskrevne cirkel og vinkelhalveringslinjen fra  $A$ . Da gælder



- i) Punkterne  $B$ ,  $I$ ,  $C$  og  $O_a$  ligger på en cirkel med  $D$  som centrum.
- ii) Der gælder at  $|AI||AO_a| = |AB||AC|$ .

**Opgave 9.2.** Vis sætningen.

**Opgave 9.3. Sætning** I trekant  $ABC$  indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringpunkterne for de tre røringcirkler. Vis at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

**Opgave 9.4. Sætning** For en trekant  $ABC$  betegner  $T$  arealet,  $r$  radius i den indskrevne cirkel og  $r_1$ ,  $r_2$  og  $r_3$  radierne i de tre ydre røringcirkler. Vis at  $T^2 = r r_1 r_2 r_3$ .

**Opgave 9.5.** Lad  $I$  være centrum for den indskrevne cirkel i trekant  $ABC$ , og lad  $\Gamma$  være trekantens omskrevne cirkel. Lad linjen  $AI$  skære  $\Gamma$  i et punkt  $D$  forskelligt fra  $A$ . Lad  $E$  være et punkt på cirkelbuen  $CD$  som ikke indeholder  $A$ , og lad  $F$  være et punkt på siden  $BC$  så  $\angle BAF = \angle CAE$ . Lad yderligere  $G$  være midtpunktet af linjestykket  $IF$ . Vis at linjerne  $DG$  og  $EI$  skærer hinanden på  $\Gamma$ . (IMO 2010)

## Gloser

**ydre røringcirkel** *excircle*

**centrum for den ydre røringcirkel** *excenter*

## 10 Radikalakse og radikalcentrum

I kapitlet om punkts potens så vi at et punkt  $P$ 's potens mht. en cirkel med centrum  $O$  og radius  $r$  defineres som tallet  $|OP|^2 - r^2$ . Hvis  $P$  ligger på cirkelperiferien, er  $P$ 's potens derfor 0, mens den er positiv hvis  $P$  ligger uden for cirklen, og negativ hvis  $P$  ligger inden for cirklen. Yderligere så vi at hvis en linje gennem  $P$  skærer cirklen i  $A$  og  $B$  og en anden linje gennem  $P$  skærer cirklen i  $C$  og  $D$  (i begge tilfælde er punkterne sammenfaldende hvis linjen tangerer cirklen), da gælder at  $|AP||BP| = |CP||DP|$ . Hvis  $P$  ligger uden for cirklen, er  $|AP||BP|$  netop punktets potens mht. cirklen, og hvis  $P$  ligger inden for cirklen, er  $-|AP||BP|$  netop punktets potens.

### Definition af radikalakse

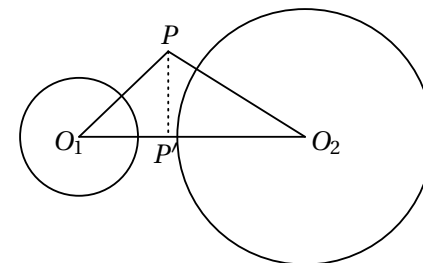
Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

### Sætning om radikalakse

Kald centrum i de to cirkler for henholdsvis  $O_1$  og  $O_2$ , cirklernes radier for henholdsvis  $r_1$  og  $r_2$ , og lad  $d$  betegne afstanden mellem de to centre. Da er radikalaksen en ret linje der står vinkelret på linjen  $O_1O_2$ . Radikalaksens afstand til henholdsvis  $O_1$  og  $O_2$  er  $\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$  og  $\frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}$ . Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter  $A$  og  $B$ , er radikalaksen netop linjen gennem  $A$  og  $B$ .

### Bevis

Lad  $Q$  være punktet på linjen  $O_1O_2$  med  $|QO_1| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}$  og  $|QO_2| = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}$ . (Dette er muligt da  $\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} + \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d} = d$ ).



Antag at  $P$  er et punkt på radikalaksen, og lad  $P'$  være projektionen af  $P$  på  $O_1O_2$ . At  $P$  er et punkt på radikalaksen, er ensbetydende med at

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$

Dette er ensbetydende med at

$$|PP'|^2 + |O_1P'|^2 - r_1^2 = |PP'|^2 + (d - |O_1P'|)^2 - r_2^2,$$

og yderligere at

$$|O_1P'| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Dette er ensbetydende med at  $P' = Q$ , og dermed at  $P$  ligger på linjen gennem  $Q$  vinkelret på  $O_1O_2$ . Vi har dermed vist at radikalaksen netop består af punkterne på denne linje.

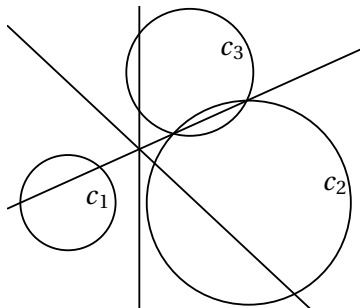
Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter  $A$  og  $B$ , har begge punkter potens nul mht. de to cirkler, og dermed er radikalaksen netop linjen gennem  $A$  og  $B$ .

### Definition af radikalcentrum

Radikalcentrum for tre cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de tre cirkler.

### Sætning om radikalcentrum

For tre cirkler  $c_1$ ,  $c_2$  og  $c_3$  med forskellige centre som ikke alle tre ligger på linje, gælder at radikalakserne for henholdsvis,  $c_1$  og  $c_2$ ,  $c_1$  og  $c_3$  samt  $c_2$  og  $c_3$  skærer hinanden i et punkt, og at dette punkt er deres radikalcentrum.



Hvis de tre centre ligger på linje, er radikalakserne for henholdsvis,  $c_1$  og  $c_2$ ,  $c_1$  og  $c_3$  samt  $c_2$  og  $c_3$  parallelle og evt. sammenfaldende, dvs. i dette tilfælde er deres radikalcentrum den tomme mængde eller en ret linje.

**Bevis.** Hvis de tre centre ikke ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis  $c_1$  og  $c_2$ ,  $c_1$  og  $c_3$  samt  $c_2$  og  $c_3$  parvis ikke er parallelle, samt at radikalcentrum for de tre cirkler pr. definition er indeholdt i fællesmængden af disse radikalakser. Lad  $P$  være skæringspunktet mellem radikalaksen for  $c_1$  og  $c_2$  og radikalaksen for  $c_1$  og  $c_3$ . Dermed er potensen af  $P$  mht.  $c_1$  lig potensen af  $P$  mht.  $c_2$ , og potensen af  $P$  mht.  $c_1$  er lig med potensen af  $P$  mht.  $c_3$ . Altså er potensen af  $P$  mht.  $c_2$  også lig med potensen af  $P$  mht.  $c_3$ , hvilket betyder at  $P$  ligger på radikalaksen for  $c_2$  og  $c_3$ . Dermed går alle tre radikalakser gennem  $P$ , og  $P$  er dermed radikalcentrum for de tre cirkler.

Hvis de tre centre ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis  $c_1$  og  $c_2$ ,  $c_1$  og  $c_3$  samt  $c_2$  og  $c_3$  alle er parallelle. Hvis de ikke alle er sammenfaldende, er radikalcentrum for de tre cirkler den tomme mængde, og hvis de alle er sammenfaldende, er radikalcentrum identisk med den fælles radikalakse.

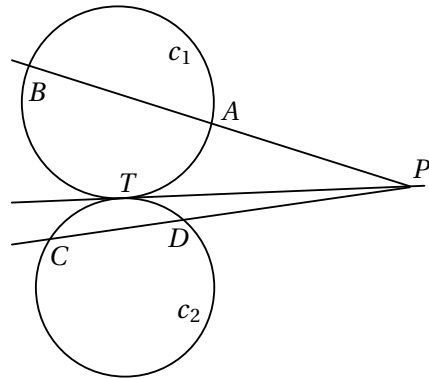
### Degenererede cirkler med radius 0

Både for radikalakse og radikalcentrum giver definitionen også mening hvis en eller flere af cirklerne er en degenereret cirkel med radius 0, og sætningerne gælder også i dette tilfælde.

### Eksempel på anvendelse af radikalakse

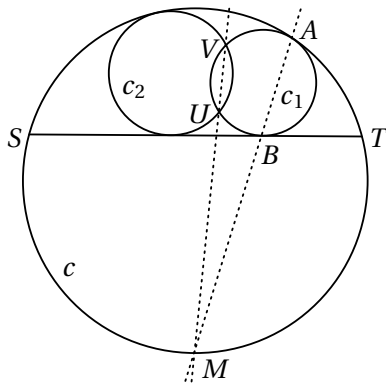
To cirkler  $c_1$  og  $c_2$  tangerer hinanden udvendigt i punktet  $T$ . Lad  $P$  være et punkt på deres fælles tangent gennem  $T$ , og lad  $A$  og  $B$  være to punkter på  $c_1$  så  $A$ ,  $B$  og  $P$  ligger på linje, og lad  $C$  og  $D$  være to punkter på  $c_2$  så  $C$ ,  $D$  og  $P$  ligger på linje. Vi ønsker at vise at  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  ligger på en cirkel.

Kald cirklen gennem  $A$ ,  $B$  og  $C$  for  $c_3$ . Linjen  $TP$  er radikalakse for  $c_1$  og  $c_2$ , og linjen  $AP$  er radikalakse for  $c_1$  og  $c_3$ . Dermed må skæringspunktet  $P$  mellem  $AP$  og  $PT$  ligge på radikalaksen for  $c_2$  og  $c_3$ , dvs. denne radikalakse er  $PC$ . Da radikalaksen yderligere skærer  $c_2$  i  $D$ , må dette punkt også ligge på  $c_3$ . Dermed ligger  $A, B, C$  og  $D$  på en cirkel.



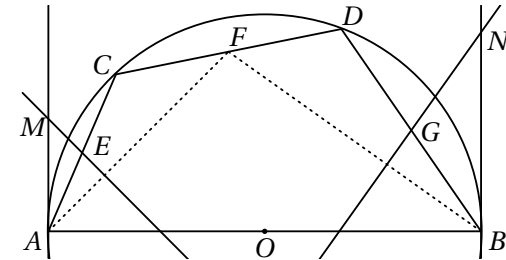
**Opgave 10.1.** Punkterne  $P, Q, R$  og  $S$  ligger på cirklen  $c$  således at  $PQ$  og  $RS$  ikke er parallelle. Lad  $L$  være mængden af punkter  $I$  for hvilke der findes en cirkel  $c_1$  gennem  $P$  og  $Q$  samt en cirkel  $c_2$  gennem  $R$  og  $S$  således at de to cirkler tangerer hinanden i  $I$ . Beskriv punktmængden  $L$ .

**Opgave 10.2.** I en cirkel  $c$  er  $ST$  en korde som afgrænser et cirkelafsnit, og i dette afsnit er der to cirkler  $c_1$  og  $c_2$  som begge tangerer  $c$  og korden  $ST$ , og som skærer hinanden i punkterne  $U$  og  $V$ . Røringspunktet mellem cirklen  $c_1$  og cirklen  $c$  betegnes  $A$ , og røringspunktet mellem cirklen  $c_1$  og korden  $ST$  betegnes  $B$ . Lad  $M$  være midtpunktet af cirkelbuen  $ST$  modsat det nævnte cirkelafsnit.



- i) Vis at  $A, B$  og  $M$  ligger på linje.
- ii) Vis at  $|MA||MB| = |MT|^2$ .
- iii) Vis at  $U, V$  og  $M$  ligger på linje.

**Opgave 10.3.** Lad  $AB$  være diameter i halvcirklen  $c$  med centrum  $O$ , og  $C$  og  $D$  to punkter på  $c$  således at  $A, C, D$  og  $B$  er fire forskellige punkter der ligger på  $c$  i den nævnte rækkefølge. Midtpunkterne af henholdsvis  $AC, CD$  og  $DB$  betegnes  $E, F$  og  $G$ . Linjen gennem  $E$  vinkelret på  $AF$  skærer tangenten til  $c$  i  $A$  i punktet  $M$ , og linjen gennem  $G$  vinkelret på  $FB$  skærer tangenten til  $c$  i  $B$  i punktet  $N$ . Lad cirklerne  $c_1, c_2$  og  $c_3$  have henholdsvis  $AO, BO$  og  $EG$  som diameter.



- i) Bevis at radikalaksen for  $c_1$  og  $c_3$  er  $ME$ , samt at radikalaksen for  $c_2$  og  $c_3$  er  $NG$ .
- ii) Find radikalcentrum for  $c, c_1$  og  $c_3$  samt radikalcentrum for  $c, c_2$  og  $c_3$ .
- iii) Vis at  $MN$  er parallel med  $CD$ .

**Opgave 10.4.** Lad  $ABC$  være en trekant. Den indskrevne cirkel  $c$  i trekanten rører siderne  $AB$  og  $AC$  i henholdsvis punkterne  $Z$  og  $Y$ . Lad  $G$  være skæringspunktet mellem  $BY$  og  $CZ$ , og lad  $R$  og  $S$  være punkter så firkanterne  $BCYR$  og  $BCSZ$  er parallelogrammer. Lad desuden  $s$  være den degenererede cirkel med centrum  $S$  og radius 0, og lad  $c_a$  være den ydre røringcirkel til siden  $BC$ .

i) Vis at  $CZ$  er radikalakse for  $s$  og  $c_a$ .

ii) Vis at  $|GR| = |GS|$ .

(Variation af opgave fra IMO 2009 shortlist)

### Gloser

**radikalakse** *radical axis/power line*

**radikalcentrum** *radical center*

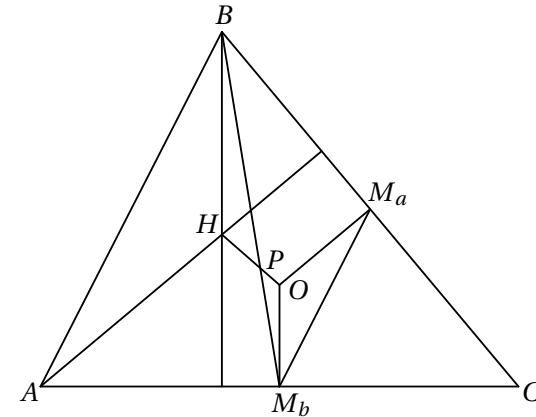
## 11 Eulerlinjen og Simsonlinjen

### Sætning om Eulerlinjen

I en trekant  $ABC$  kaldes medianernes skæringspunkt som sædvanligt  $M$ , højdernes skæringspunkt  $H$  og midtnormalernes skæringspunkt  $O$ . Punkterne  $H$ ,  $M$  og  $O$  ligger på en ret linje som kaldes Eulerlinjen, og  $M$  deler  $HO$  således at  $2|MO| = |MH|$ .

### Bevis

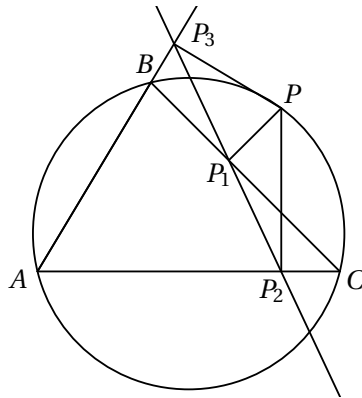
Kald midtpunkterne af  $BC$  og  $AC$  for henholdsvis  $M_a$  og  $M_b$ , og skæringspunktet mellem  $BM_b$  og  $HO$  for  $P$ . Vi ønsker at vise at  $P = M$  samt at  $2|OM| = |HM|$ .



Da  $AB$  er parallel med midtpunktstransversalen  $M_aM_b$ ,  $OM_b$  er parallel med  $BH$  da de begge står vinkelret på  $AC$ , og  $OM_a$  er parallel med  $AH$  da de begge står vinkelret på  $BC$ , er trekanten  $ABH$  og  $M_aM_bO$  ensvinklede med forholdet  $2 : 1$ . Desuden er trekant  $OPM_b$  ensvinklet med trekant  $HPB$  med samme forhold. Dermed er  $2|M_bP| = |PB|$ , og heraf ses det ønskede nemlig at  $P = M$  og  $2|MO| = |MH|$ .

### Sætning om Simsonlinjen

Lad  $P$  være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ ,  $P_1$  projektionen af  $P$  på linjen  $BC$ ,  $P_2$  projektionen af  $P$  på linjen  $AC$  og  $P_3$  projektionen af  $P$  på linjen  $AB$ .



Da ligger punkterne  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$  på en ret linje, og denne linje kaldes Simsonlinjen.

**Opgave 11.1** (Om Simsonlinjen). Bevis sætningen.

*Hint:* Vis at firkanterne  $PCP_2P_1$ ,  $PP_3BP_1$  og  $PP_2AP_3$  er indskrivelige, og udnyt dette til at vise at  $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$ .

### Den omvendte Simson

Lad  $ABC$  være en trekant,  $P$  et punkt og  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$  projektionerne af  $P$  på henholdsvis  $BC$ ,  $AC$  og  $AB$ . Hvis punkterne  $P_1$ ,  $P_2$  og  $P_3$  ligger på en ret linje, da ligger  $P$  på den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ . (Beviset udledes).

**Opgave 11.2.** Lad  $ABC$  være en trekant hvor  $D$ ,  $E$  og  $F$  er fodpunkterne for højderne på henholdsvis  $BC$ ,  $AC$  og  $AB$ . Lad yderligere  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  og  $N$  være projekterne af  $D$  på henholdsvis  $AB$ ,  $AC$ ,  $BE$  og  $CF$ . Vis at punkterne  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  og  $N$  ligger på linje.

**Opgave 11.3.** I planen er givet fire ikke-parallele linjer således at der ikke er tre som går gennem samme punkt. Hver trippel af linjer danner en trekant, dvs linjerne danner i alt fire trekanter, og hver af disse trekanter har en omskreven cirkel. Vis at de fire omskrevne cirkler har et fælles punkt.

**Opgave 11.4.** Betragt fem punkter  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  og  $E$  sådan at firkant  $ABCD$  er et parallelogram, og firkant  $BCED$  har en omskreven cirkel. Lad  $l$  være en linje gennem  $A$ . Antag at  $l$  skærer det indre af linjestykket  $DC$  i  $F$  og linjen  $BC$  i  $G$ . Antag derudover at  $|EF| = |EG| = |EC|$ . Bevis at  $l$  er vinkelhalveringslinje for vinkel  $DAB$ .

*Hint:* Benyt resultatet om Simsonlinjen til at vise at projektionen af  $E$  på linjen  $BD$  netop er skæringspunktet mellem diagonalerne i firkant  $ABCD$ . (IMO 2007)

### Gloser

**Eulerlinje** *Euler line*

**Simsonlinje** *Simson line*

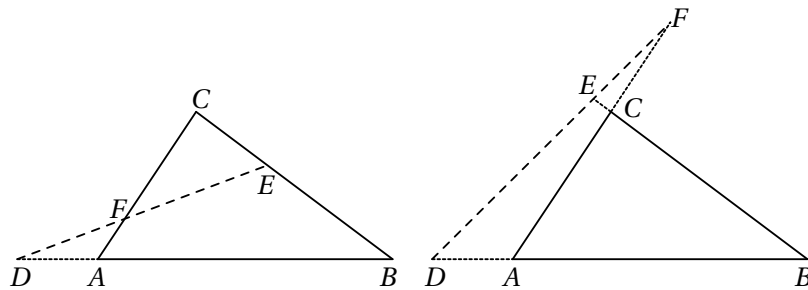
## 12 Menelaos sætning

### Menelaos sætning

Lad  $ABC$  være en trekant. Menelaos' sætning siger at tre punkter  $D$ ,  $E$  og  $F$ , som ligger på henholdsvis linjen  $AB$ , linjen  $BC$  og linjen  $CA$ , ligger på samme linje netop hvis

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1.$$

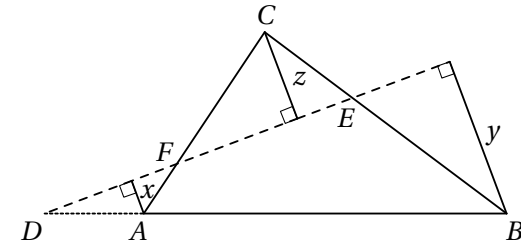
Her regnes linjestykkerne ligesom ved Cevas sætning med fortegn således at positiv retning er  $AB$ ,  $BC$  og  $CA$ . Hvis  $D$  fx ligger på forlængelsen af  $AB$  tættest på  $A$  som på figuren, da er  $|AD|$  negativ.



**Bevis** Antag først at punkterne  $D$ ,  $E$  og  $F$  ligger på samme linje. Bemærk at da denne linje skærer trekanten nul eller to gange, vil der i udtrykket

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|}$$

være enten en eller tre længder med negativt fortegn, dvs. udtrykket er altid negativt. Hvis vi kun regner med positive længder, er det derfor nok at vise at udtrykket er lig med 1. Lad  $x$  være længden af projektionen fra  $A$  på linjen  $DEF$ ,  $y$  længden af projektionen fra  $B$  på linjen  $DEF$  og  $z$  længden af projektionen fra  $C$  på linjen  $DEF$ , som vist på figuren.



Pga. ensvinklede trekanter er

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{x}{y}, \quad \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{y}{z} \quad \text{og} \quad \frac{|CF|}{|FA|} = \frac{z}{x},$$

og dette er uafhængigt af om linjen  $DEF$  skærer trekanten to eller nul gange. Dermed er

$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1,$$

når vi regner med fortegn.

Antag omvendt at der om  $D$ ,  $E$  og  $F$  gælder at

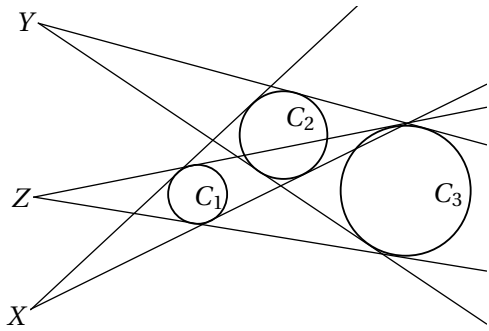
$$\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1.$$

Lad  $D'$  være skæringspunktet mellem  $EF$  og  $AB$ . Da ved vi fra før at

$$\frac{|AD'|}{|D'B|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1,$$

og dermed må  $D = D'$ , dvs. at  $D$ ,  $E$  og  $F$  ligger på linje.

**Opgave 12.1.** (Monges sætning) Lad  $C_1$ ,  $C_2$  og  $C_3$  være cirkler som ikke rører hinanden, og som har forskellige radier. Lad  $X$  være skæringspunktet mellem de to tangenter til  $C_1$  og  $C_2$  som har cirklerne på samme side af tangenten, lad tilsvarende  $Y$  være skæringspunktet mellem de to tangenter til  $C_2$  og  $C_3$  som har cirklerne på samme side af tangenten, og  $Z$  være skæringspunktet mellem de to tangenter til  $C_1$  og  $C_3$  som har cirklerne på samme side af tangenten.



Vis at punkterne  $X$ ,  $Y$  og  $Z$  ligger på linje.

**Opgave 12.2.** (Monge-d'Alemberts sætning) Lad  $C_1$ ,  $C_2$  og  $C_3$  være cirkler som ikke rører hinanden, og som har forskellige radier. Lad  $X$  være skæringspunktet mellem de to tangenter til  $C_1$  og  $C_2$  som har cirklerne på samme side af tangenten, lad  $Y$  være skæringspunktet mellem de to tangenter til  $C_2$  og  $C_3$  som har cirklerne på hver sin side af tangenten, og  $Z$  være skæringspunktet mellem de to tangenter til  $C_1$  og  $C_3$  som har cirklerne på hver sin side af tangenten. Vis at punkterne  $X$ ,  $Y$  og  $Z$  ligger på linje.

## Gloser

**Menelaos sætning** *Menelaus' Theorem*

## 13 Inversion

Inversion er en bestemt type transformation af planen, og ved at benytte transformation på en geometrisk problemstilling omformer man problemstillingen til en anden ækvivalent problemstilling. Inversion er derfor et interessant redskab i nogle typer geometriopgaver. Disse kapitel er en indføring i inversion, de centrale egenskaber ved inversion samt hvordan man kan benytte inversion.

### Inversion

Lad  $C$  være en cirkel med centrum  $O$  og radius  $r$ . Inversion i denne cirkel er en afbildning af planen, fra regnet punktet  $O$ , på sig selv. Et punkt  $A$ ,  $A \neq O$ , afbildes i det punkt  $A'$  som ligger på halvlinjen fra  $O$  gennem  $A$ , og som opfylder at  $|OA||OA'| = r^2$ .

Det er oplagt at inversionsafbildningen er sin egen inverse, og den er desuden kontinuert hvilket vi ikke vil komme nærmere ind på her. Bemærk at afbildningen fikserer cirklen  $C$  og afbilder dens indre på dens ydre og omvendt. Deraf navnet.

Det interessante ved inversion er at den afbilder linjer og cirkler i linjer og cirkler, samt at den bevarer vinkler mellem kurver, hvilket vi skal se nærmere på når det drejer sig om linjer og cirkler.

Man kan på helt tilsvarende vis definere inversion i en kugle i rummet.

I det følgende ser vi på inversion i en cirkel med centrum  $O$  og radius  $r$ , og vi betegner billedet af et punkt  $A$  med  $A'$ , billedet af en cirkel  $\alpha$  med  $\alpha'$ , osv.

### Sætning om vinkler og afstande

To punkter  $A$  og  $B$ , begge forskellige fra  $O$ , afbildes i punkterne  $A'$  og  $B'$  således at

$$\angle OA'B' = \angle OBA \quad \text{og} \quad |A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|} |AB|.$$

### Bevis

Vi viser at  $\triangle OAB$  er envinklet med  $\triangle OB'A'$  med forholdet  $\frac{r^2}{|OA||OB|}$  da det viser sætningen.

Først bemærker vi at  $\angle AOB = \angle A'OB'$ . Desuden er

$$|OA'| = \frac{r^2}{|AO|} = \frac{r^2}{|OA||OB|} |OB| \text{ og tilsvarende } |OB'| = \frac{r^2}{|OA||OB|} |OA|,$$

hvilket giver det ønskede.

### Sætning om linjer og cirkler

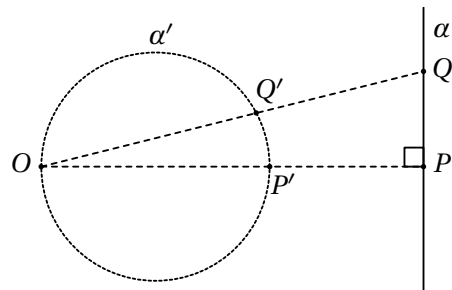
Inversion afbilder som sagt linjer og cirkler i linjer og cirkler. Mere præcist gælder

- En linje gennem  $O$  afbildes på sig selv.
- En linje som ikke går gennem  $O$ , afbildes på en cirkel gennem  $O$  hvis tangent i  $O$  er parallel med linjen.
- En cirkel gennem  $O$  afbildes på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i  $O$ .
- En cirkel som ikke går gennem  $O$ , afbildes på en cirkel som ikke går gennem  $O$ .

### Bevis

En linje gennem  $O$  afbildes oplagt på sig selv.

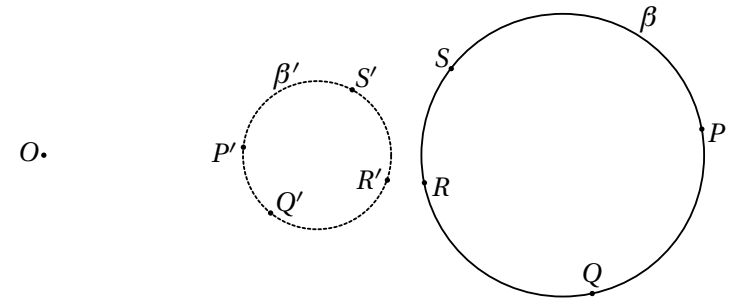
Lad  $\alpha$  være en linje som ikke går gennem  $O$ , og betragt projektionen  $P$  af  $O$  på  $\alpha$ .



Påstanden er nu at  $\alpha'$  er cirklen med diameter  $OP'$ . Lad  $Q$  være et punkt på  $\alpha$ . Da gælder at  $\angle OQ'P' = \angle OPQ = 90^\circ$ , dvs. at  $Q'$  ligger på cirklen med diameter  $OP'$ . Der gælder dermed at  $\alpha$  afbildes på en cirkel gennem  $O$  hvis

tangent i  $O$  er parallel med  $\alpha$ . Tilsvarende afbildes en cirkel gennem  $O$  på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i  $O$ .

Lad  $\beta$  være en cirkel som ikke går gennem  $O$ , og som indeholder punkterne  $P, Q$  og  $R$ . Vi vil nu vise at  $\beta$  afbildes på cirklen gennem  $P', Q'$  og  $R'$ . I det følgende regner vi med orienterede vinkler.



Lad  $S$  være et punkt på  $\beta$  som ligger mellem  $R$  og  $P$ . Vi ønsker at vise at  $\angle S'P'Q' + \angle Q'R'S' = 180^\circ$  da dette giver at  $S'$  ligger på cirklen gennem  $P', Q'$  og  $R'$ . Der gælder at

$$\angle Q'R'S' = \angle OR'S' - \angle OR'Q' = \angle OSR - \angle OQR,$$

og tilsvarende fås

$$\angle S'P'Q' = \angle OQP - \angle OSP.$$

Samlet giver dette

$$\begin{aligned} \angle S'P'Q' + \angle Q'R'S' &= \angle OSR - \angle OSP + \angle OQP - \angle OQR \\ &= \angle PSR + \angle RQP = 180^\circ. \end{aligned}$$

Dette viser at en cirkel som ikke går gennem  $O$ , afbildes i en cirkel som ikke går gennem  $O$ .

Det er vigtigt at bemærke at hvis  $\alpha$  er en cirkel som ikke går gennem  $O$ , da er billedet af centrum som oftest ikke centrum i  $\alpha'$ .

Nu vil vi vise at vinkler mellem linjer og cirkler bevares ved inversion, men først beviser vi at tangens mellem linjer og cirkler bevares ved inversion.

### Sætning om tangens mellem linjer og cirkler

En linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i punktet  $P$ ,  $P \neq O$ , afbildes ved inversion på en linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i  $P'$ .

#### Bevis

Da antallet af skæringspunkter forskellig fra  $O$  bevares ved inversion, følger det let.

**Opgave 13.1.** Lad  $\alpha$  være en cirkel som ikke går gennem  $O$ . Vis at centrum af  $\alpha$ , centrum af  $\alpha'$  og  $O$  ligger på linje.

**Opgave 13.2.** Lad  $ABC$  være en trekant, og lad  $s$  betegne den halve omkreds. Vis at den ydre røringcirkel til siden  $c$  afbildes på sig selv ved inversion i en cirkel med centrum  $C$  og radius  $s$ .

### Sætning om at vinkler bevares ved inversion

Vinklen mellem to linjer, en linje og en cirkel samt to cirkler bevares ved inversion.

#### Bevis

Hvis to linjer skærer i punktet  $O$  bevares vinklen oplagt ved inversion.

Lad  $\alpha$  og  $\beta$  være to linjer som skærer hinanden i  $P$ ,  $P \neq O$ . Da vil  $\alpha'$  og  $\beta'$  have netop to skæringspunkter  $P'$  og  $O$ . Vinklen mellem  $\alpha'$  og  $\beta'$  i  $P'$  vil være identisk med vinklen mellem dem i  $O$ . Da en linje gennem  $O$  afbildes på sig selv, og en linje der ikke går gennem  $O$ , afbildes på en cirkel gennem  $O$  hvis tangent i  $O$  er parallel med linjen, vil vinklen mellem  $\alpha'$  og  $\beta'$  i  $O$  være identisk med vinklen mellem  $\alpha$  og  $\beta$  i  $P$ .

Lad  $\alpha$  være en linje og  $\beta$  en cirkel som skærer hinanden i  $P$ ,  $P \neq O$ . Lad  $\gamma$  være tangenten til  $\beta$  i  $P$ . Da er vinklen mellem  $\alpha$  og  $\beta$  i  $P$  lig med vinklen mellem  $\alpha$  og  $\gamma$  i  $P$  som ifølge det vi lige har vist er identisk med vinklen mellem  $\alpha'$  og  $\gamma'$  i  $P'$  som er lig med vinklen mellem  $\alpha'$  og  $\beta'$  i  $P'$  da tangens bevares ved inversion.

På tilsvarende vis ses at vinklen mellem to cirkler bevares ved inversion.

**Opgave 13.3.** I en trekant  $ABC$  kaldes røringpunkterne mellem den indskrevne cirkel og siden  $AB$  og siden  $AC$  for henholdsvis  $M$  og  $N$ . Vis at ved inversion i den indskrevne cirkel afbildes  $A$  i midtpunktet af linjestykket  $MN$ .

Nu skal vi se på hvorfor inversion i nogle sammenhænge er rigtig smart. Fx er Ptolemæus' ulighed helt lige til hvis man inverterer problemstillingen.

### Ptolemæus' ulighed

Som vi så i et tidligere kapitel siger Ptolemæus' ulighed at der for en firkant  $ABCD$  gælder at

$$|AB||CD| + |AD||BC| \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop hvis firkant  $ABCD$  er indskrivelig.

#### Bevis

Vi inverterer i en cirkel med centrum i  $A$  og radius  $r$ . Dette giver

$$|AB||CD| + |AD||BC| = \frac{r^2}{|AB'|} \frac{r^2}{|AC' || AD'|} |C'D'| + \frac{r^2}{|AD'|} \frac{r^2}{|AB' || AC'|} |B'C'| = \frac{r^4}{|AB' || AC' || AD'|} (|B'C'| + |C'D'|)$$

og

$$|AC||BD| = \frac{r^2}{|AC'|} \frac{r^2}{|AB' || AD'|} |B'D'| = \frac{r^4}{|AB' || AC' || AD'|} |B'D'|.$$

Ptolemæus' ulighed er i den inverterede situation derfor blot trekantsuligheden

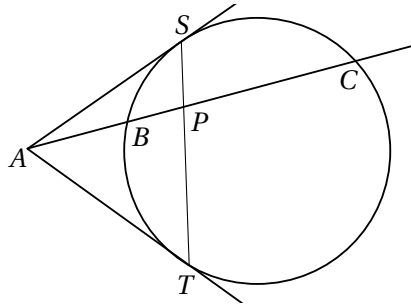
$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$$

hvor der gælder lighedstegn netop hvis  $B'$ ,  $C'$  og  $D'$  ligger på en linje i nævnte rækkefølge. I det ikke inverterede tilfælde er dette netop ækvivalent med at  $B$ ,  $C$  og  $D$  ligger på en cirkel gennem  $A$ , således at  $C$  ikke ligger ved siden af  $A$ , dvs. at firkant  $ABCD$  er omskrivelig.

I beviset for Ptolemæus' ulighed benyttede vi kun formlen for hvordan afstande ændres ved inversion, samt at en cirkel gennem inversionscirkelns centrum afbildes på en linje der ikke går gennem centrum og omvendt.

### Eksempel med NMC-opgave fra 2007

En linje gennem  $A$  skærer en cirkel i to punkter,  $B$  og  $C$ , på en sådan måde at  $B$  ligger mellem  $A$  og  $C$ . Fra punktet  $A$  tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne  $S$  og  $T$ . Lad  $P$  være skæringspunktet mellem linjerne  $ST$  og  $AC$ .



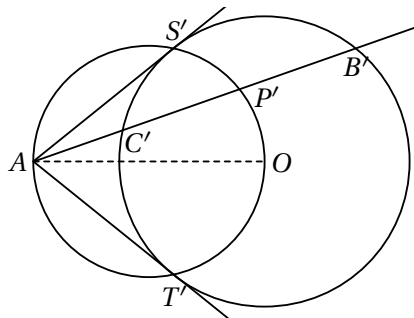
Vi skal vise at

$$\frac{|AP|}{|PC|} = 2 \frac{|AB|}{|BC|}.$$

Allerførst skal vi overveje hvilket punkt vi skal invertere i. De to mest centrale punkter er  $P$  og  $A$ , så vi prøver først at invertere i en cirkel med centrum i  $A$  og dernæst i en cirkel med centrum i  $P$  for at se hvordan det omformer problemstillingen.

### Inversion i en cirkel med centrum i $A$

Ved inversion i en cirkel med centrum  $A$  og radius  $r$  afbildes linjerne gennem  $A$  på sig selv, linjen  $ST$  afbildes i en cirkel gennem  $A$ , og cirklen afbildes i en cirkel som tangerer linjerne  $AS'$  og  $AT'$  som vist på figuren.



Nu skal vi først udregne hvad det er vi skal vise:

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{r^2/|AP'|}{r^2|P'C'|/(|AP'||AC'|)} = \frac{|AC'|}{|P'C'|}$$

$$2 \frac{|AB|}{|BC|} = 2 \frac{r^2/|AB'|}{r^2|B'C'|/(|AB'||AC'|)} = 2 \frac{|AC'|}{|B'C'|}.$$

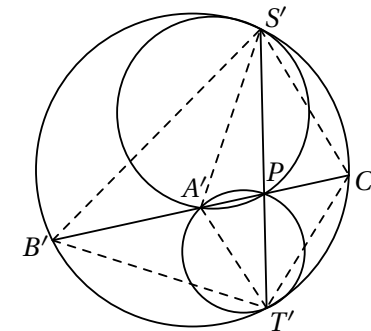
Vi skal altså i det inverterede tilfælde blot vise den simple sammenhæng at

$$|B'C'| = 2|P'C'|.$$

Lad  $AO$  være diameter i cirkel  $AS'P'T'$ . Da er  $\angle AS'O = \angle AT'O = 90^\circ$ , og derfor er  $O$  centrum i cirkel  $B'T'C'S'$ . Der gælder yderligere at  $\angle AP'O = 90^\circ$ , hvilket betyder at radius fra  $O$  gennem  $P'$  i cirkel  $B'T'C'S'$  står vinkelret på korden  $C'B'$ , og derfor deler den på midten. Altså er  $|B'C'| = 2|P'C'|$  som ønsket.

### Inversion i en cirkel med centrum i $P$

Nu prøver vi i stedet at se hvad der sker, når vi inverterer i en cirkel med centrum i  $P$  og radius  $r$ . Her afbildes linjerne gennem  $P$  på sig selv, cirklen afbildes på en cirkel, og de to tangenter afbildes i to cirkler som tangerer billedet af cirklen.



Ligheden som vi skal vise, reduceres i dette tilfælde til

$$|B'C'| = 2|A'B'|.$$

Ifølge opgave 8.2 er

$$\angle C'T'A' = \angle PT'B' = \angle A'C'S' \text{ og } \angle A'S'C' = \angle B'S'P = \angle A'C'T'.$$

Dermed er trekant  $A'S'C'$  og trekant  $A'C'T'$  ensvinklede, og altså  $|A'C'|^2 = |A'S'||A'T'|$ . På tilsvarende vis får man at trekant  $A'B'S'$  og trekant  $A'T'B'$

er ensvinklede, og altså  $|A'B'|^2 = |A'S'||A'T'|$ . Samlet er  $|B'C'| = 2|A'B'|$ , og dermed har vi vist det ønskede.

Både i tilfældet hvor vi inverterer i en cirkel med centrum i  $A$ , og i tilfældet hvor vi inverterer i en cirkel med centrum i  $P$ , reduceres den lighed vi skal vise, til en væsentlig simplere lighed – præcis som i beviset for Ptolemæus' sætning.

Nu skal vi se på en IMO-opgave fra 1996 hvor inversion er et utroligt effektivt redskab.

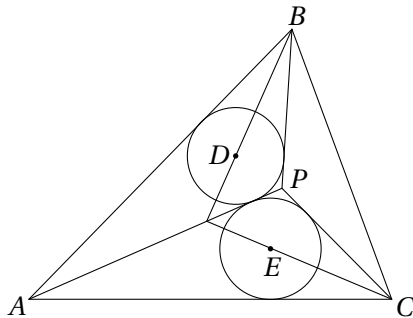
**Eksempel fra IMO 1996**

Opgaven lyder: Lad  $P$  være et indre punkt i trekant  $ABC$  således at

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Lad  $D$  og  $E$  være centrene for henholdsvis de indskrevne cirkler i trekant  $APB$  og trekant  $APC$ .

Vis at linjerne  $AP$ ,  $BD$  og  $CE$  skærer hinanden i et punkt.



Først bemærker vi at linjen  $BD$  er vinkelhalveringslinjen fra  $B$  i trekant  $ABP$ , og det er kendt at vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de to hosliggende sider. Linjen  $BD$  deler altså linjestykket  $AP$  i forholdet  $|AB|/|BP|$ . På tilsvarende vis ses at linjen  $CE$  deler linjestykket  $AP$  i forholdet  $|AC|/|PC|$ . At vise at de tre linjer  $BD$ ,  $CE$  og  $AP$  går gennem samme punkt, er altså ækvivalent med at vise at

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|PC|}.$$

Nu skal vi overveje hvilket centrum vores inversionscirkel skal have. I dette tilfælde er der en del vinkler hvis ene vinkelben går gennem  $A$ , og i sådan et tilfælde er det ofte en god ide at invertere i en cirkel med centrum i  $A$ . Valget af radius er derimod ikke væsentligt.

Når vi inverterer i en cirkel med centrum i  $A$  og radius  $r$ , svarer ligheden vi skal vise til den væsentlige simplere lighed

$$|P'B'| = |P'C'|.$$

Vi har endnu ikke benyttet oplysningerne om vinklerne, så derfor ser vi på hvad disse giver os af information i den inverterede situation.

$$\angle APB - \angle ACB = \angle AB'P' - \angle AB'C' = \angle C'B'P'.$$

Tilsvarende er

$$\angle APC - \angle ABC = \angle AC'P' - \angle AC'B' = \angle B'C'P'.$$

Ifølge antagelsen om vinklerne har vi nu at  $\angle C'B'P' = \angle B'C'P'$ , dvs. at  $|P'B'| = |P'C'|$  som ønsket.

Ved først at udnytte at vinkelhalveringslinjer deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende cirkler, og efterfølgende invertere omformes problemstillingen til en problemstilling der nærmest giver sig selv. Kunsten er selvfølgelig at gennemskue at inversion i en cirkel med centrum i  $A$  forsimples problemstillingen.

**Opgave 13.4.** Lad  $ABC$  være en trekant, og lad  $s$  betegne den halve omkreds. Punkterne  $P$  og  $Q$  ligger på linjen  $AB$  således at  $|CP| = |CQ| = s$ . Vis at den omskrevne cirkel til trekant  $CPQ$  tangerer den ydre røringcirkel til siden  $c$  i trekant  $ABC$ .

**Opgave 13.5.** Fire cirkler tangerer hinanden således at  $C_1$  og  $C_3$  tangerer  $C_2$  og  $C_4$ , samt således at cirklerne ikke overlapper hinanden. Røringspunkterne mellem  $C_1$  og  $C_2$ ,  $C_2$  og  $C_3$ ,  $C_3$  og  $C_4$  samt  $C_4$  og  $C_1$  betegnes henholdsvis  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$ . Vis at disse fire punkter enten ligger på en ret linje eller på en cirkel.



## 14 Oversigt

**Transversal:** En *transversal* i en trekant er et linjestykke der forbinder to punkter på hver sin side i trekanten. En transversal kaldes en *paralleltransversal* hvis den er parallel med en af siderne i trekanten, og en *midtpunktstransversal* hvis den forbinder midtpunkterne af to sider. En transversal fra punktet  $M$  på siden  $AB$  til punktet  $N$  på siden  $AC$  er en paralleltransversal netop hvis  $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ . En midtpunktstransversal er derfor også en paralleltransversal.

**Median:** En *median* er et linjestykke i en trekant der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af modstående side. De tre medianer i en trekant går igennem samme punkt som normalt betegnes  $M$ , og dette punkt deler medianerne i forholdet 1:2.

**Midtnormal:** En *midtnormal* til et linjestykke  $AB$  er det *geometriske sted* for de punkter der har samme afstand til  $A$  og  $B$ . I en trekant går de tre midtnormaler gennem samme punkt som normalt betegnes  $O$ , og dette punkt er centrum for den *omskrevne cirkel*.

**Vinkelhalveringslinje:** En *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er det *geometriske sted* for de punkter der har samme afstand til vinklens ben. Vinkelhalveringslinjen er altså en linje som deler en vinkel i to lige store vinkler. I en trekant går de tre vinkelhalveringslinjer gennem samme punkt som normalt betegnes  $I$ , og dette punkt er centrum for den *indskrevne cirkel*. Vinkelhalveringslinjen deler modstående side i trekanten i samme forhold som forholdet mellem vinklens to hosliggende sider.

**Højde:** En *højde* i en trekant er en linje der går gennem en vinkelspids og er ortogonal med modstående side. I en trekant går højderne gennem samme punkt som normalt betegnes  $H$ .

**Areal og radius i den indskrevne cirkel:** I en trekant er arealet  $T = rs$ , hvor  $r$  er radius i den indskrevne cirkel, og  $s$  den halve omkreds.

**Centervinkel:** En *centervinkel* er en vinkel der har toppunkt i centrum og radier som vinkelben. En centervinkel måles ved den bue den spænder over.

**Periferivinkel:** En *periferivinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben. En periferivinkel er halvt så stor som den bue den spænder over, to periferivinkler som spænder over samme bue, er lige store, og en periferivinkel der spænder over en halvcirkel, er ret.

**Korde-tangent-vinkel:** En *korde-tangent-vinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og en korde samt en tangent som vinkelben. En korde-tangent-vinkel er halvt så stor som den bue korden spænder over.

**Konvekse firkanter:** En firkant kaldes *konveks* hvis der for vilkårlige to indre punkter gælder at linjestykket mellem punkterne er indeholdt i firkanten.

**Indskrivelige firkanter:** En firkant kaldes *indskrivelig* hvis den har en omskreven cirkel. En firkant er indskrivelig netop hvis summen af modstående vinkler er  $180^\circ$ . En firkant er indskrivelig hvis begge diagonaler står vinkelret på hver deres side i firkanten.

**Ptolemæus' ulighed:** For en firkant  $ABCD$  gælder at  $|AC||BD| \leq |AB||CD| + |BC||DA|$  med lighedstegn netop når firkant  $ABCD$  er indskrivelig.

**Punkts potens:** I en given cirkel betegnes centrum  $O$  og radius  $r$ . Et punkt  $P$ 's potens mht. cirklen er tallet  $|PO|^2 - r^2$ .

**Sætning om et punkts potens.** Lad  $P$  være et punkt og  $l$  og  $m$  være to linjer gennem  $P$ , hvor  $l$  skærer en given cirklen i  $A$  og  $B$ , og  $m$  skærer cirklen i  $C$  og  $D$ . (Hvis en af linjerne tangerer cirklen, er de to punkter sammenfaldende.) Da gælder at  $|AP||BP| = |CP||DP|$ .

**Cevian:** En *cevia* er en linje i en trekant fra en vinkelspids til den modstående side (eller dens forlængelse).

**Cevas sætning:** Cevianerne  $AA'$ ,  $BB'$  og  $CC'$  (hvor  $A'$  ligger på  $BC$  osv.), skærer hinanden i samme punkt, netop hvis  $\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1$ .

**Radius i den omskrevne cirkel:** Om radius i den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$  gælder  $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  og  $4RT = abc$ .

**Herons formel:** Arealet af en trekant er  $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ , hvor  $s$  betegner den halve omkreds.

**Multiplikation omkring et punkt:** Multiplikation omkring punktet  $O$  med multiplikationsfaktoren  $k$  er en afbildning af planen i sig selv hvor et punkt  $P$  afbildes i punktet  $P'$  så  $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$ . Multiplikation i et punkt bevarer vinkler og fører en figur i en ligedannet figur.

**Ydre røringsskikler:** En trekants *ydre røringsskikler* er de tre cirkler der hver især tangerer den ene side udvendigt og tangerer forlængelserne af de to andre sider. Centrum for den ydre røringsskik til siden  $BC$  i trekant  $ABC$  er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel  $A$  og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel  $B$  og  $C$ .

**Radikalakse:** *Radikalaksen* for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler. Radikalaksen er en ret linje som står vinkelret på linjen mellem de to cirklers centre. Hvis cirklerne skærer hinanden, er det linjen gennem de to skæringspunkter.

**Radikalcentrum:** *Radikalcentrum* for tre cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de tre cirkler. Hvis de tre cirklers centre ikke ligger på linje, er radikalcentrum et punkt, og det er netop skæringspunktet mellem radikalakserne for hvert par af cirkler.

**Eulerlinje:** I en trekant ligger højdernes skæringspunkt  $H$ , medianernes skæringspunkt  $M$  og centrum for den omskrevne cirkel  $O$  på en ret linje som kaldes *Eulerlinjen*, og  $M$  deler  $HO$  således at  $2|MO| = |MH|$ .

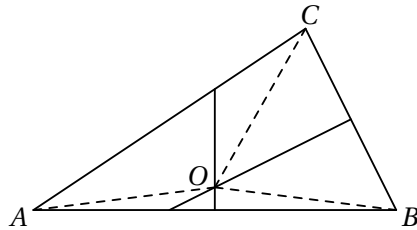
**Simsonlinjen:** Om et punkt  $P$  gælder at projektionerne af  $P$  på de tre sider i en trekant ligger på en ret linje netop hvis  $P$  ligger på trekantens omskrevne cirkel. Denne linje kaldes *Simsonlinjen*.

**Menelaos sætning:** Punkterne  $D$ ,  $E$  og  $F$ , som ligger på henholdsvis linjen  $AB$ , linjen  $BC$  og linjen  $CA$  i trekant  $ABC$ , ligger på samme linje netop hvis  $\frac{|AD|}{|DB|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|CF|}{|FA|} = -1$ .

**Inversion:** *Inversion* i en cirkel med centrum  $O$  og radius  $r$  er en afbildning af planen, fraregnet punktet  $O$ , på sig selv. Et punkt  $A$ ,  $A \neq O$ , afbildes i det punkt  $A'$  som ligger på halvlinjen fra  $O$  gennem  $A$ , og som opfylder at  $|OA||OA'| = r^2$ . Inversion bevarer skæringspunkter og vinkler. To punkter  $A$  og  $B$ , begge forskellige fra  $O$ , afbildes i punkterne  $A'$  og  $B'$  således at  $\angle OA'B' = \angle OBA$  og  $|A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|} |AB|$ .

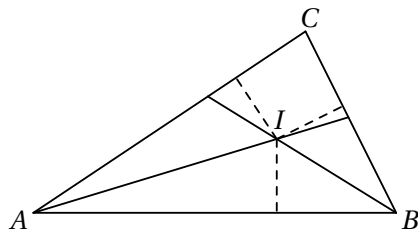
## 15 Løsningskitser

**Opgave 1.1** Lad  $ABC$  være en trekant, tegn midtnormalerne på  $AB$  og  $BC$ , og kald deres skæringspunkt for  $O$ .

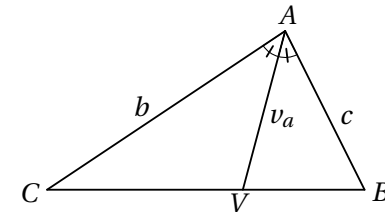


Da midtnormalen på  $AB$  er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til  $A$  og  $B$ , og midtnormalen på  $BC$  er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til  $B$  og  $C$ , må afstandene fra  $O$  til henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $C$  være lige store. Punktet  $O$  er dermed centrum for den omskrevne cirkel, og midtnormalen på  $AC$  vil på tilsvarende vis gå gennem  $O$ .

**Opgave 1.2** Lad  $ABC$  være en trekant, tegn vinkelhalveringslinjerne fra  $A$  og  $B$ , og kald deres skæringspunkt for  $I$ .



Da vinkelhalveringslinjerne er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, må afstandene fra  $I$  til alle tre sider være lige store. Punktet  $I$  er dermed centrum for den indskrevne cirkel, og vinkelhalveringslinjen fra  $C$  vil på tilsvarende vis gå gennem  $I$ .



Ved at udnytte at  $\sin(\angle CVA) = \sin(180^\circ - \angle CVA) = \sin(\angle AVB)$  får vi

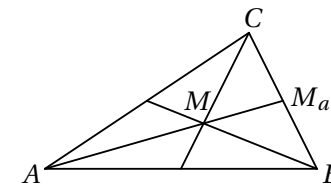
$$\frac{b}{|CV|} = \frac{\sin(\angle CVA)}{\sin(\frac{A}{2})} = \frac{\sin(\angle BVA)}{\sin(\frac{A}{2})} = \frac{c}{|VB|}.$$

Heraf ses at vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende sider.

**Opgave 1.3** Kald centrum for den indskrevne cirkel for  $I$ . Arealet af trekant  $ABI$  er da  $\frac{1}{2}rc$  da  $r$  er højden, og  $c$  er grundlinjen. Tilsvarende er arealet for trekant  $ACI$  og  $BCI$  henholdsvis  $\frac{1}{2}rb$  og  $\frac{1}{2}ra$ . Da arealet af trekant  $ABC$  netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

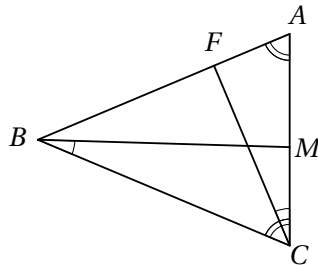
$$T = \frac{1}{2}(a + b + c)r = sr.$$

**Opgave 1.4** Lad  $M$  betegne medianernes skæringspunkt og  $M_a$  betegne fodpunktet for medianen på siden  $a$ .



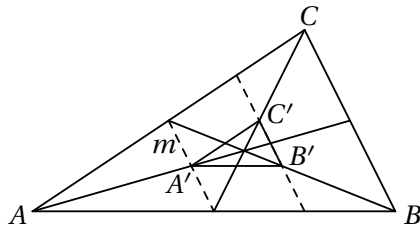
Da  $3|MM_a| = |AM_a|$ , er højden fra  $A$  i trekant  $ABC$  tre gange så stor som højden fra  $M$  i trekant  $MBC$ . Dermed udgør arealet af trekant  $MBC$  en tredjedel af arealet af trekant  $ABC$ . Desuden har trekant  $MM_aB$  og trekant  $MM_aC$  samme areal da de har samme højde og lige store grundlinjer. Dermed deler medianerne en trekant i seks små trekanter med samme areal.

**Opgave 1.5** Da  $|AB| = |BC|$ , er  $\angle A = \angle C$ , og da yderligere  $\angle MBC = \angle FCA$ , må  $\triangle BCM$  og  $\triangle CAF$  være ensvinklede.



Hvis vi antager at  $|BM| = |FC|$ , er  $\triangle BCM$  og  $\triangle CAF$  desuden kongruente. Altså er  $|AC| = |BC|$ , og trekant  $ABC$  er dermed ligesidet.

**Opgave 1.6** Først viser vi at siderne i trekant  $A'B'C'$  er parallelle med siderne i trekant  $ABC$ . Indtegn midtpunktstransversalen  $m$  gennem siderne  $AB$  og  $AC$ .

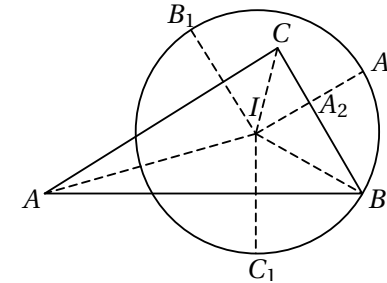


Denne midtpunktstransversal går gennem  $A'$  og er parallel med  $BC$ . Punkterne  $B'$  og  $C'$  ligger lige langt fra linjen  $m$  og linjen  $BC$ , og dermed er siden  $B'C'$  parallel med  $BC$ . Tilsvarende gælder for de andre to sider i trekant  $A'B'C'$ . Vi har nu at siderne i trekant  $ABC$  og siderne trekant  $A'B'C'$  er parallelle.

Da midtpunktstransversalen  $m$  deler siden  $AB$  på midten, må linjen  $B'C'$  dele siden  $AB$  i forholdet  $1 : 3$ , dvs. at  $|AB| = 4|A'B'|$ . Dermed er forholdet mellem siderne i trekant  $A'B'C'$  og siderne i trekant  $ABC$   $1 : 4$ , dvs. at forholdet mellem arealerne er  $(\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$ . Arealet af trekant  $A'B'C'$  er derfor  $\frac{1}{16}$ .

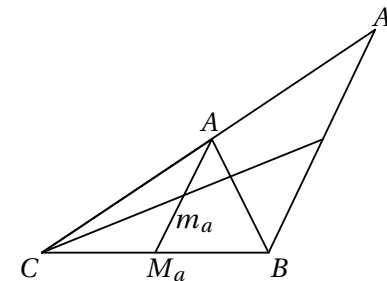
**Opgave 1.7** Lad  $A'$ ,  $B'$  og  $C'$  være den indskrevne cirkels røringpunkter med henholdsvis  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Trekkanterne  $IC'C_1$ ,  $IC'C_2$ ,  $IA'C$  og  $IB'C$  er kongruente, dvs. at  $|C_1C_2| = |C_1C'| + |C'C_2| = |A'C| + |CB'|$ . På tilsvarende vis fås  $|A_1A_2| = |B'A| + |AC'|$  og  $|B_1B_2| = |A'B| + |BC'|$ . Dette giver det ønskede.

**Opgave 1.8** Lad  $A_2$  være skæringspunktet mellem  $IA_1$  og  $BC$ .



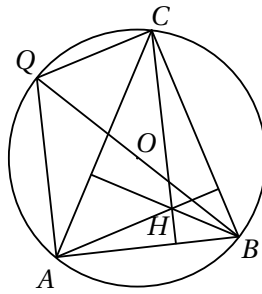
Trekant  $BA_2I$  er retvinklet, og  $|BI| = 2|A_2I|$ . Dermed er  $\angle IBA_2 = 30^\circ$ . Da  $BI$  er vinkelhalveringslinje, er vinkel  $B = 60^\circ$ .

**Opgave 1.9** Kald fodpunktet af medianen  $m_a$  på  $a$  for  $M_a$ . Tegn en linje gennem  $B$  parallel med  $M_aA$ , og lad  $A_1$  være skæringspunktet mellem denne linje og forlængelsen af  $AC$ .



Trekkanterne  $ACM_a$  og  $A_1CB$  er ensvinklede med forholdet  $1 : 2$ , dvs. at  $|CA| = |AA_1|$ . Linjen gennem  $C$  som halverer  $m_a$ , halverer også  $A_1B$  da  $m_a$  og  $A_1B$  er parallelle. Denne linje og  $AB$  er derfor begge medianer i trekant  $A_1BC$ , og linjen deler dermed  $AB$  i forholdet  $1 : 2$ .

**Opgave 2.1** Da  $BQ$  er diameter i den omskrevne cirkel, står  $QC$  vinkelret på  $CB$  og er dermed parallel med  $AH$  som også står vinkelret på  $CB$ .



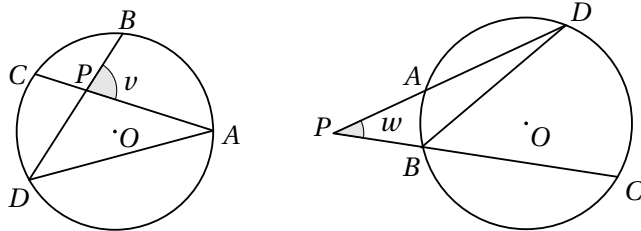
På samme måde ses at  $QA$  er parallel med  $CH$ . Dermed er  $AQCH$  et parallelogram.

**Opgave 2.2** Vi skal vise at korde-tangentvinklen  $w$  er halvt så stor som den centervinkel  $v$  der spænder over korden. Da linjestykket fra centrum til tangentens røringsspunkt står vinkelret på tangenten, er

$$w = 90^\circ - \angle OAB = 90^\circ - \frac{180^\circ - v}{2} = \frac{v}{2}.$$

**Opgave 2.3** Betragt trekant  $ADP$ . Da vinkelsummen i en trekant er  $180^\circ$ , er

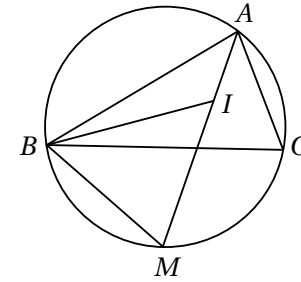
$$v = 180^\circ - \angle APD = \angle PDA + \angle PAD = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}.$$



Bemærk først at  $\angle PBD = 180^\circ - \angle DBC = 180^\circ - \frac{\widehat{CD}}{2}$ . Betragt nu trekant  $PBD$ . Da vinkelsummen i en trekant er  $180^\circ$ , er

$$w = 180^\circ - \frac{\widehat{AB}}{2} - \left(180^\circ - \frac{\widehat{CD}}{2}\right) = \frac{\widehat{CD} - \widehat{AB}}{2}.$$

**Opgave 2.4** Da  $AI$  er vinkelhalveringslinje i trekant  $ABC$ , må  $M$  være midtpunktet af cirkelbuen  $BC$ . Dermed er  $|BM| = |CM|$ .



Vi mangler at bevise at  $|IM| = |IB|$ . Ved at benytte sætningen om periferivinkler samt at vinkelsummen i en trekant er  $180^\circ$ , får vi

$$\begin{aligned} \angle BIM &= 180^\circ - \angle BIA = \angle BAI + \angle ABI = \\ &= \angle CAM + \angle CBI = \angle CBM + \angle CBI = \angle MBI. \end{aligned}$$

Dermed er  $|IM| = |BM|$ , og  $M$  er derfor centrum for cirklen gennem  $B$ ,  $C$  og  $I$ .

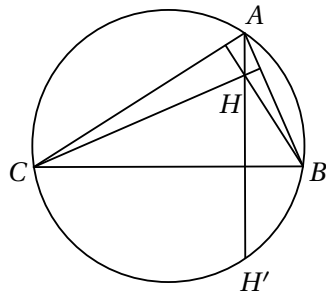
**Opgave 2.5** Ifølge sætningen om korde-tangentvinkler er trekant  $ABD$  og trekant  $ACB$  ensvinklede. Dette giver  $|AB|^2 = |AC||AD| = 12$ .

**Opgave 3.1** Lad  $ABCD$  være en firkant hvor diagonalen  $BD$  står vinkelret på siden  $BC$ , og diagonalen  $AC$  står vinkelret på siden  $AD$ . Tegn den omskrevne cirkel til trekant  $ACD$ . Da  $\angle DAC$  er ret, er  $AD$  diameter i cirklen. Desuden er vinkel  $\angle DBC$  ret og spænder over diameteren  $AD$ , og dermed må  $B$  ligge på cirkelperiferien.

**Opgave 3.2** Firkant  $AH_bH_aB$  er indskrivelig da begge diagonaler står vinkelret på en side i firkanten (se opgave 3.1). Da  $AH_bH_aB$  er indskrivelig, må  $\angle CH_aH_b = 180^\circ - \angle BH_aH_b = \angle CAB$ . Dermed er  $\triangle CAB$  ensvinklet med  $\triangle CH_aH_b$ .

**Opgave 3.3** Da firkant  $AH_bH_aB$  er indskrivelig, er  $\angle AH_aH_b = \angle ABH_b$ . Tilsvarende er  $\angle AH_aH_c = \angle ACH_c$ . Da  $\triangle ABH_b$  og  $\triangle ACH_c$  er retvinklede og har vinkel  $A$  fælles, er de ensvinklede, og dermed er  $\angle ABH_b = \angle ACH_c$ . Samlet er  $AH_a$  vinkelhalveringslinje i  $\triangle H_aH_bH_c$ .

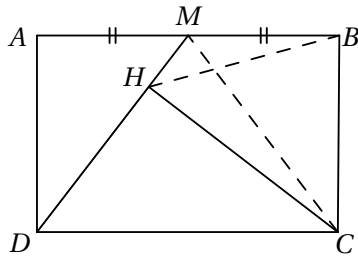
**Opgave 3.4** Lad  $H'$  være skæringen mellem  $AH$  og den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ .



Da er  $\angle H'CB = \angle H'AB = 90^\circ - \angle ABC = \angle HCB$ . Da  $HA$  står vinkelret på  $BC$ , følger det at  $H'$  er spejlingen af  $H$  i siden  $BC$ .

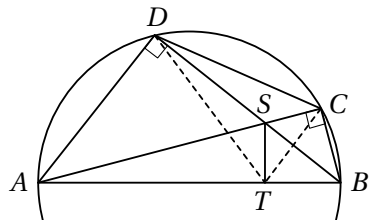
**Opgave 3.5** Kald punktet hvor alle tre cirkler skærer hinanden, for  $S$ . Da summen af modstående vinkler i indskrivelige firkanter er  $180^\circ$ , er  $\angle BRS = \angle APS = \angle SQC$  og  $\angle SQC + \angle SRC = 180^\circ$ . Dermed er  $\angle SRC + \angle SRB = 180^\circ$  som ønsket.

**Opgave 3.6** Da  $\angle MHC = \angle MBC = 90^\circ$ , er firkant  $MHCB$  indskrivelig.



Dermed er  $\angle BCH = \angle AMD = \angle BMC = \angle BHC$ , hvilket viser at  $|BC| = |BH|$ .

**Opgave 3.7** Vinkel  $ADB$  og vinkel  $ACB$  er rette da de spænder over en diameter i cirklen.



Firkanterne  $ADST$  og  $BCST$  er derfor indskrivelige da de har to modstående rette vinkler, og firkant  $ABCD$  er pr. konstruktion indskrivelig. Dermed er

$$\angle CTS = \angle CBS = \angle CBD = \angle CAD = \angle SAD = \angle STD,$$

hvilket viser at linjen  $ST$  halverer vinkel  $\angle CTD$ .

**Opgave 4.1** Ifølge Ptolemæus' sætning gælder at  $|MA||BC| = |MB||AC| + |MC||AB|$ , og da trekant  $ABC$  er ligesidet, fås  $|MA| = |MB| + |MC|$ .

**Opgave 4.2** Bemærk at  $AD$  er diameter i cirklen, og dermed at trekanten  $ACD$  og  $ABD$  er retvinklede. Pythagoras' sætning giver dermed at  $|DB| = \sqrt{3}$  og  $|CD| = \sqrt{2}$ . Ved at anvende Ptolemæus' sætning får vi nu at  $|BC| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ .

**Opgave 4.3** Kald kvadratets sidelængde for  $x$ . Ifølge Ptolemæus' sætning anvendt på firkant  $ABCP$  er

$$|AP||BC| + |AB||CP| = |BP||AC|$$

og dermed

$$|PA| \cdot x + |PC| \cdot x = |PB| \cdot \sqrt{2}x.$$

Samlet er

$$\frac{|PA| + |PC|}{|PB|} = \sqrt{2}$$

uanset valget af  $P$ .

**Opgave 4.4** Da syvkanten er regulær, er  $|AB| = |BC|$ ,  $|AC| = |CE|$ ,  $|AD| = |AE|$  og  $|AD| = |BE|$ . Ved at benytte Ptolemæus' sætning på firkant  $ABCE$  som er indskrivelig da syvkanten er regulær, fås:

$$|AB||CE| + |BC||AE| = |AC||BE|$$

$$|AB||AC| + |AB||AD| = |AC||AD|$$

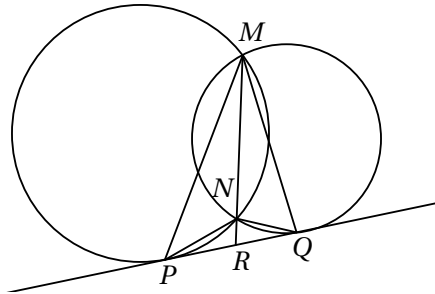
$$\frac{1}{|AD|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{1}{|AB|}.$$

**Opgave 5.1** Lad  $P$  være et punkt inden i cirklen. Vi viser at  $-|AP||BP|$  netop er  $P$ 's potens mht. cirklen, da det giver det ønskede.

Tegn linjen gennem  $P$  og  $O$ , og kald skæringspunkterne med cirklen for  $M$  og  $N$ . Trekanterne  $AMP$  og  $NBP$  er ensvinklede ifølge sætningen om periferivinkler, dvs. at

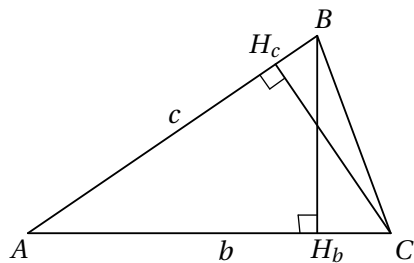
$$|AP||BP| = |MP||NP| = (r - |OP|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2.$$

**Opgave 5.2** Lad  $R$  være skæringspunktet mellem  $NM$  og  $PQ$ . Ifølge sætningen om punkts potens er  $|PR|^2 = |RN||RM| = |QR|^2$ , og altså  $|PR| = |QR|$ .



Dermed har trekant  $MRP$  og trekant  $MRQ$  samme areal, og trekant  $NPR$  og trekant  $NQR$  samme areal, og dermed har også trekant  $MNP$  og trekant  $MNQ$  samme areal.

**Opgave 6.1** Kald fodpunkterne for højderne i trekant  $ABC$  for  $H_a$ ,  $H_b$  og  $H_c$ .



Da er

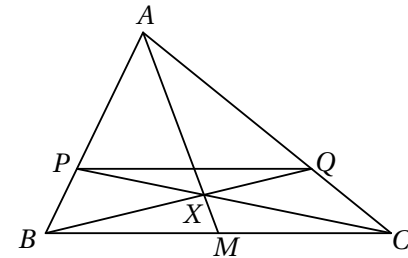
$$\cos A = \frac{|AH_b|}{c} = \frac{|AH_c|}{b}, \text{ og dermed } \frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{c}{b}.$$

Det tilsvarende gælder for de andre sider. Derfor er

$$\frac{|AH_b|}{|H_bC|} \frac{|BH_c|}{|H_cA|} \frac{|CH_a|}{|H_aB|} = \frac{abc}{abc} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning går højderne dermed gennem samme punkt.

**Opgave 6.2** Da  $PQ$  er parallel med  $BC$ , er  $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ , og dermed også  $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|AB| - |AP|}{|AC| - |AQ|} = \frac{|BP|}{|CQ|}$ . Kald skæringen mellem  $AX$  og  $BC$  for  $M$ .

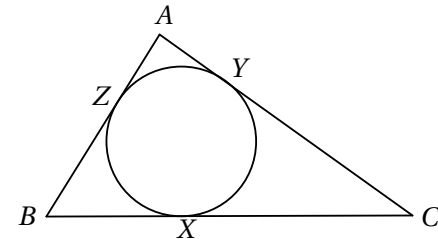


Ifølge Cevas sætning er

$$\frac{|CQ|}{|QA|} \frac{|AP|}{|PB|} \frac{|BM|}{|MC|} = 1.$$

Da  $PQ$  er paralleltransversal, er  $\frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AP|}{|PB|} = 1$ . Altså er  $\frac{|BM|}{|MC|} = 1$ , og  $AM$  deler dermed  $BC$  på midten.

**Opgave 6.3** Da den indskrevne cirkel tangerer  $AB$  og  $AC$ , er afstanden fra  $A$  til de to røringpunkter  $Y$  og  $Z$  den samme. Altså er  $|AY| = |AZ|$ , og tilsvarende  $|BX| = |BZ|$  og  $|CX| = |CY|$ .

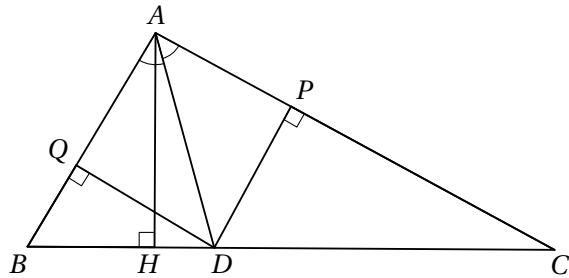


Dette giver

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1,$$

og ifølge Cevas sætning betyder dette at  $AX$ ,  $BY$  og  $CZ$  skærer hinanden i et punkt.

**Opgave 6.4** Trekant  $APD$  og trekant  $AQD$  er kongruente da de har en fælles side  $AD$ ,  $\angle PAD = \angle QAD$  og  $\angle APD = 90^\circ = \angle AQD$ , dvs. at  $|AP| = |AQ|$ .



Trekant  $AHB$  og trekant  $DQB$  er ensvinklede da de begge har en ret vinkel samt den fælles vinkel  $B$ . Dermed er  $\frac{|BQ|}{|BH|} = \frac{|BD|}{|AB|}$ . Tilsvarende er  $\frac{|CP|}{|CH|} = \frac{|CD|}{|AC|}$ . Da  $AD$  er vinkelhalveringslinje, er  $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$ . Samlet er

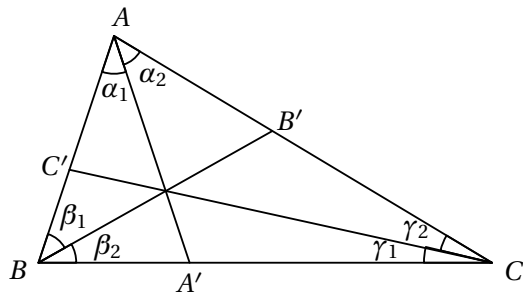
$$\frac{|AP|}{|PC|} \cdot \frac{|CH|}{|HB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QA|} = \frac{|CH|}{|PC|} \cdot \frac{|BQ|}{|HB|} = \frac{|AC|}{|CD|} \cdot \frac{|BD|}{|AB|} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning skærer linjerne  $AH$ ,  $BP$  og  $QC$  hinanden i et punkt.

**Opgave 6.5** Vi viser at

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|}$$

da dette viser det ønskede.



Ifølge sinusrelationen er  $\sin \alpha_1 = |BA'| \frac{\sin B}{|AA'|}$  og  $\sin \alpha_2 = |A'C| \frac{\sin C}{|AA'|}$ . (Bemærk at dette også holder i tilfælde hvor  $A'$  ligger på forlængelsen af  $BC$  tættest på  $B$ , da både  $|BA'|$  og  $\alpha_1$  og dermed  $\sin \alpha_1$  er negative i dette tilfælde). Dermed er

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{|BA'|}{|A'C|} \frac{\sin B}{\sin C}.$$

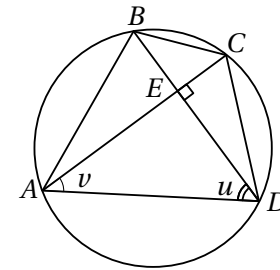
Da det tilsvarende gælder for de andre vinkler, er

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} &= \frac{|BA'|}{|A'C|} \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} \frac{\sin C}{\sin A} \cdot \frac{|AC'|}{|C'B|} \frac{\sin A}{\sin B} \\ &= \frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} \end{aligned}$$

**Opgave 6.6** Det ønskede følger af Cevas sætning med vinkler, da  $\alpha'_1 = \angle BAA'' = \angle A'AC = \alpha_2$  osv.

**Opgave 7.1** Da diagonalerne står vinkelret på hinanden, er

$$|AE|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |DE|^2 = |AB|^2 + |CD|^2$$



Kald vinkel  $\angle ADB$  for  $u$  og vinkel  $\angle DAC$  for  $v$ . Da er  $v + u = 90^\circ$ , dvs.  $\sin v = \cos u$ . To gange radius for den omskrevne cirkel i en trekant er lig med længden af den ene side divideret med sinus til den modstående vinkel. Benyttes dette på trekant  $ABD$  og trekant  $ACD$  fås  $|AB| = 2R \sin u$  og  $|CD| = 2R \sin v$ . Dette giver som ønsket

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (2R)^2(\sin^2 u + \sin^2 v) = 4R^2(\sin^2 u + \cos^2 u) = 4R^2.$$

**Opgave 7.2** Lad  $n \geq 3$ , og lad  $n - 1$ ,  $n$  og  $n + 1$  være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da  $\frac{3n}{2}$ . Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2} \left(\frac{3n}{2} - n + 1\right) \left(\frac{3n}{2} - n\right) \left(\frac{3n}{2} - n - 1\right)} = \frac{n}{2} \sqrt{\frac{3}{4}(n^2 - 4)}.$$

For  $n = 4$  er  $T = 6$ , så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad  $n$  være et lige tal,  $n \geq 4$ , og antag at  $\frac{3}{4}(n^2 - 4)$  er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne  $m - 1$ ,  $m$  og  $m + 1$  hvor  $m = n^2 - 2$ . Da er  $m > n$ ,  $m$  er lige, og

$$\frac{3}{4}(m^2 - 4) = \frac{3}{4}(m - 2)(m + 2) = \frac{3}{4}(n^2 - 4)n^2.$$

Dermed er

$$T_m = \frac{m}{2} \sqrt{\frac{3}{4}(m^2 - 4)}$$

et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

**Opgave 7.3** Ifølge cosinusrelationen er

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) + 2abc}{2abc} \\ &= \frac{8(s - a)(s - b)(s - c)}{2abc} + 1 \\ &= \frac{8\frac{T^2}{s}}{8RT} + 1 \\ &= \frac{r}{R} + 1. \end{aligned}$$

**Opgave 7.4** Bemærk først at

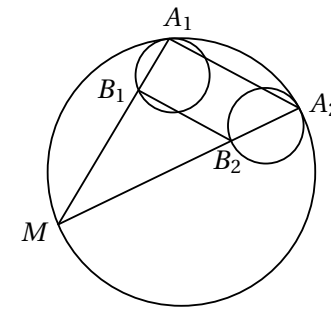
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a + b + c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for  $T$ . Da er  $a + b + c = \frac{2T}{r}$  og  $abc = 4RT$ . Vi har nu

$$\frac{a + b + c}{abc} = \frac{2T}{r4RT} = \frac{1}{2rR}.$$

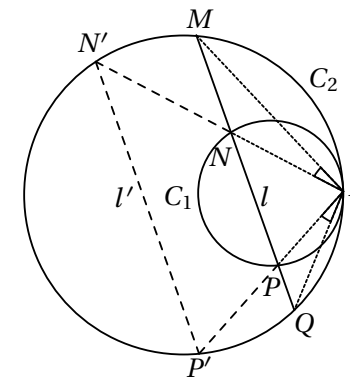
som ønsket.

**Opgave 8.1** Der findes en multiplikation omkring  $A_1$  med multiplikationsfaktor  $k_1$  som fører  $C_1$  i  $C$ , og tilsvarende en multiplikation omkring  $A_2$  med multiplikationsfaktor  $k_2$  som fører  $C_2$  i  $C$ .



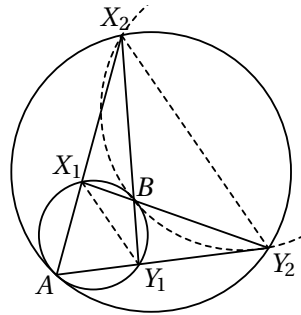
Da  $C_1$  og  $C_2$  har samme radius, betyder det at  $k_1 = k_2$ . Altså vil en multiplikation omkring  $M$  med multiplikationsfaktor  $\frac{k_1}{k_1 - 1}$  afbilde  $B_1$  i  $A_1$  og  $B_2$  i  $A_2$ , og dermed  $B_1 B_2$  i  $A_1 A_2$ . De to linjer er derfor parallelle.

**Opgave 8.2** Der findes en multiplikation omkring  $A$  som afbilder  $C_1$  i  $C_2$ . Ved denne multiplikation afbildes  $N$  i  $N'$  og  $P$  i  $P'$  som vist på figuren.



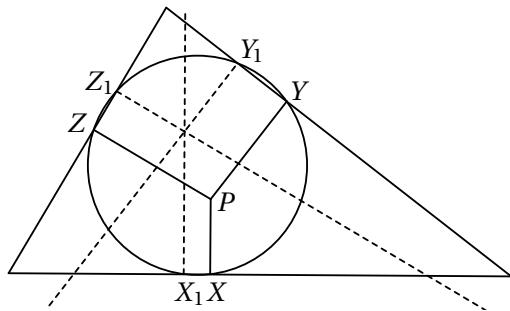
Linjerne  $l$  og  $l'$  er parallelle og cirkelbuerne  $\widehat{MN}'$  og  $\widehat{QP}'$  derfor ligestore. Altså er  $\angle MAN = \angle PAQ$ .

**Opgave 8.3** Der findes en multiplikation omkring  $A$  som afbilder  $C_1$  i  $C_2$ , og multiplikationsfaktoren for denne afbildning kaldes  $k$ . Dermed er  $|X_2 Y_2| = k|X_1 Y_1|$ .



Trekanterne  $X_1 B Y_1$  og  $Y_2 B X_2$  er derfor ensvinklede således at  $|B Y_2| = k|B X_1|$  og  $|B X_2| = k|B Y_1|$ . En multiplikation omkring  $B$  med multiplikationsfaktoren  $-k$  fører dermed  $X_1$  i  $Y_2$  og  $Y_1$  i  $X_2$ , og altså cirklen  $C_1$  i den omskrevne cirkel til  $B X_2 Y_2$ . Dermed tangerer  $C_1$  og den omskrevne cirkel til  $B X_2 Y_2$  hinanden (overvej).

**Opgave 8.4** Linjen gennem  $X_1$  vinkelret på  $a$  og linjen gennem  $X$  vinkelret på  $a$  er parallelle, og da de begge står vinkelret på korden  $XX_1$  i cirklen, må de have samme afstand til cirkelns centrum.

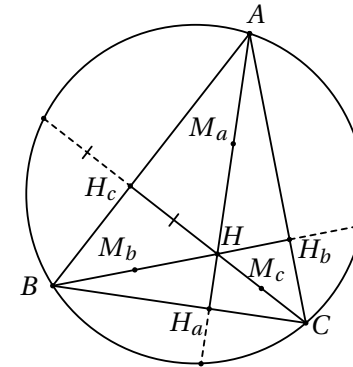


Ved en multiplikation i cirkelns centrum med multiplikationsfaktor  $-1$  føres linjen gennem  $X_1$  vinkelret på  $a$  derfor i linjen gennem  $X$  vinkelret på

$a$ . Tilsvarende føres linjen gennem  $Y_1$  vinkelret på  $b$  i linjen gennem  $Y$  vinkelret på  $b$ , og linjen gennem  $Z_1$  vinkelret på  $c$  i linjen gennem  $Z$  vinkelret på  $c$ . Da de tre linjer føres i tre linjer som skærer hinanden i et punkt, må de tre linjer også selv skærer hinanden i et punkt.

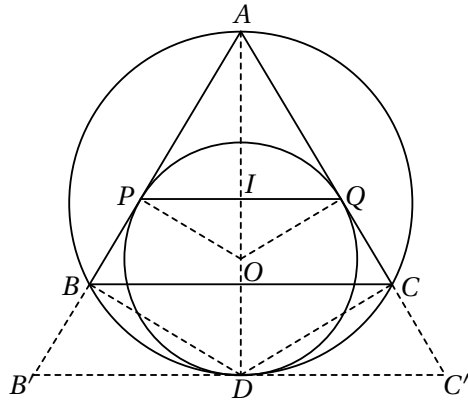
**Opgave 8.5** En multiplikation i  $M$  med multiplikationsfaktor  $k = -\frac{1}{2}$  fører  $A$  i  $M_a$ ,  $B$  i  $M_b$  og  $C$  i  $M_c$ . Dermed føres  $I$  i  $S$ , og punkterne  $I$ ,  $M$  og  $S$  ligger på linje.

**Opgave 8.6** Da  $\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$  (overvej), ligger spejlingen af  $H$  i linjen  $AB$  på den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ .



Ved en multiplikation omkring  $H$  med multiplikationsfaktor 2 bliver  $H_c$  derfor afbildet i et punkt på den omskrevne cirkel. Tilsvarende bliver  $H_a$  og  $H_b$  afbildet i punkter på den omskrevne cirkel. Punkterne  $M_a$ ,  $M_b$  og  $M_c$  bliver afbildet i henholdsvis  $A$ ,  $B$  og  $C$ . De seks punkter  $H_a$ ,  $H_b$ ,  $H_c$ ,  $M_a$ ,  $M_b$  og  $M_c$  bliver dermed alle afbildet på den omskrevne cirkel, og derfor ligger de alle på samme cirkel. Den omskrevne cirkel til trekant  $H_a H_b H_c$  afbildes desuden i den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ , hvilket viser at radius i den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$  er dobbelt så stor som radius i den omskrevne cirkel til trekant  $H_a H_b H_c$ .

**Opgave 8.7** Betragt multiplikationen i  $A$  som fører trekant  $ABC$  i en trekant  $AB'C'$  således at  $D$  ligger på  $B'C'$ , og kald multiplikationsfaktoren for  $k$ . Kald midtpunktet af  $PQ$  for  $I$ . Vi vil vise at multiplikationen fører  $I$  i centrum  $O$  for cirklen gennem  $PQD$  da denne cirkel er indskreven cirkel til trekant  $AB'C'$  og dette derfor viser det ønskede.

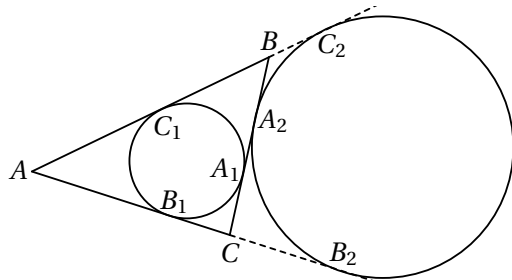


Trekantene  $AIP$ ,  $APQ$ ,  $ABD$  og  $ADB'$  er ensvinklede da de er retvinklede og deler vinklen ved  $A$ . Dermed er

$$\frac{|AO|}{|AI|} = \frac{|AO|}{|AP|} \frac{|AP|}{|AI|} = \frac{|AD|}{|AB|} \frac{|AB'|}{|AD|} = \frac{|AB'|}{|AB|} = k.$$

Altså afbildes  $I$  i  $O$ , og  $I$  er derfor centrum for den indskrevne cirkel til trekant  $ABC$ .

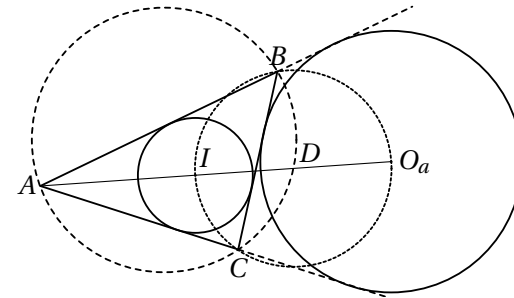
**Opgave 9.1** Lad  $A_1$ ,  $B_1$  og  $C_1$  være røringpunkterne for den indskrevne cirkel med henholdsvis  $BC$ ,  $AC$  og  $AB$ , og lad  $A_2$ ,  $B_2$  og  $C_2$  være røringpunkterne mellem den ydre røringsskive  $c_a$  og henholdsvis  $BC$ ,  $AC$  og  $BC$ .



- i) Potensen af  $A$  mht.  $c_a$  er  $|AB_2|^2$ , og  $|AB_2| = \frac{1}{2}(|AB_2| + |AC_2|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CB_2| + |AB| + |AC_2|) = \frac{1}{2}(|AC| + |CA_2| + |AB| + |BA_2|) = s$ . Altså er potensen af  $A$  mht.  $c_a$  lig  $s^2$ .

- ii) Ifølge i) er  $|CA_2| = s - |AC| = s - (|CB_1| + |B_1A|)$ , og da  $s = |BA_1| + |CB_1| + |B_1A|$ , er  $|BA_1| = |CA_2|$ . Altså ligger  $A_1$  og  $A_2$  symmetrisk på linjestykket  $BC$  omkring dets midtpunkt.

**Opgave 13.4**



- i) Ifølge 2.4 ligger punkterne  $B$ ,  $C$  og  $I$  på en cirkel med  $D$  som centrum. Sæt  $\angle BAC = 2\alpha$ ,  $\angle ABC = 2\beta$  og  $\angle ACB = 2\gamma$ . Da er

$$\begin{aligned} \angle IO_a B &= 180^\circ - \angle O_a B I - \angle O_a I B \\ &= 180^\circ - \angle O_a B C - \angle C B I - \angle O_a I B \\ &= 180^\circ - (\alpha + \gamma) - \beta - (\alpha + \beta) \\ &= \gamma = \angle B C I \end{aligned}$$

Dermed er firkant  $BICO_a$  indskrivelig, og  $B$ ,  $I$ ,  $C$  og  $O_a$  ligger på en cirkel med  $D$  som centrum.

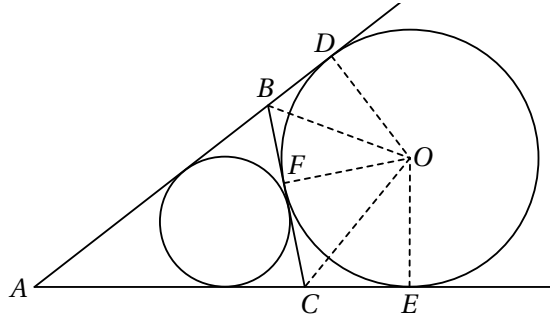
- ii) Trekantene  $\triangle ACI$  og  $\triangle AO_a B$  er ensvinklede da  $\angle CAI = \angle O_a A B$ , og  $\angle BO_a A = \angle BO_a I = \angle B C I = \angle A C I$ . Dermed er  $|AI||AO_a| = |AB||AC|$ .

**Opgave 9.3** Kald røringsskivernes røringpunkter med siderne  $BC$ ,  $AC$  og  $AB$  for henholdsvis  $A'$ ,  $B'$  og  $C'$  og den indskrevne cirkels røringpunkter med siderne  $BC$ ,  $AC$  og  $AB$  for henholdsvis  $A_1$ ,  $B_1$  og  $C_1$ . Fra sætningen om de ydre røringsskiver ved vi at

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} \frac{|BA'|}{|A'C|} \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1.$$

Cevas sætning giver nu at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

**Opgave 9.4** Lad  $s$  være den halve omkreds. Da ved vi at  $T = rs$ , samt fra Herons formel at  $T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ . Betragt den ydre røringsskive til siden  $a$ . Kald centrum for  $O$  og røringsskivepunkterne mellem cirklen og linjerne  $AB$ ,  $AC$  og  $BC$  for henholdsvis  $D$ ,  $E$  og  $F$ .



Det er kendt at  $|AD| = |AE| = s$ , og dermed at  $|BF| = |BD| = s - c$  og  $|CF| = |CE| = s - b$ . Nu er

$$T = T_{\triangle ADO} + T_{\triangle AEO} - T_{\triangle BDO} - T_{\triangle FBO} - T_{\triangle FCO} - T_{\triangle ECO} =$$

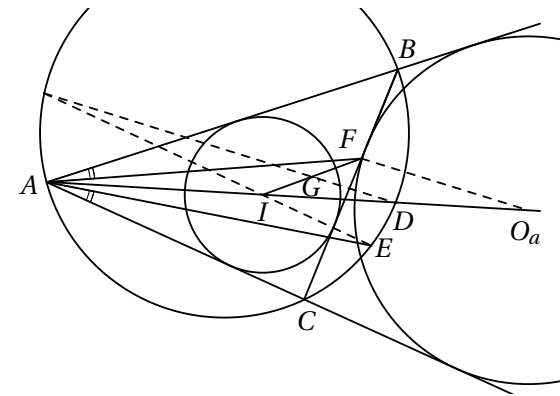
$$T = \frac{1}{2}sr_1 + \frac{1}{2}sr_1 - \frac{1}{2}r_1(s-c) - \frac{1}{2}r_1(s-c) - \frac{1}{2}r_1(s-b) - \frac{1}{2}r_1(s-b)$$

$$T = r_1(s - (s-c) - (s-b)) = r_1(s-a).$$

Tilsvarende får man for de andre røringsskiver at  $T = r_2(s-b)$  og  $T = r_3(s-c)$ . Dette giver samlet

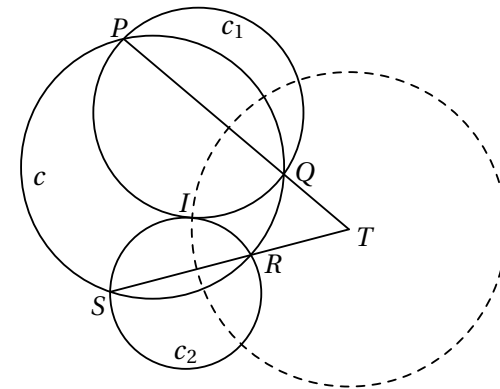
$$T^2 = \frac{T^4}{T^2} = \frac{rsr_1(s-a)r_2(s-b)r_3(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rr_1r_2r_3.$$

**Opgave 9.5** Lad  $O_a$  være centrum for den ydre røringsskive til siden  $BC$ . Ifølge Sætning 2 om den ydre røringsskive ii) er  $|AI||AO_a| = |AB||AC|$ . Trekkanterne  $\triangle ABF$  og  $\triangle AEC$  er ensvinklede fordi  $\angle BAF = \angle CAE$  pr konstruktion og  $\angle ABF = \angle AEC$  da de spænder over samme buestykke.



Dermed er  $|AF||AE| = |AB||AC| = |AI||AO_a|$ , hvilket viser at  $\triangle AO_aF$  og  $\triangle AEI$  er ensvinklede. Ifølge Sætning 2 om den ydre røringsskive i) er  $DG$  midtpunktstransversal i trekant  $\triangle IO_aF$ , dvs.  $\angle ADG = \angle AO_aF = \angle AEI$ , hvilket viser at  $\angle AEI$  og  $\angle ADG$  spænder over samme buestykke i  $\Gamma$ , og dermed at  $DG$  og  $EI$  skærer hinanden på  $\Gamma$ .

**Opgave 10.1** Lad  $T$  være skæringspunktet mellem  $PQ$  og  $RS$ , og lad  $c_1$  og  $c_2$  være to cirkler gennem henholdsvis  $P$  og  $Q$  samt  $R$  og  $S$  som tangerer hinanden i  $I$ .



Da  $T$  ligger på radikalaksen for  $c$  og  $c_1$ , samt på radikalaksen for  $c$  og  $c_2$ , må  $T$  være radikalcentrum for de tre cirkler, hvilket betyder at  $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$  uanset valget af  $c_1$  og  $c_2$ . Dvs. at  $L$  er en delmængde af cirklen med  $T$  som centrum og  $\sqrt{|TP||TQ|}$  som radius. Lad omvendt  $I$  være et

punkt på denne cirkel. Da vil  $T$  være radikalcentrum for cirklerne  $c$  samt de omskrevne cirkler til trekant  $PQI$  og trekant  $RSI$  (bemærk at en af cirklerne kan være degenereret til en linje), og da  $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$  må de omskrevne cirkler til trekant  $PQI$  og trekant  $RSI$  tangere hinanden i  $I$  ifølge sætningen om et punkts potens. Dermed er  $L$  cirklen med centrum i  $T$  og radius  $\sqrt{|TP||TQ|}$ .

**Opgave 10.2**

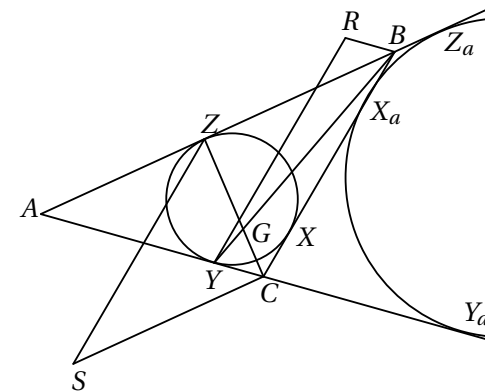
- i) Ved multiplikation omkring  $A$  således at  $c_1$  afbildes i  $c$ , ses at linjen  $AB$  skærer  $c$  i det punkt hvor tangenten er parallel med  $ST$ , dvs. i  $M$ , og dermed ligger  $A$ ,  $B$  og  $M$  på linje.
- ii) Trekkanterne  $MBT$  og  $MTA$  er ensvinklede da de har en fælles vinkel ved  $M$  og  $\angle TAM = \angle MTB$  fordi de spænder over henholdsvis cirkelbuerne  $MT$  og  $MS$  som er lige store. Dermed er  $|MA||MB| = |MT|^2$ .
- iii) Sammenhængen  $|MA||MB| = |MT|^2$  gælder uanset placeringen af  $c_1$ , dvs.  $M$  har samme potens mht. til alle cirkler i cirkelafsnittet som tangere  $c$  og  $ST$ , og altså specielt samme potens mht.  $c_1$  og  $c_2$ . Dermed ligger  $M$  på deres radikalakse  $UV$ .

**Opgave 10.3**

- i) Kald centrene i cirklerne  $c_1$ ,  $c_2$  og  $c_3$  for henholdsvis  $O_1$ ,  $O_2$  og  $O_3$ . Firkant  $EFGO$  er pr. konstruktion et parallelogram, diagonalerne skærer dermed hinanden på midten, og  $O_3$  er derfor deres skæringspunkt. Linjen gennem  $O_1O_3$  er derfor midtpunktstransversal i trekant  $AFO$ , altså parallel med  $AF$ , og dermed ortogonal med  $ME$ . Punktet  $E$  ligger på  $c_1$  da  $E$  er midtpunktet af korden  $AC$  i cirklen  $c$ , og vi dermed ved at  $\angle AEO = 90^\circ$ . Radikalaksen for  $c_1$  og  $c_3$  er derfor  $ME$  da  $E$  ligger på begge cirkler, og  $ME$  står vinkelret på linjen gennem cirklernes centre. Tilsvarende ses at  $NG$  er radikalakse for  $c_2$  og  $c_3$ .
- ii) Radikalaksen for  $c$  og  $c_1$  er deres fælles tangent i  $A$ , og dermed er radikalcentrum for  $c$ ,  $c_1$  og  $c_3$  skæringen mellem denne tangent og radikalaksen for  $c_1$  og  $c_3$ , dvs. punktet  $M$ . På tilsvarende vis ses at radikalcentrum for  $c$ ,  $c_2$  og  $c_3$  er  $N$ .

- iii) Af ii) følger at  $MN$  er radikalakse for  $c$  og  $c_3$ , og dermed står  $NM$  vinkelret på  $OO_3$ . Vi ved desuden at  $CD$  står vinkelret på  $OO_3$ , da  $OO_3$  halverer  $CD$ . Dermed er  $MN$  parallel med  $CD$ .

**Opgave 10.4**



- i) Lad  $c$  og  $c_a$  røre siden  $BC$  i henholdsvis punkterne  $X$  og  $X_a$ , lad  $c_a$  røre siderne  $AB$  og  $AC$  i henholdsvis punkterne  $Z_a$  og  $Y_a$ . Fra kapitlet om ydre røringcirkler ved vi at  $|BX_a| = |CX|$  og  $|CX_a| = |BX|$ , og dermed følger at

$$\begin{aligned} |ZZ_a| &= |ZB| + |BZ_a| = |BX| + |BX_a| \\ &= |BX| + |CX| = |BC| = |SZ| \end{aligned}$$

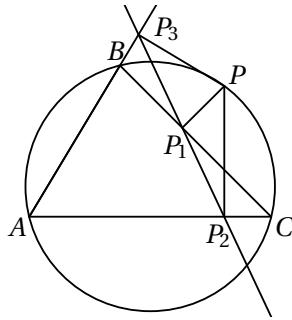
og

$$|CY_a| = |CX_a| = |BX| = |BZ| = |CS|.$$

Punkterne  $Z$  og  $C$  har altså hver især samme potens mht. til cirklerne  $c_a$  og  $s$  og derfor er  $ZC$  radikalakse for cirklerne  $c_a$  og  $s$ .

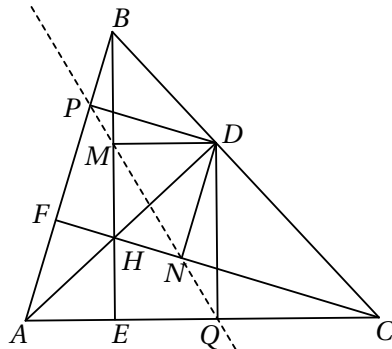
- ii) Et tilsvarende argument viser at  $BY$  er radikalakse for cirklerne  $c_a$  og  $r$ , hvor  $r$  er den degenererede cirkel med centrum  $R$  og radius 0. Dermed bliver  $G$  radikalcentrum for cirklerne  $c_a$ ,  $r$  og  $s$ . Heraf følger  $|GR| = |GS|$ .

**Opgave om Simsonlinjen 11.1** Lad  $P$  være et punkt på den omskrevne cirkel til trekant  $ABC$ , og antag wlog at  $P$  ligger på buestykket  $BC$  således at projektionen  $P_2$  af  $P$  på linjen  $AC$  ligger på linjestykket  $AC$ , mens projektionen  $P_3$  af  $P$  på linjen  $AB$  ikke ligger på linjestykket  $AB$ , men dets forlængelse.



Firkant  $PCP_2P_1$  er indskrivelig da begge diagonaler står vinkelret på en side, og dermed er  $\angle CP_1P_2 = \angle CPP_2$ . Firkant  $PP_1BP_3$  er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og dermed er  $\angle BP_1P_3 = \angle BPP_3$ . Firkant  $PP_2AP_3$  er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og da firkant  $ABPC$  pr. konstruktion er indskrivelig, er  $\angle P_3PP_2 = 180^\circ - \angle BAC = \angle BPC$ . Af dette følger at  $\angle BPP_3 = \angle CPP_2$ , og samlet at  $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$ , dvs. at punkterne  $P_1, P_2$  og  $P_3$  ligger på en ret linje.

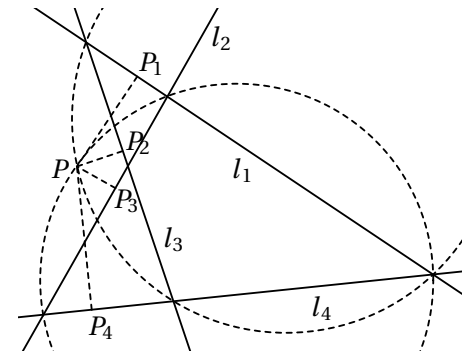
**Opgave 11.2**



Firkant  $CDHE$  er cyklisk da den har to modstående rette vinkler. Dermed ligger  $D$  på den omskrevne cirkel til trekant  $CHE$ , hvilket betyder at  $Q, M$

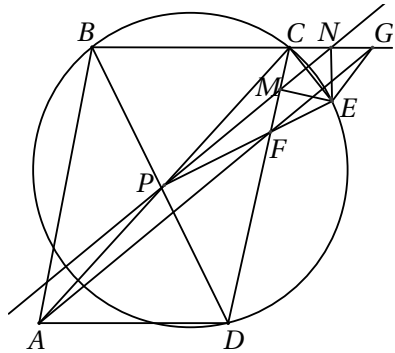
og  $N$  ligger på en linje (Simsonlinjen). Tilsvarende ligger  $D$  på den omskrevne cirkel til trekant  $HFB$ , hvilket betyder at  $M, N$  og  $P$  ligger på linje. Dette viser samlet at alle fire punkter  $P, Q, M$  og  $N$  ligger på en ret linje.

**Opgave 11.3** Lad  $P$  være skæringen mellem den omskrevne cirkel til trekanten dannet af linjerne  $l_1, l_2$  og  $l_4$ , og den omskrevne cirkel til trekanten dannet af linjerne  $l_1, l_3$  og  $l_4$ . Lad yderligere punkterne  $P_1, P_2, P_3$  og  $P_4$  være projektionerne af  $P$  på henholdsvis  $l_1, l_2, l_3$  og  $l_4$ .



Da  $P$  ligger både på den omskrevne cirkel til trekanten dannet af linjerne  $l_1, l_2$  og  $l_4$  og trekanten dannet af linjerne  $l_1, l_3$  og  $l_4$ , ligger  $P_1, P_2, P_3$  og  $P_4$  på linje ifølge sætningen om Simsonlinjen. Men dermed må  $P$  også ligge på den omskrevne cirkel for trekanten dannet af linjerne  $l_1, l_2$  og  $l_3$  og trekanten dannet af  $l_2, l_3$  og  $l_4$  ifølge den omvendte Simpson. Altså går alle fire omskrevne cirkler gennem  $P$ .

**Opgave 11.4** Lad  $P, M$  og  $N$  være midtpunkterne af linjestykkerne  $CA, CF$  og  $CG$ . Da punkterne  $A, F$  og  $G$  ligger på linjen  $l$ , ligger  $P, M$  og  $N$  på en linje som er parallel med  $l$ . Da  $ABCD$  er et parallelogram, er  $P$  skæringspunktet mellem diagonalerne.



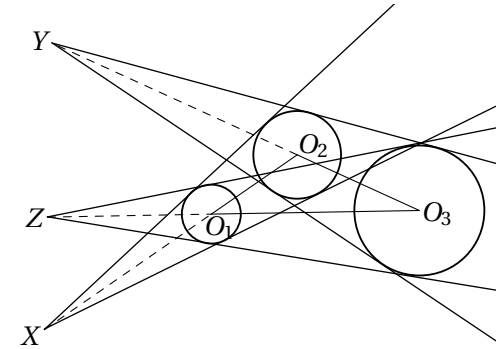
Punktet  $E$  ligger på den omskrevne cirkel til trekant  $BCD$ , og da  $|EF| = |EG| = |EC|$  må projektionen af  $E$  på henholdsvis  $CD$  og  $BC$  være  $M$  og  $N$ . Projektionen af  $E$  på  $BD$  ligger ifølge sætningen om Simsonlinjen på linjen gennem  $M$  og  $N$ , dvs. at  $P$  er projektionen af  $E$  på  $BD$ . Da firkant  $BCED$  er indskrivelig, er  $\angle DBE = \angle DCE$ , hvilket giver at trekant  $BEP$  og trekant  $CEM$  er ensvinklede, dvs. at  $\angle PEB = \angle MEC$ . Firkant  $CMEN$  er også indskrivelig da to modstående vinkler er rette, dvs. at  $\angle CNM = \angle CEM$ . Alt dette giver samlet

$$\angle FAD = \angle CNM = \angle CEM = \angle BEP =$$

$$\frac{1}{2} \angle BED = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \angle BAD.$$

Hermed har vi vist at linjen  $l$  er vinkelhalveringslinje for vinkel  $BAD$

**Opgave 12.1** Kald centrene for de tre cirkler  $O_1, O_2$  og  $O_3$  og deres radier for  $r_1, r_2$  og  $r_3$ . Lad desuden  $P_1$  og  $P_2$  være røringsspunktet på henholdsvis  $C_1$  og  $C_2$  for en af de fælles tangenter. Da er trekantene  $XO_1P_1$  og  $XO_2P_2$  ensvinklede, og altså  $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$ . Tilsvarende ses at  $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$  og  $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$ .



Betragt trekanten  $O_1O_2O_3$ . Punkterne  $X, Y$  og  $Z$  er henholdsvis punkter på linjerne  $O_1O_2, O_2O_3$  og  $O_3O_1$ . Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at  $X, Y$  og  $Z$  ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} \frac{|O_2Y|}{|YO_3|} \frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right) \left(-\frac{r_2}{r_3}\right) \left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Dermed ligger de tre punkter  $X, Y$  og  $Z$  på linje.

**Opgave 12.2** Kald centrene for de tre cirkler  $O_1, O_2$  og  $O_3$  og deres radier for  $r_1, r_2$  og  $r_3$ . Som i opgave 12.1 ses at  $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}, \frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$  og  $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$ . Betragt trekanten  $O_1O_2O_3$ . Punkterne  $X, Y$  og  $Z$  er henholdsvis punkter på linjerne  $O_1O_2, O_2O_3$  og  $O_3O_1$ . Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at  $X, Y$  og  $Z$  ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} \frac{|O_2Y|}{|YO_3|} \frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right) \left(\frac{r_2}{r_3}\right) \left(\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

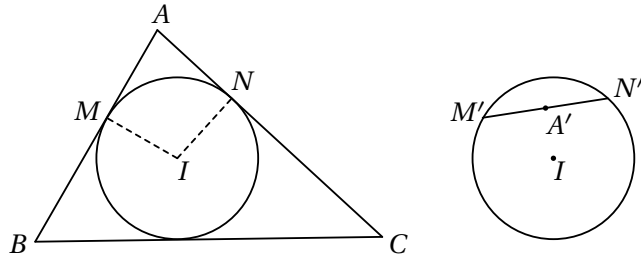
Dermed ligger de tre punkter  $X, Y$  og  $Z$  på linje.

**Opgave 13.1** Betragt diameteren hvis forlængelse går gennem  $O$ . Denne diameter vil af symmetri grunde afbildes i diameteren til  $\alpha'$ , og da linjer gennem  $O$  afbildes på sig selv følger det at centrum for  $\alpha$ , centrum for  $\alpha'$  og punktet  $O$  ligger på linje.

**Opgave 13.2** Kald røringsspunkterne for den ydre røringsskive og linjerne  $AC$  og  $BC$  for henholdsvis  $M$  og  $N$ . Det er velkendt fra kapitlet om ydre røringsskiver at  $|CM| = |CN| = s$ . Punkterne  $M$  og  $N$  fikses derfor ved

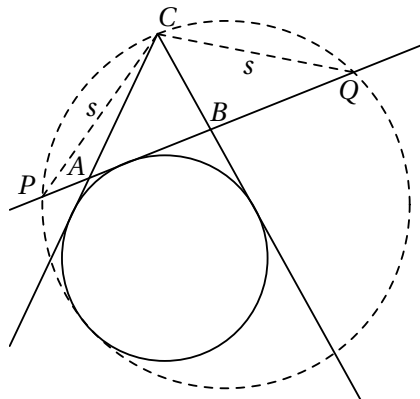
inversionen, dvs. at den ydre røringsskive afbildes i en cirkel gennem  $M$  og  $N$  som tangerer billederne af linjerne  $AC$  og  $BC$ . Da  $AC$  og  $BC$  afbildes på sig selv, må også cirklen afbildes på sig selv.

**Opgave 13.3** Kald centrum for den indskrevne cirkel for  $I$ . Firkant  $AMIN$  er indskrivelig da  $\angle AMI = \angle ANI = 90^\circ$ .



Cirklen  $AMN$  afbildes derfor i en linje gennem  $M$  og  $N$  da disse to punkter ligger på inversionscirklen. Billedet af  $A$  er altså skæringspunktet mellem linjestykket  $NM$  og linjen  $AI$ . Dette skæringspunkt er netop midtpunktet af  $MN$ , da  $AI$  er vinkelhalveringslinje til vinkel  $\angle NAM$  og  $|AM| = |AN|$ .

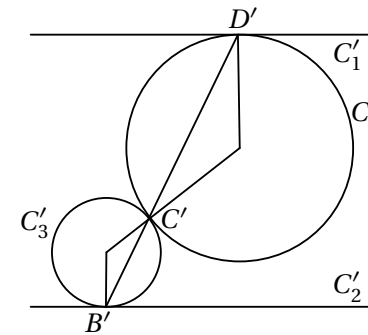
**Opgave 13.4**



Ved inversion i en cirkel med centrum  $C$  og radius  $s$  afbildes den ydre røringsskive på sig selv ifølge opgave 13.2. Vi skal altså vise at billedet af den omskrevne cirkel til trekant  $CPQ$  tangerer den ydre røringsskive. Da  $P$  og

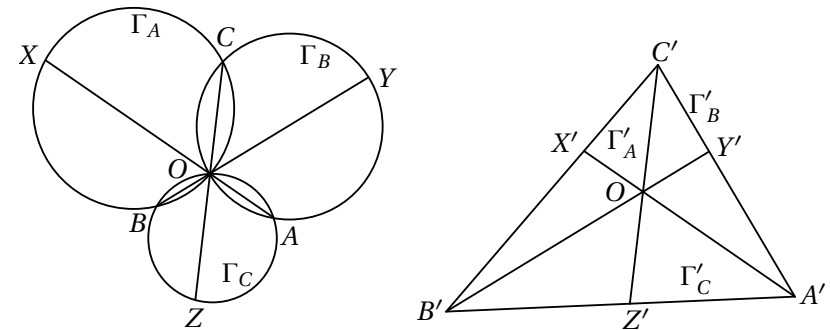
$Q$  afbildes på sig selv, vil den omskrevne cirkel til trekant  $CPQ$  afbildes i linjen  $PQ$  som tangerer røringsskiven.

**Opgave 13.5** Ved inversion i en cirkel med centrum i  $A$  afbildes  $C_1$  og  $C_2$  i to parallelle linjer, og  $C_3$  og  $C_4$  afbildes i to cirkler der tangerer hinanden samt henholdsvis billedet af  $C_2$  og  $C_1$ .



Ved at regne på vinklerne ses let at  $B'$ ,  $C'$  og  $D'$  ligger på linje. Hvis denne linje går gennem  $A$ , vil  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  ligge på linje, og hvis linjen ikke går gennem  $A$ , vil  $A$ ,  $B$ ,  $C$  og  $D$  ligge på en cirkel.

**Opgave 13.6** Ved inversion i punktet  $O$  afbildes cirklerne  $\Gamma_A$ ,  $\Gamma_B$  og  $\Gamma_C$  i linjer således at  $A'B'C'$  er en trekant, og  $A'X'$ ,  $B'Y'$  og  $C'Z'$  cevianer i trekanten som går gennem samme punkt  $O$ .

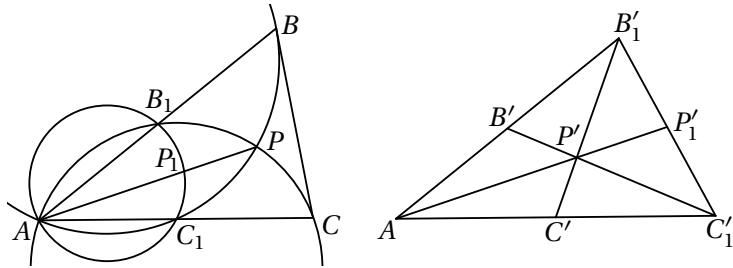


Ved at udnytte at  $|AY| = \frac{r^2}{|AO||YO|} |A'Y'|$  osv. ses at ligningen vi skal vise, i det inverterede tilfælde er ækvivalent med

$$\frac{|A'Y'| |B'Z'| |C'X'|}{|A'Z'| |B'X'| |C'Y'|} = 1.$$

Dette er sandt ifølge Cavas sætning.

**Opgave 13.7** Inverter i en cirkel med centrum i  $A$  og radius  $r$ . Linjerne  $AB$ ,  $AP$  og  $AC$  afbildes på sig selv, cirklen gennem  $A, B, C_1, P$  afbildes på en linje gennem  $B', C'_1$  og  $P'$ , cirklen gennem  $A, B_1, C, P$  afbildes i en linje gennem  $B'_1, C'$  og  $P'$ , og cirklen gennem  $AB_1P_1C_1$  afbildes i en linje gennem  $B'_1, C'_1$  og  $P'_1$ .



Da  $B_1$  og  $C_1$  er midtpunkt på henholdsvis  $AB$  og  $AC$ , er  $B'$  og  $C'$  midtpunkt på henholdsvis linjestykkerne  $AB'_1$  og  $AC'_1$ . Dermed er  $AB'_1C'_1$  en trekant med  $B'_1C'$  og  $B'C'_1$  som medianer. Da linjen gennem  $A, P'$  og  $P'_1$  går gennem skæringspunktet mellem  $B'_1C'$  og  $B'C'_1$ , er  $AP'_1$  også median i trekant  $AB'_1C'_1$ . Da medianerne skærer hinanden i forholdet  $1 : 2$ , får vi

$$2|AP| = 2 \frac{r^2}{|AP'|} = 3 \frac{r^2}{|AP'_1|} = 3|AP_1|.$$

**Opgave 13.8** Da  $P$  er det centrale punkt, inverterer vi i en cirkel med centrum i  $P$  og radius  $r$ . Dermed er  $\alpha'_1$  og  $\alpha'_3$  to parallelle linjer, og  $\alpha'_2$  og  $\alpha'_4$  er to parallelle linjer. Firkant  $A'B'C'D'$  er derfor et parallelogram.

Nu regner vi på begge sider af lighedstegnet:

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{\frac{r^2|A'B'|}{|PA'||PB'|} \cdot \frac{r^2|B'C'|}{|PB'||PC'|}}{\frac{r^2|A'D'|}{|PA'||PD'|} \cdot \frac{r^2|D'C'|}{|PD'||PC'|}} = \frac{|A'B'||B'C'||PD'|^2}{|A'D'||D'C'||PB'|^2},$$

og

$$\frac{|PB|^2}{|PD|^2} = \frac{\frac{r^4}{|PB'|^2}}{\frac{r^4}{|PD'|^2}} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2}.$$

Ligheden som vi skal vise, reduceres dermed til

$$\frac{|A'B'||B'C'|}{|A'D'||D'C'|} = 1,$$

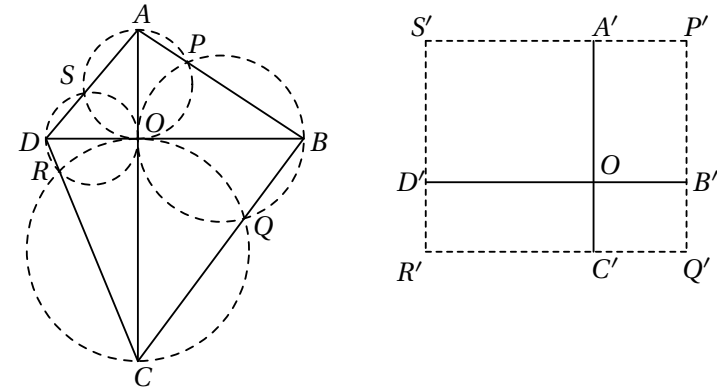
hvilket er sandt da  $A'B'C'D'$  er et parallelogram.

**Opgave 13.9**

Inverter i en cirkel med centrum i  $A$ , da  $\alpha$  og  $\alpha_0$  derved afbildes i to parallelle linjer som alle billederne af cirklerne i følgen tangerer. Røringspunkternes billeder  $P'_1, P'_2, P'_3, \dots$  ligger derfor på en ret linje, dvs. at  $P_1, P_2, P_3, \dots$  ligger på en cirkel gennem  $A$ .

**Opgave 13.10**

Bemærk først at firkant  $APOS$ ,  $BQOP$ ,  $CROQ$  og  $DSOR$  er indskrivelige, og kald deres omskrevne cirkler for henholdsvis  $\alpha_A, \alpha_B, \alpha_C$  og  $\alpha_D$ . Da  $AO$  og  $CO$  er diameter i henholdsvis  $\alpha_A$  og  $\alpha_C$ , tangerer  $\alpha_A$  og  $\alpha_C$  begge linjen  $BD$  i  $O$ . Tilsvarende tangerer  $\alpha_B$  og  $\alpha_C$  linjen  $AC$  i  $O$ .

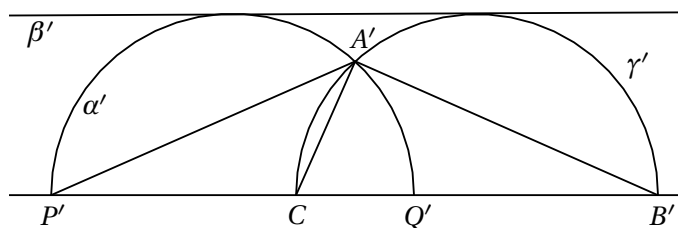


Inverter i en cirkel med centrum i  $O$ . Da afbildes  $\alpha_A$  og  $\alpha_C$  i to linjer som er parallelle med  $DB$ , og  $\alpha_B$  og  $\alpha_D$  i to linjer parallelle med  $AC$ . Skæringspunkterne mellem de fire cirkler er netop  $P, Q, R$  og  $S$ , dvs. at  $P'Q'R'S'$  er et rektangel og dermed indskrivelig. Punkterne  $P, Q, R$  og  $S$  ligger derfor også på en cirkel.

**Opgave 13.11**

Inverter i en cirkel med centrum i  $C$ . Da afbildes linjen  $PQ$  på sig selv, cirklen  $\beta$  i en linje parallel med  $P'Q'$ , halvcirkelcirklen  $\alpha$  i en halvcirkelcirkel

som tangerer  $\beta'$  og har  $P'Q'$  som diameter, og linjen  $\gamma$  i en cirkel som tangerer  $\beta'$  og har  $CB'$  som diameter.



Da linjen gennem  $P'$ ,  $C$ ,  $Q'$  og  $B'$  er parallel med linjen  $\beta'$ , må de to cirkler  $\alpha'$  og  $\gamma'$  have samme radius. Derfor er

$$\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC,$$

dvs. at  $AC$  er vinkelhalveringslinje i trekant  $PAC$ .