Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Talteori

Talteori handler om de hele tal, og særligt om hvornår et helt tal går op i et andet helt tal. Derfor spiller primtallene en helt central rolle i talteori, hvilket vi skal se på om lidt.

Her præsenteres idéer til hvordan man løser talteoriopgaver. Det er ikke en teoretisk indføring, men der er i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man benytter fx delelighedsregler og primfaktoropløsning. For at blive god til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningsskitser til alle opgaver bagerst.

Divisor Tallet 3 går op i 99 da $99 = 3 \cdot 33$. Mere generelt gælder at hvis d og n er hele tal, så går d op i n hvis der findes et helt tal q så

$$n = q \cdot d.$$

Vi siger også at d er *divisor* i n, eller at n er *delelig med* d.

Primtal Et positivt heltal større end 1 kaldes et primtal hvis de eneste positive divisorer i tallet er 1 og tallet selv. De første ti primtal er derfor

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29.$$

Delelighedsregler

Der findes mange regler om delelighed. Børn lærer hurtigt at 2 går op i et tal når sidste ciffer er lige, og at 5 går op i et tal når sidste ciffer er 0 eller 5, men der findes flere regler som ikke er helt så kendte og intuitive.

3-reglen Tallet 3 går op i et tal netop hvis det går op i tværsummen. Tværsummen af et tal er summen af dets cifre.

Fx går 3 op i 1911114 da 3 går op i tværsummen $1+9+1+1+1+1+4 = 18$.

9-reglen Tallet 9 går op i et tal netop hvis det går op i tværsummen.

Fx går 9 op i 1911114 da det går op i tværsummen 18.

11-reglen Tallet 11 går op i et tal netop hvis det går op i den alternerende tværsum. Den alternerende tværsum af et tal får man ved at lægge hvert andet ciffer til og trække hvert andet ciffer fra.

Fx går 11 op i 918592950 da den alternerende tværsum er $9-1+8-5+9-2+9-5+0 = 22$

Produkt af primtal Et produkt $p \cdot q$ af to forskellige primtal p og q går op i et tal hvis både p og q går op.

Hvis vi fx skal undersøge om et tal er deleligt med $6 = 2 \cdot 3$, så skal vi blot tjekke om det både er deleligt med 2 og med 3.

Produkt Hvis der om de hele tal n, m, a og b gælder at n går op i a og m går op i b, så går $n \cdot m$ op i $a \cdot b$.

Fx går $27 = 3 \cdot 9$ op i $6 \cdot 1971$ da 3 går op i 6, og 9 går op i 1971.

Opgave 1. Hvor mange af følgende fem tal går 9 op i?

$$9393939, \quad 111111111, \quad 123456, \quad 123456 \cdot 15, \quad 99 \cdot 111$$

Opgave 2. Hvilket af følgende tal er ikke deleligt med 3?

A) $333+45519$ B) $12445+54421$ C) $2777+7222$
D) $9416+7864$ E) $212121+414141$

(*Georg Mohr 2006, opgave 3*)

Opgave 3. Georg tænker på et helt tal. Først ganger han tallet med 5, og derefter trækker han 7 fra resultatet. Så ganger han det nye resultat med 9 og får tallet x. Hvad kan man med sikkerhed slutte om x?

A) x er ulige B) x er lige C) 3 går op i x D) 5 går op i x E) 7 går op i x

(*Georg Mohr 2016, opgave 2*)

Opgave 4. Hvad er det mindste hele tal som kun består af cifrene 1, 2 og 3, som indeholder hvert af de tre cifre mindst én gang, og som 3 ikke går op i?

(*Georg Mohr 2015, opgave 12*)

Opgave 5. Hvilken af følgende opgaver er uløselig? Dan et 5-cifret tal bestående af alle cifrene 1, 2, 3, 4 og 5 så

A) 4 går op i tallet B) 5 går op i tallet C) 6 går op i tallet
D) 11 går op i tallet E) 125 går op i tallet

(*Georg Mohr 2007, opgave 10*)

Opgave 6. Peter har skrevet to positive hele tal x og y på en seddel som han viser til sine venner A, B, C, D og E. De fem venner udtaler følgende:

A) $x+y$ er ulige B) 3 går op i y C) $y=2x$
D) $x\cdot y$ er ulige E) $x<y$

Peter fortæller at netop én af de fem venner lyver. Hvem?

(*Georg Mohr 2014, opgave 8*)

Opgave 7. Hvis m er et lige tal, og n er delelig med 6, hvilket af følgende tal er så med sikkerhed deleligt med 4?

A) $m+n$ B) $mn-m$ C) m^2+n D) $m(m+n)$ E) $(m+1)n$

(*Georg Mohr 2009, opgave 10*)

Opgave 8. På et bord står der 12 gaver nummereret fra 1 til 12. Arnes yndlingstal er 2, Bents yndlingstal er 3, Carls yndlingstal er 4, Doras yndlingstal er 5, og Ellas yndlingstal er 6. Arne, Bent, Carl, Dora og Ella går op til bordet i en eller anden rækkefølge og får udleveret de gaver (blandt dem der er tilbage) hvis nummer deres yndlingstal går op i. Det viser sig at den sidste får to gaver. Hvem er den sidste?

A) Arne B) Bent C) Carl D) Dora E) Ella

(*Georg Mohr 2018, opgave 9*)

Primfaktoropløsning Når vi primfaktoropløser et tal, skriver vi det som et produkt af primtal. Fx er primfaktoropløsningen af 60 lig med $2^2\cdot3\cdot5$, mens primfaktoropløsningen af 6 er lig med $2\cdot3$ og primfaktoropløsningen af 13 blot er 13. Alle positive heltal større end 1 har en primfaktoropløsning, og den er entydig pånær rækkefølgen af faktorerne.

Primfaktoropløsningen af et tal fortæller noget om hvilke tal der går op i tallet. Fx kan man umiddelbart se at 7 går op i $2^8\cdot5^2\cdot7^9\cdot19$, mens 13 og 17 ikke går op. Man kan også se at $25=5^2$ og $70=2\cdot5\cdot7$ går op.

Hvis man fx skal bestemme samtlige divisorer i 30, så kan man se på primfaktoropløsningen $2\cdot3\cdot5$ og hurtigt nå frem til at samtlige divisorer er 1, 2, 3, 5, $2\cdot3$, $2\cdot5$, $3\cdot5$ og $2\cdot3\cdot5$. Tilsvarende er samtlige divisorer i $16=2^4$ tallene $1,2,2^2,2^3,2^4$.

Primtallene fungerer som en slags byggesten alle positive heltal er bygget op af, og derfor er de helt centrale når man arbejder med hele tal.

Opgave 9. Hvilket af følgende tal går ikke op i $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^4$?

A) 6 B) 14 C) 39 D) 121 E) 64

Opgave 10. En mand har hele sin formue fordelt i solide skindposer der hver indeholder 49 guldmønter. En dag omfordeler han formuen så den i stedet ligger i 35 bokse med lige mange guldmønter i hver. Der går forskellige rygter om hvor mange guldmønter hans formue udgør i alt. Hvilket af de fem rygter A, B, C, D og E nedenfor er måske sandt?

A) 70705 B) 6335 C) 2450 D) 70707 E) 4931

(*Georg Mohr 2014, opgave 9*)

Opgave 11. Fire forskellige positive heltal giver 1001 når man ganger dem sammen. Hvad er deres sum?

Opgave 12. Tallene fra 1 til n står på en lang liste. Fra listen fjernes nu alle tal som 3 går op i, og alle tal som 5 går op i. Herefter står der 240 tal tilbage på listen. Det oplyses at både 3 og 5 går op i tallet n. Hvad er n?

(*Georg Mohr 2014, opgave 15*)

Opgave 13. Om de hele tal a, b og c vides at $a^2b^3c^4 = -27$. Hvor mange muligheder er der for værdien af c?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(*Georg Mohr 2016, opgave 7*)

Opgave 14. Lad p være et primtal. Hvor mange forskellige positive heltal går op i p^{10}?

Sidste ciffer

Sidste ciffer i summen af to tal Hvis man skal bestemme sidste ciffer i en sum af to heltal, kan man blot se på det sidste ciffer i hvert af de to tal, lægge dem sammen og finde sidste ciffer i denne sum. Fx er sidste ciffer i $947568 + 3749663$ lig med 1 da $8 + 3 = 11$.

Sidste ciffer i produktet af to tal Hvis man tilsvarende skal finde sidste ciffer i produktet at to tal, kan man igen blot tage sidste ciffer i hver af de to faktorer og finde sidste ciffer i deres produkt. Fx er sidste ciffer i $9328578 \cdot 2648658$ lig med 4, da $8 \cdot 8 = 64$.

Eksempel Vi ønsker at bestemme sidste ciffer i 2007^{2007}. Da sidste ciffer i et tal kun afhænger af det sidste ciffer i hver af faktorerne, svarer det til at finde sidste ciffer i 7^{2007}. Dette er stadig et kæmpe tal som er helt umuligt at udregne, så vi har brug for at reducere problemet yderligere.

Hvis vi ser på $7^2 = 49$, så slutter det på 9. Det kan vi bruge, når vi skal finde sidste ciffer i $7^3 = 7 \cdot 7^2$, for det må jo være det samme som sidste ciffer i $7 \cdot 9 = 63$, altså 3. Tilsvarende må sidste ciffer i $7^4 = 7 \cdot 7^3$ være det samme som sidste ciffer i $7 \cdot 3 = 21$, altså 1. Sidste ciffer i $7^5 = 7 \cdot 7^4$ er lig med sidste ciffer i $7 \cdot 1 = 7$. Sidste ciffer i 7^6 er sidste ciffer i $7 \cdot 7 = 49$, osv. Da sidste ciffer i 7^n hele tiden kun afhænger sidste ciffer i 7^{n-1} ganget med 7, kan vi se at der kommer et fast mønster i sidste ciffer i potenserne:

Potens	7	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	...
Sidste ciffer	7	9	3	1	7	9	3	1	7	...

Sidste ciffer i potenserne gentager sig altså med en periode på 4. Derfor er det nu ikke svært at bestemme sidste ciffer i 7^{2007}. Da $2007 = 4 \cdot 501 + 3$, kan vi se at 7^{2007} må have samme sidste ciffer som 7^3, dvs. 3.

Opgave 15. Hvad er sidste ciffer i 74851^3?

Opgave 16. Hvad er sidste ciffer i 9^{2013}?

Opgave 17. Hvilket af følgende tal ender ikke på 5?

A) $5+15+25+35+45$ B) $5\cdot 15\cdot 25\cdot 35\cdot 45$ C) 19^2-16^2

D) $\frac{20\cdot 35\cdot 9}{4\cdot 15}$ E) $25^{25}-25^5$

(*Georg Mohr 2011, opgave 11*)

Opgave 18. Tallet 2000^{1000} er et tal som ender på mange nuller. Hvad er det sidste ciffer som ikke er et nul?

Opgave 19. En person har udregnet n^{16} for alle værdier af n fra 1 til 100 og omhyggelig noteret sidste ciffer af hvert af resultaterne på et stykke papir. Hvor mange forskellige cifre optræder der på dette stykke papir?

Mere om delelighed

Nogle helt grundlæggende delelighedsregeler for sum og differens:

Sum Hvis et heltal d går op i to heltal n og m, da går d også op i deres sum $n+m$. Hvis fx $a=3b+12c$, da må 3 gå op i a fordi 3 går op i $3b$, og 3 går op i $12c$, og dermed også i summen $3b+12c$.

Differens Hvis et heltal d går op i to heltal n og m, da går d også op i deres differens $n-m$.

Eksempel Hvis der om to positive heltal a og b gælder at

$$a+5b=b^3,$$

da kan vi slutte at b må gå op i a fordi b går op i $5b$ og i b^3, og dermed også i deres differens $a=b^3-5b$.

Eksempel Vi ønsker at bestemme alle positive heltal a så $a+3$ går op i $4a+16$. Derfor omskriver vi $4a+16$:

$$4a+16=4(a+3)+4.$$

Hvis $a+3$ skal gå op i tallet $4a+16$, må det derfor også gå op i $4=4a+16-4(a+3)$. Det eneste positive heltal a for hvilket $a+3$ går op i 4, er $a=1$.

Opgave 20. Det positive heltal n har egenskaben at $4n+1$ går op i $12n+10$. Hvad er tværsummen af n?

A) 6 B) 7 C) 11 D) Der er flere muligheder

E) Der findes ingen n med denne egenskab

Opgave 21. Hvilket af følgende tal er ikke deleligt med 18?

A) 540 B) $1818+7216$ C) $36\cdot 4226$

D) $2007\cdot 2008\cdot 2009$ E) $9\cdot 888-8\cdot 999$

(*Georg Mohr 2008, opgave 5*)

Opgave 22. Hvor mange positive heltal n findes der så $2n+1$ går op i $8n+69$?

Opgave 23. Om de hele tal n og m ved man at $n+m=n^2$. Dermed kan man med sikkerhed slutte at

A) n går op i m B) m går op i n C) n og m er ulige

D) n og m er lige E) $n=m$

Ekstra udfordringer

Opgave 24. Peter og hans venner har 100 store chokoladefrøer. De deler dem så de får lige mange hver. Peter spiser straks en af sine frøer og en til, men på et tidspunkt bliver han dårlig og spiser ikke flere. Han regner ud at han har spist helt præcis en fjerdedel af sine frøer. Hvor mange frøer har Peter tilbage?

(*Georg Mohr 2017, opgave 18*)

Opgave 25. I en kasse ligger der tres sedler nummereret fra 1 til 60. I en anden kasse ligger der også tres sedler nummereret fra 1 til 60. Tres personer trækker hver en tilfældig seddel fra hver kasse og ganger deres to tal sammen. Hvis 6 går op i resultatet, får personen en sodavand. Hvor mange sodavand er der højst brug for?

(*Georg Mohr 2015, opgave 19*)

Opgave 26. Det oplyses at ét af tallene 14, 15, 16, 20, 25 er løsning til ligningen

$$5x^5 + 3x^3 + x = 3604065 + 4x^4 + 2x^2.$$

Hvilket af tallene er det?

A) 14 B) 15 C) 16 D) 20 E) 25

(*Georg Mohr 2014, opgave 10*)

Opgave 27. På gulvet har Georg stillet 1001 spande op i en lang række efter hinanden. I første runde lægger Georg en glaskugle i hver af de 1001 spande. I anden runde lægger han en glaskugle i hver anden spand, og han starter med at lægge en glaskugle i den forreste spand. Sådan fortsætter han i 1000 runder hvor han i runde nummer n lægger en glaskugle i hver n'te spand, og han starter altid med at lægge en glaskugle i den forreste spand. Hvor mange glaskugler er der til slut i den sidste spand?

(*Georg Mohr 2018, opgave 18*)

Opgave 28. Tallene a, b, c, d, e og f er hele positive tal under 1000, og de opfylder

$$4a = 5b = 6c = 7d = 8e = 9f\ .$$

Hvad er tallet a?

(*Georg Mohr 2016, opgave 19*)

Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: 4. Ved at benytte tværsumsreglen for delelighed med 9 ses umiddelbart at 9393939 og 111111111 er delelige med 9, mens 123456 ikke er. Tallet 123456 har tværsum 21, og det er derfor deleligt med 3. Tallet 15 er også deleligt med 3. Altså er deres produkt $123456 \cdot 15$ deleligt med $9 = 3^2$. Tallet $99 \cdot 111$ er deleligt med 9, da den ene af faktorerne er delelig med 9.

Opgave 2 Svar: B. Tallet 3 går ikke op i $12445 + 54421 = 66866$ da det ikke går op i tværsummen. Det er let at se at det går op i de fire andre muligheder ved at bruge tværsumsreglen.

Opgave 3 Svar: C. Da x er fremkommet ved at gange et helt tal med 9, må 3 gå op i x da 3 går op i 9. Vi kan udelukke de andre muligheder: Hvis Georg tænker på 2, er $x = 27$, hvilket udelukker B, D og E. Hvis Georg tænker på 3, er $x = 72$, hvilket udelukker A.

Opgave 4 Svar: 1123. Hvis et 3-cifret tal består af cifrene 1, 2 og 3, så går 3 op i tallet da det går op i tværsummen. Altså skal det tal vi leder efter, mindst have fire cifre. Det mindste 4-cifrede tal der kun består af cifrene 1, 2 og 3, og som indeholder hvert ciffer mindst en gang, er 1123, og her går 3 ikke op da det ikke går op i tværsummen.

Opgave 5 Svar: D.

A) Da 4 går op i 100, kan man se om 4 går op i et tal udelukkende ved at se på de to sidste cifre. Tallet 4 går fx op i 13524, da det går op i 24.

B) Da 5 går op i et tal hvis det slutter på 0 eller 5, går 5 fx op i 12345.

C) Da 6 går op i et tal netop hvis både 2 og 3 går op, går 6 fx op i 54132.

D) Den alternerende tværsum af et tal med cifrene 1, 2, 3, 4 og 5 kan aldrig blive delelig med 11 da den altid vil ligge mellem −9 og 9 fordi $5+4+3-2-1 = 9$, og den ikke kan blive 0 da der er tre ulige tal. Dermed går 11 ikke op i nogen af tallene bestående af cifrene 1, 2, 3, 4 og 5.

E) Da 125 går op i 1000, kan man se på de sidste tre cifre i et tal om 125 går op. Tallet 125 går fx derfor op i 24125 da det går op i 125.

Opgave 6 Svar: D. Hvis $x + y$ er ulige, er det ene tal lige og det andet ulige. Hvis $x \cdot y$ er ulige, er begge tal ulige. A og D kan derfor ikke begge tale sandt. Det betyder at B, C og E taler sandt. Altså er $y = 2x$, hvilket viser at y er lige. Derfor må D lyve. Vi kan se at alle andre taler sandt hvis fx $x = 3$ og $y = 6$.

Opgave 7 Svar: D. Hvis n er delelig med 6, må n være lige. Derfor er både n og m lige tal, og deres sum er derfor også lige. Da 2 går op i m og 2 går op i $n+m$, må $4 = 2\cdot 2$ gå op i $m(n+m)$. Ingen af de andre muligheder er altid delelig med 4: A) $n+m$ er ikke altid delelig med 4, fx ikke for $n=2$ og $m=12$. B) $nm-m$, C) m^2+n og E) $n(m+1)$ er ikke altid delelig med 4, fx ikke for $n=2$ og $m=6$.

Opgave 8 Svar: B. Bent får udleveret de gaver der af tilbage af gaverne 3, 6 og 9 hvis han går op til slut. Da ingen af de andres yndlingstal går op i hverken 3 eller 9, må de være tilbage til slut, mens 6 er taget af enten Arne eller Ella. Altså får Bent to gaver hvis han er til sidst. Det samme gælder ikke for nogen af de andre. Hvis Arne er til slut, får han kun gaven 2. Hvis Carl eller Ella er til slut, får de ingen gaver. Hvis Dora er til slut, får hun kun gaven 5.

Opgave 9 Svar D. Man kan se af primfaktoropløsningen $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ at tallet $121 = 11^2$ ikke går op. Det er nemt at se ud fra primfaktor-opløsningen at $6 = 2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, $39 = 3 \cdot 13$ og $64 = 2^6$ alle går op i $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Opgave 10 Svar C. Da guldmønterne kan fordeles i skindposer der hver indeholder 49 guldmønter, må $49 = 7^2$ gå op i antallet af guldmønter. Da guldmønterne kan fordeles i 35 bokse med lige mange guldmønter i hver, må $35 = 5 \cdot 7$ gå op i antallet af guldmønter. Det betyder at $5 \cdot 7^2 = 245$ går op i antallet af guldmønter. Det er derfor muligt at manden har $2450 = 245 \cdot 10$ guldmønter. De andre rygter er ikke sande da 245 ikke går op i de andre tal.

Opgave 11 Svar: 32. Primfaktoropløsningen af 1001 er $7 \cdot 11 \cdot 13$. Hvis produktet af fire forskellige positive heltal skal give 1001, må disse derfor være 1, 7, 11 og 13. Deres sum er 32.

Opgave 12 Svar: 450. Da 3 og 5 går op i n, så må $3 \cdot 5 = 15$ gå op i n. Læg mærke til at af tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, fjernes 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, dvs. der er 8 tal tilbage. Dette mønster gentager sig for de næste 15 tal osv. Da der til slut er $240 = 8 \cdot 30$ tal tilbage, må der fra starten være $n = 15 \cdot 30 = 450$.

Opgave 13 Svar: C. De hele tal a, b og c skal opfylde at

$$a^2 b^3 c^4 = -27 = -3^3.$$

Altså skal c^4 gå op i 3^3. Tallet c^4 er et helt positivt tal, og de eneste positive tal der går op i 3^3 er 1, 3, 3^2 og 3^3, og af dem er det kun 1 der kan være lig med c^4. De eneste hele tal c der er løsning til $c^4 = 1$, er $c = 1$ og $c = -1$. Disse opfylder begge ligningen når $a = 1$ og $b = -3$. Der er derfor 2 muligheder for c.

Opgave 14 Svar: 11. Divisorerne i p^{10} er netop $1, p, p^2, p^3, \dots, p^{10}$.

Opgave 15 Svar: 1. Da sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne, er sidste ciffer i 74851^3 lig med sidste ciffer i $1^3 = 1$, dvs. 1.

Opgave 16 Svar: 9. Da $9^2 = 81$ har 1 som sidste ciffer, må $9^3 = 9 \cdot 9^2$ have samme sidste ciffer som $9 \cdot 1 = 9$. Tilsvarende må $9^4 = 9 \cdot 9^3$ have samme sidste ciffer som $9 \cdot 9 = 81$, dvs. 1, og sådan fortætter det. Dette viser at 9^n ender på 1 hvis n er lige, og 9^n ender på 9 hvis n er ulige. Derfor er sidste ciffer i 9^{2013} lig med 9.

Opgave 17 Svar: E.

A) Sidste ciffer i tallet $5+15+25+35+45$ er sidste ciffer i $5+5+5+5+5 = 25$, dvs. sidste ciffer er 5.

B) Sidste ciffer i $5 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 45$ er sidste ciffer i 5^5. Når man ganger 5 med 5, ender det igen på 5, og derfor er sidste ciffer 5.

C) Sidste ciffer i 19^2 er sidste ciffer i $9^2 = 81$, dvs. 1. Sidste ciffer i 16^2 er sidste ciffer i $6^3 = 36$, dvs. 6. Dermed er sidste ciffer i differensen $19^2 - 16^2$ lig med 5.

D) Sidste ciffer i tallet $\frac{20\cdot 35\cdot 9}{4\cdot 15} = \frac{5\cdot 35\cdot 9}{3\cdot 5} = 5 \cdot 7 \cdot 3$ er 5 da det er deleligt med 5, men ikke med 10.

E) Sidste ciffer i 25^{25} er det samme som sidste ciffer i 5^{25}, og som før ved vi at en potens af 5 har 5 som sidste ciffer. Tilsvarende er sidste ciffer i 25^5 også 5. Altså er sidste ciffer i differensen $25^{25} - 25^5$ lig med sidste ciffer i $5 - 5 = 0$, dvs. 0.

Opgave 18 Svar: 6. Tallet

$$2000^{1000} = 2^{1000} \cdot 1000^{1000} = 2^{1000} \cdot 10^{3000},$$

ender på 3000 nuller. Cifferet lige før de 3000 nuller må være sidste ciffer i 2^{1000}. Hvis man ser på potenserne $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9 \dots$ af 2 har de sidste ciffer $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, \dots$, og dette system må fortsætte da sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i faktorerne. Da 1000 er delelig med 4, må 2^{1000} have 6 som sidste ciffer.

Opgave 19 Svar: 4. Sidste ciffer i et produkt afhænger kun af sidste ciffer i hver af faktorerne. Hvis vi skal finde de mulige slutcifre i n^{16} for $n = 1, 2, \dots 100$, behøver vi derfor kun tjekke for $n = 0, 1, 2, \dots, 9$. Vi udnytter at $n^{16} = (((n^2)^2)^2)^2$. For at bestemme de mulige slutcifre i n^2 finder vi slutcifrene i $0^2, 1^1, \dots, 9^2$ og når frem til mulighederne $0, 1, 4, 5, 6, 9$. De mulige slutcifre i $n^4 = (n^2)^2$ kan vi nu finde ved at se på slutcifrene i tallene $0^2, 1^2, 4^2, 5^2, 6^2, 9^2$, og de er $0, 1, 5, 6$. De mulige slutcifre i $n^8 = (n^4)^2$ kan vi nu finde ved at se på slutcifrene i $0^2, 1^2, 5^2, 6^2$, og de er $0, 1, 5, 6$. Når vi gentager dette en gang til for at finde de mulige slutcifre i $n^{16} = (n^8)^2$, får vi endnu engang $0, 1, 5, 6$.

Opgave 20 Svar: E. Hvis $4n + 1$ går op i

$$12n + 10 = 3(4n + 1) + 7,$$

så går $4n + 1$ også op i 7. Der findes ikke noget positivt heltal n så $4n + 1$ går op i 7: For $n = 1$ er $4n + 1 = 5$. For $n \geq 2$ er $4n + 1 \geq 9$, og det kan derfor ikke gå op i 7. Derfor er svaret E).

Opgave 21 Svar: B. Et tal er deleligt med 18 netop hvis det er deleligt med både 9 og med 2, da 9 og 2 ikke har nogen fælles divisorer. Man kan tjekke om 9 går op i et tal ved at se om det går op i tværsummen.

A) 540: Både 9 og 2 går op, og dermed går 18 også op.

B) $1818 + 7216$: 9 går op i 1818, men ikke i 7216, og dermed går det ikke op i summen af de to tal. Altså går 18 heller ikke op.

C) $36 \cdot 4226$: Da 18 går op i 36, går det også op i et multiplum af 36.

D) $2007 \cdot 2008 \cdot 2009$. Da 9 går op i 2007 og 2 går op i 2008, går 18 op i produktet af de to tal, og dermed også i produktet af alle de tre tal.

E) $9 \cdot 888 - 8 \cdot 999$: Da 9 går op i 9, og 2 går op i 888, går 18 op i produktet $9 \cdot 888$. På samme måde ser vi at 18 går op i $8 \cdot 999$. Når 18 går op i begge de to tal, går det også op i differensen.

Opgave 22 Svar: 3. Tallet $2n+1$ går op i

$$8n+69=4(2n+1)+65,$$

netop når det går op i 65. Divisorerne i $65=5\cdot 13$ er 1, 5, 13 og 65. Tallet $2n+1$ er større end 1, dvs. det skal være lig med 5, 13 eller 65. Tallet n er derfor 2, 6 eller 32.

Opgave 23 Svar: A). Når $n+m=n^2$, må n gå op i $m=n^2-n$, da n går op i både n^2 og n og dermed også i deres differens.

Da $n=3$ og $m=6$ opfylder at $n+m=n^2$, kan vi ikke slutte hverken B) m går op i n, C) n og m er ulige, D) n og m er lige, eller E) $n=m$.

Opgave 24 Svar: 15. Peter spiser n chokoladefrøer, og vi ved fra opgaven at $n>1$. Da Peter spiser $\frac{1}{4}$ af sine frøer, får Peter $4n$ chokoladefrøer. Lad m være antal personer som deler chokoladefrøerne. Vi ved at Peter har flere venner, dvs. m er mindst 3. Da hver person får $4n$ chokoladefrøer, er

$$4n\cdot m=100 \quad \Leftrightarrow n\cdot m=25=5^2.$$

Nu er n og m to positive hele tal som begge er større end 1, hvis produkt er 5^2, og dermed er eneste mulighed $n=m=5$. Peter får altså $4\cdot 5=20$ frøer, og da han spiser 5, har han til slut 15 tilbage.

Opgave 25 Svar: 40. Hvis en person trækker to sedler hvor $6=2\cdot 3$ går op i resultatet, så skal 3 gå op i mindst et af de to tal. Der er kun 20 sedler i hver kasse hvor 3 gå op, dvs. højst 40 personer kan trække en seddel hvor 3 går op. Det kan faktisk lade sig gøre at der bliver brug for 40 sodavand: I hver kasse er der 20 tal hvor 3 går op, og 20 lige tal ud over disse. Hvis de 20 tal hvor 3 går op, kombineres med de 20 lige tal hvor 3 ikke går op fra den anden kasse, så giver alle disse kombinationer sodavand. Tilsvarende den anden vej rundt.

Opgave 26 Svar: 15. Først omskriver vi ligningen:

$$\begin{aligned}&5x^5+3x^3+x=3604065+4x^4+2x^2 \quad \Leftrightarrow\\ &3604065=x(5x^4+3x^2+1-4x^3-2x).\end{aligned}$$

Vi ved at et af de hele tal 14, 15, 16, 20 og 25 er løsning til ligningen. Tallet x kan ikke være et lige tal, for da er højresiden lige, mens venstresiden er ulige. Det udelukker 14, 16 og 20 som løsninger. Tallet x kan heller ikke være 25, for da ville 25 gå op i højresiden, men ikke i venstresiden: Man ser let at 25 ikke går op i 3604065 da 25 går op i et tal netop hvis det går op i de to sidste cifre. Altså må $x=15$ løse ligningen.

Opgave 27 Svar: 16. Nummerer spandene $0,1,2,3,\dots,1000$. I runde k kommer Georg kugler i samtlige spande med et nummer som k går op i. Fx putter han i runde 3 kugler i spand nummer $0,3,6,\dots,999$. Den sidste spand har nummer $1000=2^3\cdot 5^3$. Til slut har den fået en glaskugle for hver divisor i 1000. Dem er der 16 af, nemlig alle kombinationer af $1,2,2^2,2^3$ ganget med $1,5,5^2,5^3$:

	1	2	2^2	2^3
1	1	2	2^2	2^3
5	5	$2\cdot 5$	$2^2\cdot 5$	$2^3\cdot 5$
5^2	5^2	$2\cdot 5^2$	$2^2\cdot 5^2$	$2^3\cdot 5^2$
5^3	5^3	$2\cdot 5^3$	$2^2\cdot 5^3$	$2^3\cdot 5^3$

Opgave 28 Svar: 630. Når man ser på

$$4a=5b=6c=7d=8e=9f\ ,$$

kan man se at

- $4a=5b$, dvs. at 5 går op i $4a$ og dermed i a da 5 er et primtal som ikke går op i 4.
- $2a=3c$, dvs. at 3 går op i $2a$ og dermed i a da 3 er et primtal som ikke går op i 2.
- $4a=7d$, dvs. at 7 går op i $4a$ og dermed i a da 7 er et primtal som ikke går op i 4.
- $a=2e$, dvs. at 2 går op i a.
- $4a=3^2f$, dvs. at 3^2 går op i $4a$ og dermed i a da 3 er et primtal som ikke går op i 4.

Da både 2, 3, 3^2, 5 og 7 skal gå op i a, må $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=630$ gå op i a da $2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$ er det mindste tal som er delelig med både 2, 3, 3^2, 5 og 7. Da a højst er 1000, må $a=630$. Bemærk at ligningerne er sande når $a=2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=630$, $b=2^3\cdot 3^2\cdot 7=504$, $c=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420$, $d=2^3\cdot 3^2\cdot 5=360$, $e=3^2\cdot 5\cdot 7=315$, $f=2^3\cdot 5\cdot 7=280$.