



Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Talteori

Talteori handler om de hele tal, og særligt om hvornår et helt tal er deleligt med et andet. Derfor spiller primtallene en helt central rolle i talteori, hvilket vi skal se på om lidt.

Her præsenteres idéer til hvordan man løser talteoriopgaver. Det er ikke en særlig teoretisk indføring, men der er i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man benytter fx delelighedsregler og primfaktoropløsning. For at blive god til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor man har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningskitser til alle opgaver bagerst.

Divisor Tallet 3 går op i 99 da $99 = 3 \cdot 33$. Mere generelt gælder at hvis d og n er hele tal, så går d op i n hvis der findes et helt tal q så

$$n = q \cdot d.$$

Vi siger også at d er *divisor* i n , eller at n er *delelig med* d .

Primaltal Et positivt heltal større end 1 kaldes et primaltal hvis de eneste positive divisorer i tallet er 1 og tallet selv. De første ti primtal er derfor

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Delelighedsregler Der findes mange regler om delelighed. Børn lærer hurtigt at 2 går op i et tal når sidste ciffer er lige, og at 5 går op i et tal når sidste ciffer er 0 eller 5, men der findes flere regler som ikke er helt så kendte og intuitive.

3-reglen Tallet 3 går op i et tal netop hvis det går op i tværsommen. Tværsommen af et tal er summen af dets cifre. Fx går 3 op i 1911114 da 3 går op i tværsommen $1 + 9 + 1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 18$.

9-reglen Tallet 9 går op i et tal netop hvis det går op i tværsommen. Fx går 9 op i 1911114 da det går op i tværsommen 18.

11-reglen Tallet 11 går op i et tal hvis det går op i den alternerende tværsom. Den alternerende tværsom af et tal får man ved at lægge hvert andet ciffer til og trække hvert andet ciffer fra. Fx går 11 op i 918592950 da den alternerende tværsom er $9 - 1 + 8 - 5 + 9 - 2 + 9 - 5 + 0 = 22$

Produkt af primtal Et produkt $p \cdot q$ af to forskellige primtal p og q går op i et tal hvis både p og q går op. Hvis vi fx skal undersøge om et tal er deleligt med $6 = 2 \cdot 3$, så skal vi blot tjekke om det både er deleligt med 2 og med 3.

Produkt Hvis der om de hele tal n , m , a og b gælder at n går op i a og m går op i b , så går $n \cdot m$ op i $a \cdot b$. Fx går $27 = 3 \cdot 9$ op i $6 \cdot 1971$ da 3 går op i 6, og 9 går op i 1971.

Opgave 1. Hvor mange af følgende fem tal er delelige med 9?

9393939, 111111111, 123456, $123456 \cdot 15$, $99 \cdot 111$

Opgave 2. Hvilket af følgende tal er ikke deleligt med 3?

A) $333 + 45519$ B) $12445 + 54421$ C) $2777 + 7222$
D) $9416 + 7864$ E) $212121 + 414141$



Opgave 3. Hvilken af følgende opgaver er uløselig? Dan et 5-cifret tal bestående af alle cifrene 1, 2, 3, 4 og 5 så

- A) 4 går op i tallet B) 5 går op i tallet C) 6 går op i tallet
D) 11 går op i tallet E) 125 går op i tallet

Opgave 4. Hvis m er et lige tal, og n er delelig med 6, hvilket af følgende tal er så med sikkerhed deleligt med 4?

- A) $m + n$ B) $mn - m$ C) $m^2 + n$ D) $m(m + n)$ E) $(m + 1)n$

Primfaktoropløsning Når vi primfaktoropløser et tal, skriver vi det som et produkt af primtal. Fx er primfaktoropløsningen af 60 lig med $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, mens primfaktoropløsningen af 6 er lig med $2 \cdot 3$ og primfaktoropløsningen af 13 blot er 13. Alle positive heltal større end 1 har en primfaktoropløsning, og den er entydig på nær rækkefølgen af faktorerne.

Primfaktoropløsningen af et tal fortæller noget om hvilke tal der går op i tallet. Fx kan man umiddelbart se at 7 går op i $2^8 \cdot 5^2 \cdot 7^9 \cdot 19$, mens 13 og 17 ikke går op. Man kan også se at $25 = 5^2$ og $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ går op.

Hvis man fx skal bestemme samtlige divisorer i 30, så kan man se på primfaktoropløsningen $2 \cdot 3 \cdot 5$ og hurtigt nå frem til at samtlige divisorer er 1, 2, 3, 5, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$ og $2 \cdot 3 \cdot 5$. Tilsvarende er samtlige divisorer i $16 = 2^4$ tallene 1, 2, 2^2 , 2^3 , 2^4 .

Primtallene fungerer som en slags byggesten alle positive heltal er bygget op af, og derfor er de helt centrale når man arbejder med hele tal.

Kvadrattal Et kvadrattal er et tal på formen n^2 , hvor n er et heltal. Kvadrattalene er derfor

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$$

Man kan fx nemt se at tallet med primfaktoropløsning $2^8 \cdot 7^2 \cdot 13^4$ er et kvadrattal da alle eksponenterne er lige, og vi derfor kan omskrive til et kvadrat $(2^4 \cdot 7 \cdot 13^2)^2$.

Opgave 5. Hvilket af følgende tal går ikke op i $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13^4$?

- A) 6 B) 14 C) 39 D) 121 E) 64

Opgave 6. Fire forskellige positive heltal giver 1001 når man ganger dem sammen. Hvad er deres sum?

Opgave 7. Hvor mange kvadrattal går op i $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$?

Opgave 8. Lad p være et primtal. Hvor mange forskellige positive heltal går op i p^{10} ?

Opgave 9. Hvilket af følgende tal er ikke et kvadrattal?

- A) 392025 B) 90000 C) 34969 D) $5^6 \cdot 7^2$ E) 119716

Sidste ciffer Nu ser vi på hvordan man kan bestemme sidste ciffer uden at bestemme hele tallet.

Sidste ciffer i summen af to tal Hvis man skal bestemme sidste ciffer i en sum af to heltal, kan man blot se på det sidste ciffer i hvert af de to tal, lægge dem sammen og finde sidste ciffer i denne sum. Fx er sidste ciffer i $947568 + 3749663$ lig med 1 da $8 + 3 = 11$.

Sidste ciffer i produktet af to tal Hvis man tilsvarende skal finde sidste ciffer i produktet af to tal, kan man igen blot tage sidste ciffer i hver af de to faktorer og finde sidste ciffer i deres produkt. Fx er sidste ciffer i $9328578 \cdot 2648658$ lig med 4, da $8 \cdot 8 = 64$.

Eksempel Vi ønsker at bestemme sidste ciffer i 2007^{2007} . Da sidste ciffer i et tal kun afhænger af det sidste ciffer i hver af faktorerne, svarer det til at finde sidste ciffer i 7^{2007} . Dette er stadig et kæmpe tal som er helt umuligt at udregne, så vi har brug for at reducere problemet yderligere.



Hvis vi ser på $7^2 = 49$, så slutter det på 9. Det kan vi bruge, når vi skal finde sidste ciffer i $7^3 = 7 \cdot 7^2$, for det må jo være det samme som sidste ciffer i $7 \cdot 9 = 63$, altså 3. Tilsvarende må sidste ciffer i $7^4 = 7 \cdot 7^3$ være det samme som sidste ciffer i $7 \cdot 3 = 21$, altså 1. Sidste ciffer i $7^5 = 7 \cdot 7^4$ er lig med sidste ciffer i $7 \cdot 1 = 7$. Sidste ciffer i 7^6 er sidste ciffer i $7 \cdot 7 = 49$, osv. Da sidste ciffer i 7^n hele tiden kun afhænger af sidste ciffer i 7^{n-1} ganget med 7, kan vi se at der kommer et fast mønster i sidste ciffer i potenserne:

Potens	7	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	...
Sidste ciffer	7	9	3	1	7	9	3	1	7	...

Sidste ciffer i potenserne gentager sig altså med en periode på 4. Derfor er det nu ikke svært at bestemme sidste ciffer i 7^{2007} . Da $2007 = 4 \cdot 501 + 3$, kan vi se at 7^{2007} må have samme sidste ciffer som 7^3 , dvs. 3.

Opgave 10. Hvad er sidste ciffer i 74851^3 ?

Opgave 11. Hvad er sidste ciffer i 9^{2013} ?

Opgave 12. Hvilket af følgende tal ender ikke på 5?

- A) $5 + 15 + 25 + 35 + 45$ B) $5 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 45$ C) $19^2 - 16^2$
 D) $\frac{20 \cdot 35 \cdot 9}{4 \cdot 15}$ E) $25^{25} - 25^5$

Opgave 13. Tallet $\sqrt{2000^{2000}}$ er et tal som ender på mange nuller. Hvad er det sidste ciffer som ikke er et nul?

Opgave 14. En person har udregnet n^{16} for alle værdier af n fra 1 til 100 og omhyggelig noteret sidste ciffer af hvert af resultaterne på et stykke papir. Hvor mange forskellige cifre optræder der på dette stykke papir?

Mere om delelighed En helt grundlæggende delelighedsregel:

Sum og differens Hvis et heltal d går op i to heltal n og m , da går d også op i deres sum $n + m$ og i deres differens $n - m$. Hvis fx $a = 3b + 12c$, da må 3 gå op i a fordi 3 går op i $3b$, og 3 går op i $12c$, og dermed også i summen $3b + 12c$.

Eksempel Hvis der om to positive heltal a og b gælder at

$$a + 5b = b^3,$$

da kan vi slutte at b må gå op i a fordi b går op i $5b$ og i b^3 , og dermed også i deres differens $a = b^3 - 5b$.

Eksempel Vi ønsker at bestemme alle positive heltal a så $a + 3$ går op i $4a + 16$. Derfor omskriver vi $4a + 16$:

$$4a + 16 = 4(a + 3) + 4.$$

Hvis $a + 3$ skal gå op i tallet $4a + 16$, må det derfor også gå op i $4 = 4a + 16 - 4(a + 3)$. Det eneste positive heltal a for hvilket $a + 3$ går op i 4, er $a = 1$.

Opgave 15. Det positive heltal n har egenskaben at $4n + 1$ går op i $12n + 10$. Hvad er tværsommen af n ?

- A) 6 B) 7 C) 11 D) Der er flere muligheder E) Der findes ingen n med denne egenskab

Opgave 16. Hvilket af følgende tal er ikke deleligt med 18?

- A) 540 B) $1818 + 7216$ C) $36 \cdot 4226$
 D) $2007 \cdot 2008 \cdot 2009$ E) $9 \cdot 888 - 8 \cdot 999$

Opgave 17. Hvor mange positive heltal n findes der så $2n + 1$ går op i $8n + 69$?

Opgave 18. Om de hele tal n og m ved man at $n + m = n^2$. Dermed kan man med sikkerhed slutte at

- A) n går op i m B) m går op i n C) n og m er ulige
 D) n og m er lige E) $n = m$



Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: 4. Ved at benytte tværsumsreglen for delelighed med 9 ses umiddelbart at 9393939 og 11111111 er delelige med 9, mens 123456 ikke er. Tallet 123456 har tværsum 21, og det er derfor deleligt med 3. Tallet 15 er også deleligt med 3. Altså er deres produkt $123456 \cdot 15$ deleligt med $9 = 3^2$. Tallet $99 \cdot 111$ er deleligt med 9, da den ene af faktorerne er delelig med 9.

Opgave 2 Svar: B. Tallet 3 går ikke op i $12445 + 54421 = 66866$ da det ikke går op i tværsummen. Det er let at se at det går op i de fire andre muligheder ved at bruge tværsumsreglen.

Opgave 3 Svar: D.

- A) Da 4 går op i 100, kan man se om 4 går op i et tal udelukkende ved at se på de to sidste cifre. Tallet 4 går fx op i 13524, da det går op i 24.
- B) Da 5 går op i et tal hvis det slutter på 0 eller 5, går 5 fx op i 12345.
- C) Da 6 går op i et tal netop hvis både 2 og 3 går op, går 6 fx op i 54132.
- D) Den alternerende tværsum af et tal med cifrene 1, 2, 3, 4 og 5 kan aldrig blive delelig med 11 da den altid vil ligge mellem -9 og 9 fordi $5+4+3-2-1=9$, og den ikke kan blive 0 da der er tre ulige tal. Dermed går 11 ikke op i nogen af tallene bestående af cifrene 1, 2, 3, 4 og 5.
- E) Da 125 går op i 1000, kan man se på de sidste tre cifre i et tal om 125 går op. Tallet 125 går fx derfor op i 24125 da det går op i 125.

Opgave 4 Svar: D. Hvis n er delelig med 6, må n være lige. Derfor er både n og m lige tal, og deres sum er derfor også lige. Da 2 går op i m og 2 går op i $n + m$, må $4 = 2 \cdot 2$ gå op i $m(n + m)$. Ingen af de andre muligheder er altid delelig med 4: A) $n + m$ er ikke altid

delelig med 4, fx ikke for $n = 2$ og $m = 12$. B) $nm - m$, C) $m^2 + n$ og E) $n(m + 1)$ er ikke altid delelig med 4, fx ikke for $n = 2$ og $m = 6$.

Opgave 5 Svar D. Man kan se af primfaktoropløsningen $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ at tallet $121 = 11^2$ ikke går op. Det er nemt at se ud fra primfaktoropløsningen at $6 = 2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$, $39 = 3 \cdot 13$ og $64 = 2^6$ alle går op i $2^9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

Opgave 6 Svar: 32. Primfaktoropløsningen af 1001 er $7 \cdot 11 \cdot 13$. Hvis produktet af fire forskellige positive heltal skal give 1001, må disse derfor være 1, 7, 11 og 13. Deres sum er 32

Opgave 7 Svar: 6. De eneste kvadrattal som går op i $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$, er på formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, hvor a er lig med 0, 2 eller 4, b er 0 eller 2, og c er 0. Kvadrattallene som går op i $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$, er derfor netop $1, 2^2, 2^4, 3^2, 2^2 \cdot 3^2$ og $2^4 \cdot 3^2$.

Opgave 8 Svar: 11. Divisorerne i p^{10} er netop $1, p, p^2, p^3, \dots, p^{10}$.

Opgave 9 Svar: A. Tallet 392025 har tværsum 21, og det er derfor deleligt med 3, men ikke med $9 = 3^2$. Det kan altså ikke være et kvadrattal, for hvis 3 går op i et kvadrattal, da må 3^2 også gå op i kvadrattallet. Talene i B), C), D) og E) er kvadrattal.

Opgave 10 Svar: 1. Da sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i hver af faktorerne, er sidste ciffer i 74851^3 lig med sidste ciffer i $1^3 = 1$, dvs. 1.

Opgave 11 Svar: 9. Da $9^2 = 81$ har 1 som sidste ciffer, må $9^3 = 9 \cdot 9^2$ have samme sidste ciffer som $9 \cdot 1 = 9$. Tilsvarende må $9^4 = 9 \cdot 9^3$ have samme sidste ciffer som $9 \cdot 9 = 81$, dvs. 1, og sådan fortætter det. Dette viser at 9^n ender på 1 hvis n er lige, og 9^n ender på 9 hvis n er ulige. Derfor er sidste ciffer i 9^{2013} lig med 9.

Opgave 12 Svar: E.

- A) Sidste ciffer i tallet $5 + 15 + 25 + 35 + 45$ er sidste ciffer i $5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 25$, dvs. sidste ciffer er 5.



- B) Sidste ciffer i $5 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35 \cdot 45$ er sidste ciffer i 5^5 . Når man ganger 5 med 5, ender det igen på 5, og derfor er sidste ciffer 5.
- C) Sidste ciffer i 19^2 er sidste ciffer i $9^2 = 81$, dvs. 1. Sidste ciffer i 16^2 er sidste ciffer i $6^3 = 36$, dvs. 6. Dermed er sidste ciffer i differensen $19^2 - 16^2$ lig med 5.
- D) Sidste ciffer i tallet $\frac{20 \cdot 35 \cdot 9}{4 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 35 \cdot 9}{3 \cdot 5} = 5 \cdot 7 \cdot 3$ er 5 da det er deleligt med 5, men ikke med 10.
- E) Sidste ciffer i 25^{25} er det samme som sidste ciffer i 5^{25} , og som før ved vi at en potens af 5 har 5 som sidste ciffer. Tilsvarende er sidste ciffer i 25^5 også 5. Altså er sidste ciffer i differensen $25^{25} - 25^5$ lig med sidste ciffer i $5 - 5 = 0$, dvs. 0.

Opgave 13 Svar: 6. Tallet

$$\sqrt{2000^{2000}} = 2000^{1000} = 2^{1000} \cdot 1000^{1000} = 2^{1000} \cdot 10^{3000},$$

ender på 3000 nuller. Cifferet lige før de 3000 nuller må være sidste ciffer i 2^{1000} . Hvis man ser på potenserne $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, \dots$ af 2 har de sidste ciffer 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, 2, $\dots$, og dette system må fortsætte da sidste ciffer i et produkt kun afhænger af sidste ciffer i faktorerne. Da 1000 er delelig med 4, må 2^{1000} have 6 som sidste ciffer.

Opgave 14 Svar: 4. Sidste ciffer i et produkt afhænger kun af sidste ciffer i hver af faktorerne. Hvis vi skal finde de mulige slutcifre i n^{16} for $n = 1, 2, \dots, 100$, behøver vi derfor kun tjekke for $n = 0, 1, 2, \dots, 9$. Vi udnytter at $n^{16} = (((n^2)^2)^2)^2$. For at bestemme de mulige slutcifre i n^2 finder vi slutcifrene i $0^2, 1^2, \dots, 9^2$ og når frem til mulighederne 0, 1, 4, 5, 6, 9. De mulige slutcifre i $n^4 = (n^2)^2$ kan vi nu finde ved at se på slutcifrene i tallene $0^2, 1^2, 4^2, 5^2, 6^2, 9^2$, og de er 0, 1, 5, 6. De mulige slutcifre i $n^8 = (n^4)^2$ kan vi nu finde ved at se på slutcifrene i $0^2, 1^2, 5^2, 6^2$, og de er 0, 1, 5, 6. Når vi gentager dette en gang til for at finde de mulige slutcifre i $n^{16} = (n^8)^2$, får vi endnu engang 0, 1, 5, 6.

Opgave 15 Svar: E. Hvis $4n + 1$ går op i

$$12n + 10 = 3(4n + 1) + 7,$$

så går $4n + 1$ også op i 7. Der findes ikke noget positivt heltal n så $4n + 1$ går op i 7: For $n = 1$ er $4n + 1 = 5$. For $n \geq 2$ er $4n + 1 \geq 9$, og det kan derfor ikke gå op i 7. Derfor er svaret E).

Opgave 16 Svar: B. Et tal er deleligt med 18 netop hvis det er deleligt med både 9 og med 2, da 9 og 2 ikke har nogen fælles divisorer. Man kan tjekke om 9 går op i et tal ved at se om det går op i tværsommen.

- A) 540: Både 9 og 2 går op, og dermed går 18 også op.
- B) $1818 + 7216$: 9 går op i 1818, men ikke i 7216, og dermed går det ikke op i summen af de to tal. Altså går 18 heller ikke op.
- C) $36 \cdot 4226$: Da 18 går op i 36, går det også op i et multiplum af 36.
- D) $2007 \cdot 2008 \cdot 2009$. Da 9 går op i 2007 og 2 går op i 2008, går 18 op i produktet af de to tal, og dermed også i produktet af alle de tre tal.
- E) $9 \cdot 888 - 8 \cdot 999$: Da 9 går op i 9, og 2 går op i 888, går 18 op i produktet $9 \cdot 888$. På samme måde ser vi at 18 går op i $8 \cdot 999$. Når 18 går op i begge de to tal, går det også op i differensen.

Opgave 17 Svar: 3. Tallet $2n + 1$ går op i

$$8n + 69 = 4(2n + 1) + 65,$$

netop når det går op i 65. Divisorerne i $65 = 5 \cdot 13$ er 1, 5, 13 og 65. Tallet $2n + 1$ er større end 1, dvs. det skal være lig med 5, 13 eller 65. Tallet n er derfor 2, 6 eller 32.

Opgave 18 Svar: A). Når $n + m = n^2$, må n gå op i $m = n^2 - n$, da n går op i både n^2 og n og dermed også i deres differens.

Da $n = 3$ og $m = 6$ opfylder at $n + m = n^2$, kan vi ikke slutte hverken B) m går op i n , C) n og m er ulige, D) n og m er lige, eller E) $n = m$.