Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Kombinatorik

Her er nogle centrale principper om og strategier for hvordan man tæller et antal kombinationer på en smart måde, samt hvordan man beregner sandsynligheden for at noget indtræffer. Det er ikke en teoretisk indføring, men der er i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man løser kombinatorikopgaver med fokus på 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. For at blive god til 1. runde er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningsskitser til alle opgaver bagerst.

Multiplikationsprincippet Hvis man for at vælge noget først har n valgmuligheder, og derefter for hvert af disse yderligere har m valgmuligheder, så har man samlet $n \cdot m$ valgmuligheder. Man ganger altså antallet af valgmuligheder sammen. Det samme princip gælder hvis man har flere end to delvalg.

Eksempel Hvis man hver dag til morgenmad har tre forskellige slags morgenmadsprodukter at vælge imellem, så skal man i løbet af en uge træffe syv valg hvor man hver gang har tre valgmuligheder. Der er altså i alt 3^7 forskellige kombinationer af ugens morgenmad.

Eksempel I et blomsterbed skal der plantes fem blomster på række, og der er tre forskellige slags blomster at vælge imellem. Hvor mange forskellige muligheder er der for at vælge de fem blomster, når man ikke kun må plante den samme slags?

For hver af de fem blomster der skal plantes, er der tre valgmuligheder. Dvs. hvis vi ser bort fra at vi ikke kun må plante en slags blomster, så er der 3^5. I tre af kombinationerne er der kun en slags blomster, dvs. svaret er $3^5 - 3 = 240$.

Tællestrategi Når man skal tælle hvor mange blandt nogle kombinationer der opfylder en bestemt betingelse, skal man *altid* overveje om det er nemmest at tælle dem der opfylder betingelsen, eller dem der ikke gør.

Eksempel Til en multiple choice-konkurrence er der ti spørgsmål hver med svarmulighederne A, B, C, D og E. På hvor mange måder kan man svare på de ti spørgsmål så der er mindst to spørgsmål i træk hvor man har sat kryds ved samme svarmulighed?

Her er det meget nemmere at tælle på hvor mange måder man kan sætte krydserne, så man ikke har svaret det samme på to spørgsmål i træk, og derefter trække det fra det samlede antal svarmuligheder. Der er 5^{10} svarmuligheder i alt, og der er $5 \cdot 4^9$ kombinationer hvor der ikke svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, fordi vi har fem muligheder for at svare på spørgsmål 1, og derefter fire muligheder for at svare på hvert af de følgende spørsmål, da vi blot ikke må svare det samme som på det foregående. Dermed er der i alt $5^{10} - 5 \cdot 4^9$ måder at svare på de ti spørgsmål så at der findes to på hinanden følgende spørgsmål hvor man har svaret det samme.

Opgave 1. På hvor mange måder kan nedenstående skema fyldes ud med kryds og boller?

Eksempel:

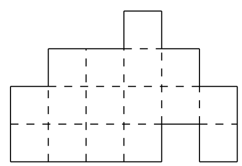
×	○	×
×	×	×
○	×	×

A) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ B) $2 \cdot 9$ C) 2^9 D) 9^2 E) $3 \cdot 2 \cdot 2$

Opgave 2. En perleplade består af 8×8 perler. Anders har fem forskellige farver perler. Hvor mange forskellige perleplader kan Anders lave når han vil have at den yderste kant er ensfarvet?

A) 5^{37} B) 37^5 C) $5^{36}+5$ D) $36 \cdot 5$ E) 36^5+5

Opgave 3. En eller flere af de kedelige grå fliser i det viste område skal hver især erstattes med en gul eller en sort flise. Hvor mange forskellige muligheder er der for det nye udseende af fliseområdet?



A) $16 \cdot 15$ B) $3^{16}-1$ C) $2^{16}-1$ D) 16^2-1 E) 31

Opgave 4. Hvor mange forskellige syvcifrede positive heltal findes der som ikke indeholder cifferet 7?

A) 9^7 B) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ C) $8 \cdot 9^6$ D) 10^7 E) 10^7-7

Opgave 5. Hvor mange forskellige trecifrede positive heltal findes der som indeholder cifferet 7?

Opgave 6. Ved et binært ord af længde n forstås en serie på n cifre som hver er enten 0 eller 1. Ved afstanden mellem to binære ord af samme længde forstås antallet af pladser hvor de to ord afviger. Eksempelvis er afstanden mellem de to ord 100010 og 010011 lig med 3. Hvor mange binære ord af længde seks har afstanden højst 4 fra ordet 100010?

I kombinatorik ønkser man ofte at bestemme antallet af måder man kan udtage noget på i en bestemt rækkefølge.

Eksempel Til et stævne er der 14 hold der kæmper om guld, sølv og bronze. Når man skal bestemme på hvor mange forskellige måder medaljerne kan fordeles, har man 14 muligheder for at uddele guld, 13 for sølv og 12 for bronze, dvs. der er i alt $14 \cdot 13 \cdot 12$ måder at fordele medaljerne på ifølge multiplikationsprincippet.

Generelt kan man stille n ting i rækkefølge på

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

måder da man først har n muligheder for at vælge hvad der skal først, derefter $n-1$ muligheder for at vælge det næste, osv.

Opgave 7. Seks børn leger *En stol for lidt* hvor der står fem stole på række, og børnene skal skynde sig at sætte sig på en stol så snart musikken stopper. På hvor mange forskellige måder kan børnene sidde på stolene når der sidder præcist et barn på hver stol?

Opgave 8. Som password til et diskussionsforum om datasikkerhed har en person brugt de ni bogstaver GEORGMOHR, dog i en anden rækkefølge - som han desværre har glemt. Han husker kun at M var det første bogstav, at H var det sidste, og at ens bogstaver stod lige efter hinanden. Hvor mange muligheder giver det?

Sandsynlighed

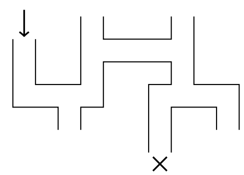
Hvis man skal beregne sandsynligheden for at trække et tal der er deleligt med 4 når man trækker et tilfældigt tal blandt tallene $1, 2, 3, \ldots, 17$, så ved at man at de 17 udfald alle er lige sandsynlige, og at man kun er interesseret i 4 af dem (nemlig $4, 8, 12, 16$), og dermed at sandsynligheden er $\frac{4}{17}$.

Når man har en række lige sandsynlige udfald og skal bestemme sandsynligheden for at få nogle bestemte af disse, så er sandsynligheden altså

$$\frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}.$$

Hvis man derimod skal beregne sandsynligheden for først at få en 1'er og derefter et lige tal når man kaster en sekssidet terning to gange, så er der først $\frac{1}{6}$ sandsynlighed for at slå en 1'er, og derefter er sandsynlighed for at det næste slag er lige $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, dvs. den samlede sandsynlighed er $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$. Her ganger vi altså sandsynlighederne sammen da vi både skal have en 1'er og derefter et lige tal.

Eksempel Marie går ind i labyrinten ved $\downarrow$, og ved hver forgrening slår hun plat og krone om hvilken gren hun skal vælge. Hvad er sandsynligheden for at hun kommer ud ved $\times$?

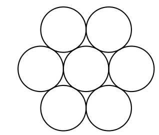


For at bestemme sandsynligheden bemærker vi at Marie for at komme ud ved $\times$ må have slået plat og krone fire gange, og at der for hver gang er sandsynlighed $\frac{1}{2}$ for at hun vælger den rigtige vej. Da vi i hvert af de fire kast skal slå noget bestemt, bliver den samlede sandsynlighed $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.

Eksempel Hvis man skal beregne sandsynligheden for at få mindst en 6'er hvis man kaster en almindelig sekssidet terning tre gange, er det nemmere at finde den modsatte sandsynlighed og trække den fra 1. Lidt ligesom vi før nogle gange talte det modsatte af det vi ønskede at tælle.

Sandsynligheden for ikke at få en 6'er i et kast er $\frac{5}{6}$. Sandsynligheden for ikke at få en 6'er i nogen af de tre kast er derfor $\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$, og sandsynligheden for at få mindst en 6'er i de tre kast er altså $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Opgave 9. De syv tal -3, -2, -1, 0, 1, 2 og 3 anbringes tilfældigt i de syv ringe. Hvad er sandsynligheden for at summen af tallene i de seks yderste ringe er -3?

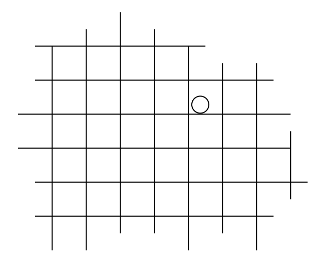


A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{3}{49}$

Opgave 10. Otte små almindelige terninger limes sammen til en større terning. Hvad er sandsynligheden for at ingen 1'ere er synlige?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{256}$ C) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{6}$ E) $\frac{1}{3}$

Opgave 11. En mønt med diameter $\frac{1}{2}$ kastes på et uendeligt kvadratnet bestående af kvadrater med sidelængde 1. Hvad er sandsynligheden for at mønten lander helt inden for et af kvadraterne?

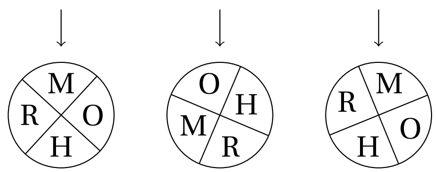


A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{4}{\pi^2}$

Opgave 12. En skødesløs dansklærer og en ryggesløs matematiklærer giver karaktererne -3, 00, 02, 4, 7, 10 og 12 helt tilfældigt. Hvad er sandsynligheden for at ingen i klassen (21 elever) får samme karakter i dansk og matematik?

A) $\frac{21}{7\cdot 7}$ B) $\frac{6}{49}$ C) $\frac{7}{21}\cdot\frac{6}{21}$ D) $21\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}$ E) $\left(\frac{6}{7}\right)^{21}$

Opgave 13. De tre skiver snurres rundt uafhængigt af hinanden. Der er gevinst hvis en (eller, som i det viste eksempel, flere) af dem stopper ved M. Hvad er sandsynligheden for at der er gevinst?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{64}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{27}{64}$ E) $\frac{37}{64}$

Opgave 14. Ni små papbrikker nummereres med tallene $1, 2, 3, \ldots, 9$ og lægges i en pose. Posen rystes, og Marie stikker hånden ned i posen uden at kikke og tager to papbrikker op. Hvad er sandsynligheden for at både summen og produktet af de to udtrukne tal er ulige?

A) 0 B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{25}{81}$ E) 1

Opgave 15. A og B spiller et terningespil med følgende regler: A kaster en terning. Hvis terningen viser 1 eller 6, har A vundet. Hvis den viser 2, 3 eller 4, har B vundet. Hvis den viser 5, skal A kaste den igen, men denne gang betyder 1 eller 6 at B har vundet, hvorimod 2, 3, 4 eller 5 betyder at A har vundet. Hvad er sandsynligheden for at A vinder dette spil?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{6}$

Mere om at tælle

De følgende opgaver er tidligere 1. rundeopgaver i kombinatorik hvor det primært gælder om at tænke logisk og tælle på en hensigtsmæssig måde.

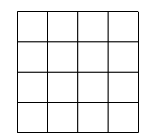
Opgave 16. Hvor mange forskellige eksamensspørgsmål skal en lærer mindst lave til et hold på 22 elever, når hvert spørgsmål må bruges op til tre gange, og når den sidste elev skal kunne vælge mellem mindst fire (ikke nødvendigvis forskellige) spørgsmål?

Opgave 17. Anna har kastet en terning tre gange og fået tre forskellige øjental. Summen af disse øjental er 11. I første og tredje kast viste terningen et lige tal. Intet af kastene var en toer. Hvad viste terningen i andet kast?

Opgave 18. Blandt de 20 elever i Maries klasse er der 13 der har været i Spanien, og 12 der har været i Italien. Fire af eleverne har hverken været i Spanien eller Italien. Hvor mange elever har både været i Spanien og Italien?

Opgave 19. På hvor mange måder kan en gruppe på seks personer inddeles i to grupper på tre personer?

Opgave 20. Peter har afkrydset et af felterne nedenfor med usynligt blæk. Hvor mange ja/nej-spørgsmål skal Marie stille for at være sikker på at kunne udpege det mærkede felt?



Opgave 21. På fem kort er der trykt et symbol på hver side. Et af kortene har symbolet ♣ på den ene side og ♠ på den anden, et bærer symbolerne ♠ og ♡, et har ♢ og ♣, et har ♡ og ♢, og endelig er der et med ♢ og ♠. Jeg blander kortene og lægger dem ud i en række på bordet. Du ser symbolerne:

♢ ♣ ♠ ♣ ♢

Hvilket symbol er der på bagsiden af det midterste kort?

A) ♢ B) ♡ C) ♠ D) ♣ E) Det kan ikke afgøres

Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: C. Da der for hvert af de ni felter er to valgmuligheder, er der i alt 2^9 forskellige måder at udfylde skemaet på.

Opgave 2 Svar: A. For hver af de $6 \cdot 6 = 36$ perler i midten er der fem farvemuligheder. Desuden er der fem farvemuligheder for kanten. Anders skal altså vælge mellem de fem farver 37 gange i alt, dvs. der er 5^{37} forskellige måder at udfylde perlepladen på.

Opgave 3 Svar: B. For hver af de 16 fliser har vi tre valgmuligheder, nemlig at beholde den grå eller at skifte til en gul eller en sort flise. Det giver i alt 3^{16} kombinationer. Dog skal vi trække en fra da vi ikke må beholde alle de gamle grå fliser, men mindst skal udskifte en. Antallet er muligheder er derfor $3^{16} - 1$.

Opgave 4 Svar: C. Det første ciffer må hverken være 0 eller 7, dvs. vi har 8 valgmuligheder for det første ciffer. For hvert af de efterfølgende seks cifre har vi 9 valgmuligheder da vi må vælge alle cifre på nær 7. Dermed er der $8 \cdot 9^6$ tal der opfylder det ønskede.

Opgave 5 Svar: 252. For at tælle hvor mange trecifrede tal der indeholder cifferet 7, tæller vi i stedet antallet af trecifrede tal som ikke indeholder cifferet 7, og trækker det fra det samlede antal af trecifrede tal. Der er i alt $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$ trecifrede tal, og af disse indeholder $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ ikke cifferet 7. Dermed er der $900 - 648 = 252$ trecifrede tal som indeholder cifferet 7.

Opgave 6 Svar: 57. For at tælle antallet af binære ord hvis afstand til 100010 højst er 4, tæller vi i stedet antallet af binære tal hvis afstand til 100010 er større end 4, dvs. er 5 eller 6. Dette antal trækkes derefter fra det samlede antal af binære ord af længde seks. Der er i alt $2^6 = 64$ ord af længde seks da der for hvert af de seks cifre er to valgmuligheder. Der er kun et binært ord af længde seks med afstand 6 til 100010, nemlig 011101. Der er seks binære ord af længde seks med afstand 5 til 100010 da der er seks muligheder for at vælge hvilket ciffer der skal være identisk med det tilsvarende ciffer i 100010, hvorefter resten af cifrene er bestemt. Samlet er der $64 - 1 - 6 = 57$ binære ord af længde seks hvis afstand til 100010 højst er 4.

Opgave 7 Svar: 720. Der er seks muligheder for at placere et barn på den første stol, fem muligheder for den anden stol, osv. Der er altså i alt $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ kombinationer.

Opgave 8 Svar: 24. Mellem det første M og det sidste H skal GG, E, OO og RR placeres i en eller anden række følge. Det kan gøres på $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ måder.

Opgave 9 Svar: C. Summen af tallene i de yderste seks cirkler giver kun -3 når der står 3 i midten. Da der er syv tal der skal placeres i syv cirkler, er sandsynligheden for at 3 er i midten $\frac{1}{7}$.

Opgave 10 Svar: B. For hver terning er tre af de seks sider ikke synlige, dvs. for hver terning er sandsynligheden $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ for at 1'eren ikke er synlig. Sandsynligheden for at ingen af de otte 1'ere er synlige, er derfor $\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$.

Opgave 11 Svar: B. Mønten lander inden for kvadratet netop hvis centrum af mønten lander med en afstand på $\frac{1}{4}$ eller mere fra en kant, dvs. netop hvis centrum af mønten lander i det midterste lille $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ kvadrat af kvadratet. Dette lille kvadrat har areal $\frac{1}{4}$, dvs. alle disse minikvadrater udgør tilsammen $\frac{1}{4}$ af det samlede areal. Derfor er sandsynligheden for at mønten lander helt inden for et af kvadraterne $\frac{1}{4}$.

Opgave 12 Svar: E. Sandsynligheden for at en elev ikke får det samme i dansk som eleven har fået i matematik, er $\frac{6}{7}$. Sandsynligheden for at dette sker for alle 21 elever, er derfor $\left(\frac{6}{7}\right)^{21}$.

Opgave 13 Svar: E. I stedet for at beregne sandsynligheden for gevinst, udregner vi sandsynligheden for ikke at få gevinst og trækker den fra 1. For hver skive er sandsynligheden $\frac{3}{4}$ for ikke at få M. Sandsynligheden for at ingen af skiverne lander på M er derfor $(\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$. Altså er sandsynligheden for at få gevinst $1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}$.

Opgave 14 Svar: A. Hvis produktet af to hele tal er ulige, da er de begge ulige, og da er deres sum lige. Det er altså umuligt at trække to hele tal hvis sum og produkt begge er ulige. Derfor er sandsynligheden 0.

Opgave 15 Svar: D. Sandsynligheden for at slå 1 eller 6 er $\frac{1}{3}$. Sandsynligheden for at slå 5 efterfulgt af 2, 3, 4 eller 5 i næste kast er $\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{9}$. Sandsynligheden for at A vinder er derfor $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

Opgave 16 Svar: 9. Efter at de første 21 har trukket, skal der være mindst fire spørgsmål tilbage, dvs. der skal være mindst 25 spørgsmål i alt. Da hvert spørgsmål højst må indgå tre gange, skal der laves mindst 9 spørgsmål fordi $3 \cdot 8 < 25 \leq 3 \cdot 9$.

Opgave 17 Svar: 1. Da tallene som terningen viste i første og tredje kast, var lige, forskellige og ikke 2, må de have været henholdsvis 4 og 6. I det andet kast viste terningen derfor 1 da summen af de tre tal var 11.

Opgave 18 Svar: 9. Der er $20 - 4 = 16$ elever der har været i Spanien eller Italien. Der er $12 + 13 = 25$ elever der har været i Spanien eller Italien hvis de elever der har været i begge lande, tælles dobbelt. Derfor er der $25 - 16 = 9$ elever der har været i begge lande.

Opgave 19 Svar: 10. Når vi skal inddele de seks personer A, B, C, D, E og F i to grupper, skal vi vælge hvilke to personer A skal være sammen med. Der er fem muligheder for at vælge den første og fire muligheder for at vælge den anden. Dvs. i alt 20 muligheder. Problemet er at vi faktisk har talt hver kombination med to gange. Der er jo ikke forskel på fx først at vælge B og så derefter C, eller først at vælge C og derefter B. Der er altså i alt 10 muligheder for at vælge de to personer A skal være sammen med, og dermed er der 10 måder at inddele seks personer i to grupper. (Husk at hvis du tæller på hvor mange måder man kan vælge tre ud af seks, så får du 20, men så har du også talt hver kombination med to gange, da fx det at vælge A, B og C giver de samme grupper som at vælge D, E og F.)

Opgave 20 Svar: 4. Når man stiller et ja/nej-spørgsmål, kan man højst være sikker på at udelukke halvdelen af svarmulighederne. Marie kan altså ved første spørgsmål højst være sikker på at udelukke 8 af de 16, osv., dvs. hun skal mindst stille 4 spørgsmål. På den anden side kan hun ved hver gang at spørge om det mærkede felt er blandt en bestemt halvdel af de felter hun ikke allerede har udelukket, netop udelukke halvdelen hver gang, og hun identificerer på denne måde det mærkede felt efter netop 4 spørgsmål.

Opgave 21 Svar: B. Da to ud af de fem kort viser ♣, og der kun er to kort med ♣, må disse to kort ligge på plads 2 og 4. Nu er der yderligere to kort der viser ♢, og der er kun to kort med ♢ tilbage. De må derfor ligge på plads 1 og 5. Det midterste kort er derfor kortet ♡-♠, dvs. på bagsiden er der ♡.