Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Geometri

Her er nogle centrale principper om og strategier for hvordan man løser geometriopgaver. Det er ikke en teoretisk indføring, men der i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man løser opgaver ved at se på vinkler, areal, ensvinklede trekanter og retvinklede trekanter med fokus på 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen. Opgaverne kræver ikke trigonometri.

For at blive god til 1. runde er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

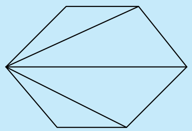
Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningsskitser til alle opgaver bagerst.

Vinkler

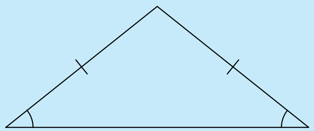
Når man skal bestemme en vinkel i en geometrisk figur, skal man først danne sig et overblik over hvad man ved om vinklerne i figuren.

Husk at vinkelsummen i en trekant er 180°, vinkelsummen i en firkant er 360°, og at femkanter, sekskanter, osv. kan inddeles i trekanter for at bestemme deres vinkelsum.

Desuden er det en god idé at se efter ligebenede trekanter og udnytte at vinklerne ved grundlinjen er ens.

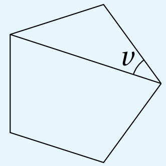


Sekskant inddelt i fire trekanter



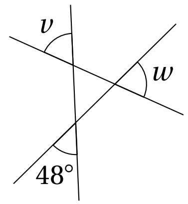
Ligebenet trekant med to ens vinkler

Eksempel På figuren er tegnet en regulær femkant, dvs. en femkant hvor alle sider er lige lange, og alle vinkler er lige store. Vi ønsker at bestemme den markerede vinkel v.



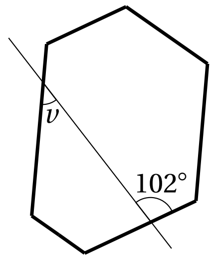
Da en femkant kan inddeles i tre trekanter, er vinkelsummen i en femkant $3 \cdot 180° = 540°$. Derfor er hver af vinklerne $\frac{540°}{5} = 108°$. I den markerede trekant hvor vinklen v indgår, er den store vinkel derfor 108°, mens de to små vinkler er lige store da trekanten er ligebenet. Altså er $v = \frac{180°-108°}{2} = 36°$.

Opgave 1. Hvor mange grader er vinkel v og vinkel w tilsammen?



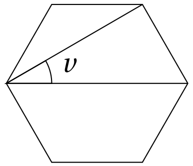
(*Georg Mohr 2017, opgave 11*)

Opgave 2. På figuren ses en sekskant hvor alle vinkler er lige store. En linje skærer en af siderne i en vinkel på 102° som vist. Hvor mange grader er vinklen markeret med v?

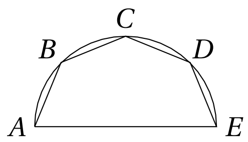


(*Georg Mohr 2015, opgave 15*)

Opgave 3. På figuren er der en regulær sekskant. Hvor mange grader er den markerede vinkel v?



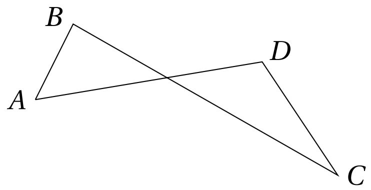
Opgave 4. Punkterne A, B, C, D og E ligger med samme indbyrdes afstand på en halvcirkel som vist. Hvor stor er vinkel E i femkanten $ABCDE$?



A) 60° B) 45° C) 135° D) 72° E) 67,5°

(*Georg Mohr 2010, opgave 5*)

Opgave 5. En plan figur $ABCD$ bestående af linjestykker AB, BC, CD og DA, hvor BC og DA krydser hinanden, kaldes en sløjfe. Hvad kan man sige om vinkelsummen $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D$ i en sløjfe? Den er:



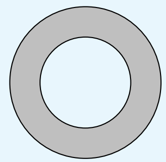
A) over 90° B) 180° C) under 360° D) 360° E) 540°

(*Georg Mohr 2008, opgave 10*)

Areal

I opgaver med areal skal man have styr på formlen for arealet af en trekant, formlen for arealet af et rektangel og formlen for arealet af en cirkel. Desuden er det vigtigt at huske at to trekanter med samme grundlinje og samme højde har samme areal.

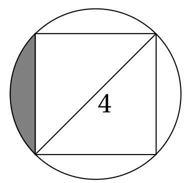
Eksempel En stor cirkel har radius 5 og en lille cirkel med radius r har samme centrum. Vi ved at arealet mellem de to cirkler (markeret med gråt på figuren) er 16π, og vi skal bestemme r.



Arealet mellem de to cirkler er arealet af den store cirkel minus arealet af den lille cirkel, dvs.

$$16\pi = 5^2\pi - r^2\pi$$
$$r^2 = 25 - 16 = 9$$
$$r = 3.$$

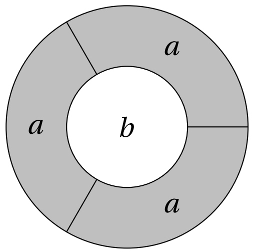
Opgave 6. Et kvadrat hvori diagonalen er 4, er indskrevet i en cirkel som vist. Hvad er arealet af det grå område?



A) $2\pi - 2$ B) $\pi - 2$ C) $\pi^2 - 8$ D) $\pi + 2$ E) $4\pi - 2$

(*Georg Mohr 2014, opgave 2*)

Opgave 7. På figuren ses to cirkler med radius henholdsvis 1 og 2. Arealet af hvert af de tre grå områder er a. Arealet af den hvide midtercirkel er b. Hvad er $\frac{a}{b}$?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{8}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

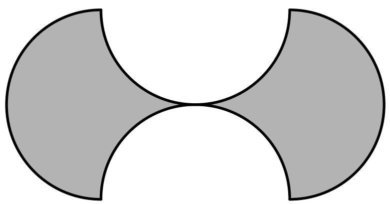
(*Georg Mohr 2017, opgave 3*)

Opgave 8. En cirkel med radius r har samme areal som en kvartcirkel med radius 1. Hvad er r?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

(*Georg Mohr 2011, opgave 6*)

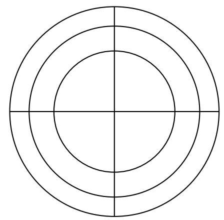
Opgave 9. Figuren er dannet af fire halvcirkler med radius 5. Hvad er arealet af figuren?



A) $25\cdot\pi$ B) $25\cdot\pi+\sqrt{5}$ C) 100 D) $25+25\cdot\pi$ E) $50\cdot\pi$

(*Georg Mohr 2018, opgave 3*)

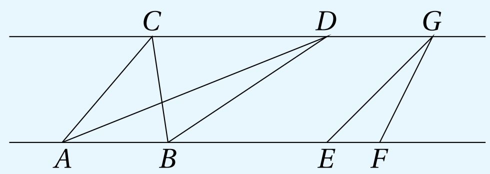
Opgave 10. De 12 områder har alle samme areal. Den mellemste cirkel har radius 1. Hvad er radius af den yderste cirkel?



A) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{2}$ C) π D) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(*Georg Mohr 2007, opgave 20*)

Eksempel Da formlen for arealet af en trekant er højde gange grundlinje divideret med 2, har trekanter med samme grundlinje og samme højde også samme areal.

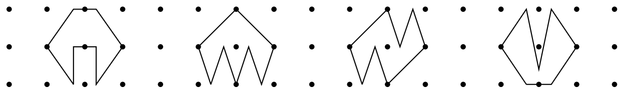


På figuren er indtegnet to parallelle linjer. De to trekanter ABC og ABD har samme areal da de har samme grundlinje AB og samme højde, nemlig afstanden mellem de parallelle linjer.

På figuren er linjestykket EF halvt så stort som linjestykket AB. Derfor er arealet af trekant EFG halvt så stort som arealet af trekant ABC da grundlinjen er halvt så stor, mens højden er den samme.

Opgave 11. Hvilket logo har det største areal?

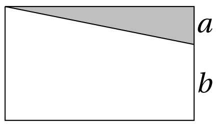
”kloen” ”kammen” ”lynet” ”smilet”



A) ”kloen” B) ”kammen” C) ”lynet” D) ”smilet”
E) de har alle samme areal

(*Georg Mohr 2008, opgave 17*)

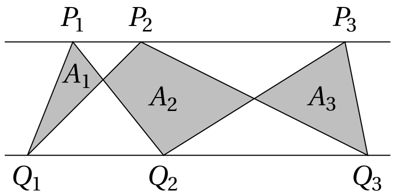
Opgave 12. Et rektangel er inddelt i to dele som vist på figuren. Arealet af den hvide del er fem gange så stor som arealet af den grå del. Bestem brøken $\frac{a}{b}$, hvor a og b er længderne angivet på figuren.



A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

(*Georg Mohr 2014, opgave 4*)

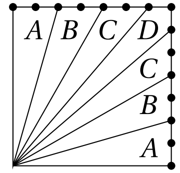
Opgave 13. På den ene af to parallelle linjer ligger punkterne P_1, P_2 og P_3, og på den anden ligger punkterne Q_1, Q_2 og Q_3. Der trækkes forbindelseslinjer mellem dem som vist på figuren. Hvad gælder der om arealerne A_1, A_2 og A_3?



A) $A_1 + A_3 = A_2$ B) $A_1 + A_3 < A_2$ C) $\sqrt{A_1} + \sqrt{A_3} = \sqrt{A_2}$
D) $\frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_3 = \frac{1}{2}A_2$ E) ingen af delene

(*Georg Mohr 2007, opgave 12*)

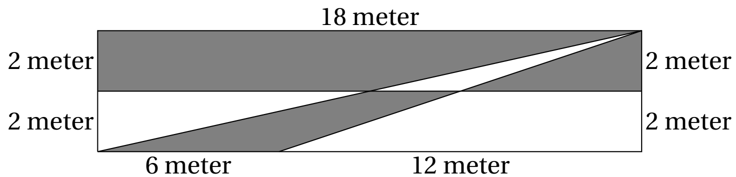
Opgave 14. En kvadratisk chokoladelagkage med målene 35 cm × 35 cm udskæres i syv pæne stykker som vist. Der er 5 cm mellem hver af de viste markeringer. Hvilken type stykke er mindst?



A) type A B) type B C) type C D) type D
E) alle har samme størrelse

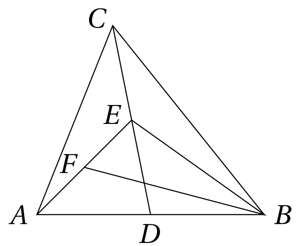
(*Georg Mohr 2011, opgave 7*)

Opgave 15. Et kæmpestort abstrakt vægmaleri er malet på et rektangulært lærred der er 4 meter højt og 18 meter bredt. På lærredet er malet nogle linjer som vist på figuren, og desuden er tre af de felter der fremkommer, malet grå. Hvad er det samlede areal af de tre grå områder (angivet i m^2)?



(*Georg Mohr 2015, opgave 16*)

Opgave 16. I trekant ABC er D midtpunktet af AB, E midtpunktet af CD og F midtpunktet af AE. Hvis arealet af trekant ABC er 120, hvad er så arealet af trekant BEF?

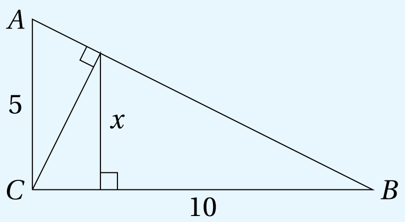


(*Georg Mohr 2010, opgave 11*)

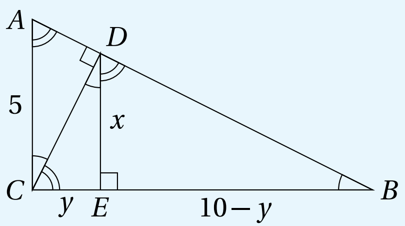
Ensvinklede trekanter

Hvis to trekanter har de samme vinkler, kaldes de ensvinklede, og forholdet mellem ensliggende sider er det samme. I geometri er det altid vigtigt at lægge mærke til om der er ensvinklede trekanter da man ved at se på forhold mellem sider kan bestemme længder på figuren.

Eksempel På figuren er der en retvinklet trekant ABC hvor vinkel C er ret, $|AC| = 5$ og $|BC| = 10$. Vi ønsker at bestemme længden x.

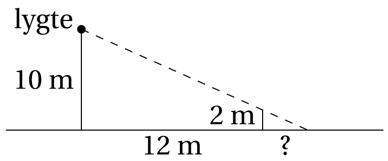


I en retvinklet trekant er summen af de to spidse vinkler 90°, og det betyder at der er en masse ens vinkler som vi markerer på figuren.



Nu kan vi se at trekanterne ABC, CDE og DBE er ensvinklede. I trekant ABC er forholdet mellem de to kateter 2. Dette må derfor også gælde for trekant CDE og trekant DBE. Hvis vi sætter $|CE| = y$, er $|EB| = 10 - y$. Dermed er $x = 2y$ og $2x = 10 - y$. Ved at løse de to ligninger med to ubekendte fås $x = 4$.

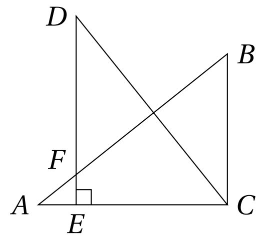
Opgave 17. En pæl på 2 meter kaster skygge i lyset fra en kraftig lygte på toppen af en 10 meter høj mast, der står 12 meter fra pælen. Hvor lang er skyggen?



A) 2,4 m B) 2,5 m C) 3 m D) 4,8 m E) 5 m

(*Georg Mohr 2011, opgave 2*)

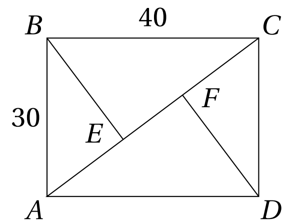
Opgave 18. Trekanterne ABC og DCE er kongruente (dvs. ensvinklede og lige store), og der gælder $|AC| = 5$ og $|BC| = 4$. Hvad er længden af liniestykket DF?



A) $3\frac{4}{5}$ B) 4 C) $4\frac{1}{5}$ D) $4\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

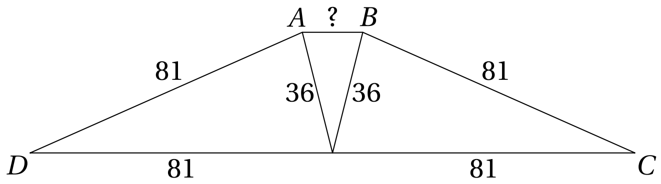
(*Georg Mohr 2010, opgave 13*)

Opgave 19. I rektanglet $ABCD$ er $|AB| = 30$ og $|BC| = 40$. Linjestykkerne BE og DF står vinkelret på diagonalen AC. Hvor langt er stykket EF?



(*Georg Mohr 2011, opgave 17*)

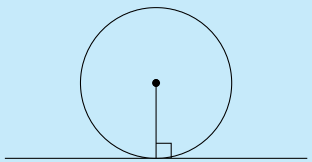
Opgave 20. På figuren ses firkant $ABCD$ hvor flere mål er angivet. Hvad er længden af linjestykket AB?



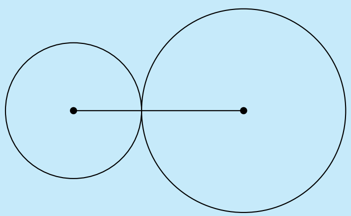
(*Georg Mohr 2018, opgave 17*)

Find den retvinklede trekant

I mange geometriopgaver er der retvinklede trekanter hvor man kender to af siderne, og dermed kan finde den tredje ved Pythagoras' sætning. De retvinklede trekanter er ikke altid synlige på figuren, man skal selv opdage dem! Når man leder efter retvinklede trekanter, er det vigtigt at huske at hvis en linje tangerer en cirkel, så står linjen fra centrum til røringspunktet vinkelret på tangenten.



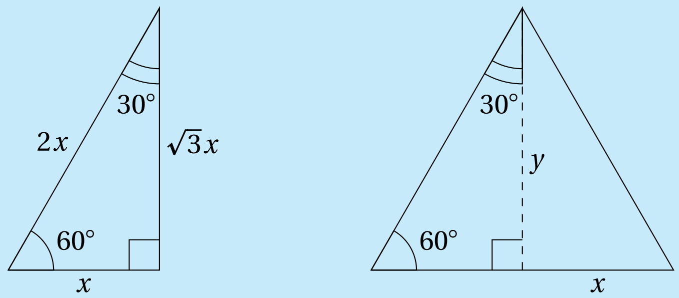
Husk desuden at hvis to cirkler tangerer hinanden, da går linjen gennem de to centre også gennem cirklernes røringspunkt.



Trekanter med vinklerne $90°$- $60°$- $30°$

I en retvinklet trekant hvor de spidse vinkler er $30°$ og $60°$, er hypotenusen dobbelt så lang som den korteste katete, og den længste katete er $\sqrt{3}$ gange længden af den korteste katete, og dermed $\frac{\sqrt{3}}{2}$ gange længden af hypotenusen.

Det kan man indse ved at spejle trekanten i den længste katete så man får en trekant hvor alle vinkler er $60°$, dvs. en ligesidet trekant.



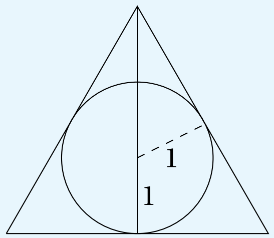
Da den nye trekant er ligesidet, ses det umiddelbart at den korte katete er halvt så lang som hypotenusen.

Den længste katete kan findes ved Pythagoras' sætning. Vi kalder længden af den korteste katete for x og længden af den længste katete for y. Da er

$$y = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x.$$

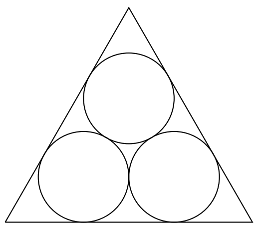
Det er ofte meget anvendeligt at kende disse forhold da der er mange $90°$- $60°$- $30°$-trekanter i geometri.

Eksempel I en ligesidet trekant har den indskrevne cirkel radius 1. Vi ønsker at bestemme trekantens højde.



Når vi indtegner højden, opstår der en 90°- 60°- 30°-trekant. Den øverste vinkel på 60° deles nemlig i to lige store vinkler da trekanten er ligesidet. Hvis vi yderligere indtegner en linje fra centrum til røringspunktet for en af siderne, opstår der en lille 90°- 60°- 30°-trekant, da denne linje står vinkelret på siden. I denne trekant har den korte katete længde 1 da den svarer til radius i cirklen. Derfor er længden af hypotenusen 2, og hele højden er derfor $1+2=3$.

Opgave 21. I en ligesidet trekant er indtegnet tre cirkler med radius 1 som tangerer hinanden og trekantens sider som vist på figuren.

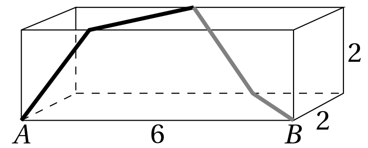


Hvor stor er trekantens sidelængde?

A) $2+\sqrt{3}$ B) $2+2\sqrt{3}$ C) $3+\sqrt{3}$ D) 5 E) $3+2\sqrt{3}$.

Opgave 22. En ligebenet trekant har areal 60, og højden på grundlinjen er 5. Hvad er trekantens omkreds?

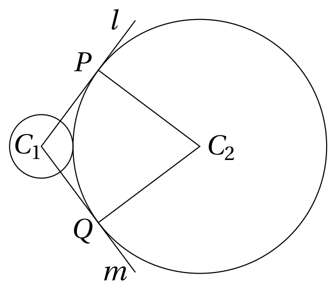
Opgave 23. Den viste kasse har længden 6, og endefladen er kvadratisk med sidelængde 2. En snor skal føres rundt om kassen fra A til B via forsiden, låget, bagsiden og bunden.



Hvad er den mindste længde en sådan snor kan have?

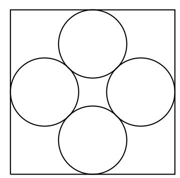
(*Georg Mohr 2015, opgave 18*)

Opgave 24. Den lille cirkel har centrum C_1 og radius 3, og den store cirkel har centrum C_2 og radius 12. Linjerne l og m går gennem C_1 og tangerer den store cirkel i punkterne P og Q. Hvad er arealet af firkant C_1PC_2Q?



(*Georg Mohr 2007, opgave 17*)

Opgave 25. Fire cirkler med radius 1 tangerer hinanden og siderne i et kvadrat som vist. Hvad er sidelængden i kvadratet?

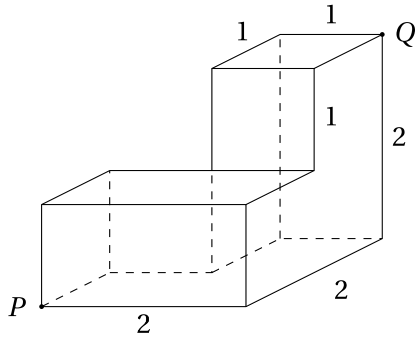


A) 2 B) 4 C) $2+2\sqrt{2}$ D) $4+\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $2\sqrt{5}$

(*Georg Mohr 2010, opgave 20*)

Ekstra udfordringer

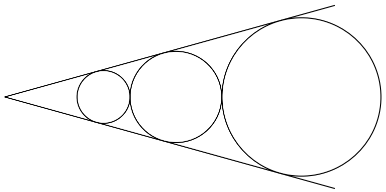
Opgave 26. En bille skal kravle på ydersiden af den viste klods fra P til Q. Hvor lang er den korteste rute?



A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $1+\sqrt{5}+\sqrt{2}$ D) $2+2\sqrt{2}$ E) 5

(*Georg Mohr 2008, opgave 19*)

Opgave 27. På figuren ses tre cirkler der alle tangerer de to linjer. Den midterste cirkel tangerer desuden de to andre cirkler.

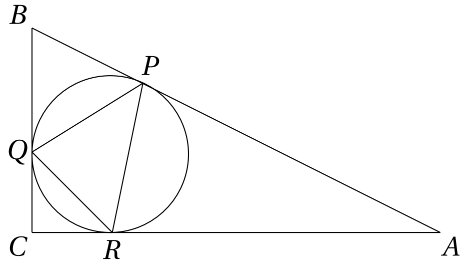


Den lille cirkel har radius 2 og den store cirkel radius 6. Hvad er radius af den midterste cirkel?

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{10}{3}$ D) $3\sqrt{2}$ E) 4

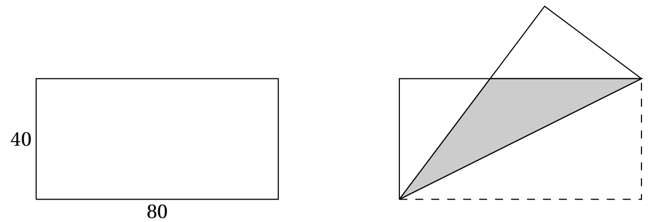
(*Georg Mohr 2017, opgave 10*)

Opgave 28. En cirkel er indskrevet i trekant ABC, hvor vinkel C er ret. Cirklen rører trekantens sider i punkterne P, Q og R. Vinkel Q i trekant PQR er 74°. Hvor mange grader er vinkel B?



(*Georg Mohr 2017, opgave 20*)

Opgave 29. Et stykke karton med målene 40×80 foldes langs diagonalen som vist.



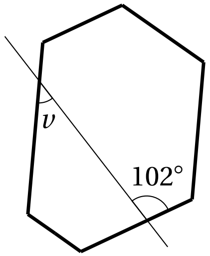
Hvad er arealet af overlappet?

(*Georg Mohr 2018, opgave 20*)

Løsningsskitser

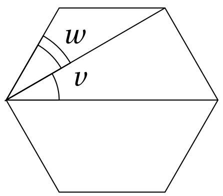
Opgave 1 Svar: 132. De tre markerede vinkler svarer til vinklerne i trekanten. Dermed er deres sum 180°, og altså $v+w=180°-48°=132°$.

Opgave 2 Svar: 42. Da en sekskant kan inddeles i fire trekanter, er dens vinkelsum $4\cdot 180° = 720°$. Da vinklerne i sekskanten alle er lige store, er de $\frac{1}{6}\cdot 720° = 120°$.



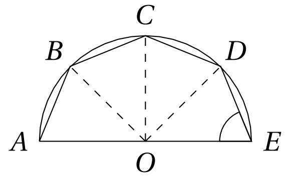
Vinkel v indgår dermed i en firkant hvor to vinkler er 120°, mens den sidste vinkel er $180°-102°=78°$. Altså må $v=360°-120°-120°-78°=42°$.

Opgave 3 Svar: 30. Vinkelsummen i en sekskant er $4\cdot 180° = 720°$ da en sekskant kan inddeles i fire trekanter. Dermed er hver vinkel $\frac{720°}{6} = 120°$.



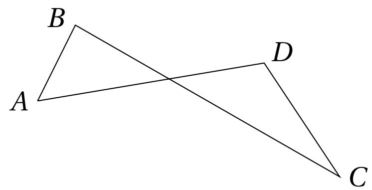
I trekanten med vinklen w er den store vinkel derfor 120°, mens de to små vinkler er lige store da trekanten er ligebenet. Derfor er $w=\frac{180°-120°}{2}=30°$. Vinkel $w+v$ er pga. symmetri halvdelen af den store vinkel på 120° som de er en del af. Derfor er $v+w=60°$ og $v=60°-w=60°-30°=30°$.

Opgave 4 Svar: E. Kald halvcirklens centrum for O, og tegn forbindelseslinjer til de fem punkter som vist på figuren



De fire vinkler ved centrum er lige store da linjerstykkerne AB, BC, CD og DE alle er lige store. Derfor er de hver $\frac{180°}{4}=45°$. Trekant OED er ligebenet da både OD og OE er radius i cirklen. Altså er $\angle E = \frac{180°-45°}{2} = 67{,}5°$.

Opgave 5 Svar: C. Vinkelsummen i de to trekanter tilsammen er $2\cdot 180° = 360°$.



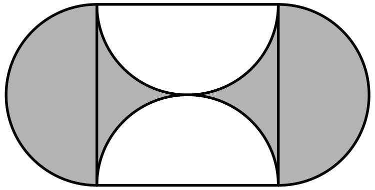
Summen af fire af de seks vinkler i trekanterne er derfor altid mindre end 360°. Dermed kan vi slutte C). Vi kan ikke slutte nogle af de andre udsagn da summen af de fire vinkler ændres afhængigt af summen af de to vinkler i midten. Hvis de fx bliver meget store, bliver summen af de fire vinkler mindre end 90°.

Opgave 6 Svar: B. Cirklens radius er 2, dvs. dens areal er $2^2\pi = 4\pi$. Kald kvadratets sidelængde for x. Ifølge Pythagoras' sætning er $x^2+x^2=4^2$, dvs. $x^2=8$. Kvadratets areal er derfor 8. Arealet af de fire cirkelafsnit (hvor det ene er gråt), må derfor være $4\pi-8$, og arealet af det grå område altså $\pi-2$.

Opgave 7 Svar: E. Arealet af den hvide cirkel er $b=1^2\pi=\pi$. Arealet af det grå område er $2^2\pi-1^2\pi=3\pi$. Altså er $3a=3\pi$, dvs. $a=\pi$. Det betyder at $\frac{a}{b}=1$.

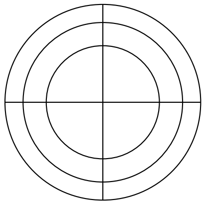
Opgave 8 Svar: A. Arealet af kvartcirklen er $\frac{1^2\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$. Arealet af cirklen med radius r er $r^2\pi$. Dermed er $r^2\pi=\frac{1}{4}\pi$ og altså $r=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$.

Opgave 9 Svar: 100. På figuren er indtegnet et kvadrat med sidelængde $2 \cdot 5 = 10$.



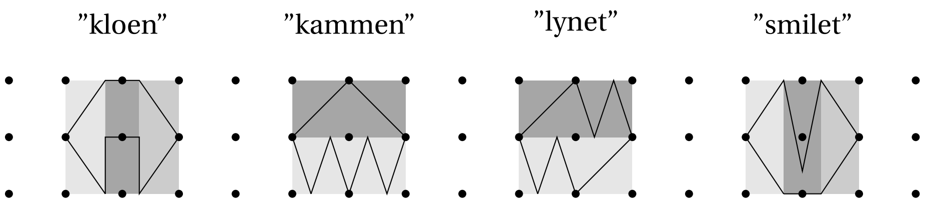
Det grå område har samme areal som kvadratet da der er to grå halvcirkler med radius 5 uden for kvadratet, og der er to hvide halvcirkler med radius 5 inden for kvadratet. Altså er arealet af det grå område $10^2 = 100$.

Opgave 10 Svar: D. Arealet af den midterste cirkel med radius 1 er $1^2\pi = \pi$.



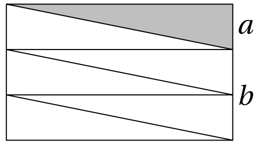
Da arealet af hver af de 12 områder er det samme, må arealet af den store cirkel være $\frac{3}{2}$ så stor som arealet af den midterste cirkel. Kald radius i den store cirkel for r. Da er $r^2\pi = \frac{3}{2}\pi$ og altså $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Opgave 11 Svar: D. Figurerne ”kloen”, ”kammen” og ”lynet” har alle areal 2 da de udgør halvdelen af hver af de markerede rektangler på figuren.



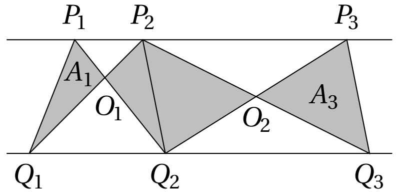
Figuren ”smilet” har derimod et areal der er lidt større end 2, da ”smilet” udgør halvdelen af de to yderste grå rektangler, mens den udgør lidt mere end halvdelen af det midterste grå rektangel.

Opgave 12 Svar: E. Tegn en vandret streg der danner et rektangel øverst i rektangel så den grå trekant netop er halvdelen af dette øvre rektangel. Arealet af resten af figuren svarer nu til fire gange arealet af det grå område. Det inddeles nu i to lige store rektangler som igen inddeles i to lige store trekanter som vist.



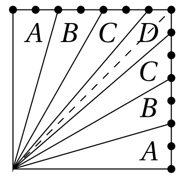
Hver trekant må have samme areal som den grå trekant, da vi inddelte det nederste rektangel i fire lige store trekanter. Alle trekanterne er retvinklede, og de har alle en katete der svarer til bredden af rektanglet. Derfor må de være identiske. Det betyder at $b = 2a$, og altså $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$.

Opgave 13 Svar: A. På figuren er arealet A_2 inddelt i to dele.



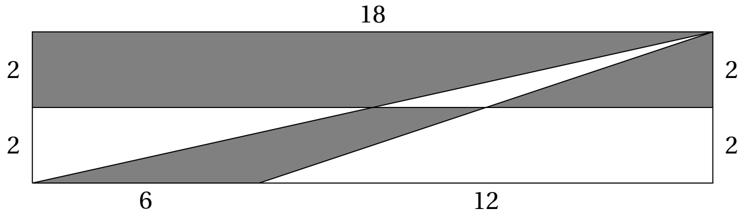
Trekant $Q_1P_1Q_2$ og trekant $Q_1P_2Q_2$ har samme areal da de har samme grundlinje og samme højde. Derfor har trekant $Q_1O_1P_1$ og trekant $Q_2O_1P_2$ også samme arealet. På samme måde ses at arealet af trekant $Q_2O_2P_2$ og arealet af trekant $Q_3O_2P_3$ er det samme. Derfor er $A_1 + A_3 = A_2$.

Opgave 14 Svar: E. Trekanterne af type A, B og C har alle samme grundlinje og samme højde, og deres areal er derfor det samme.



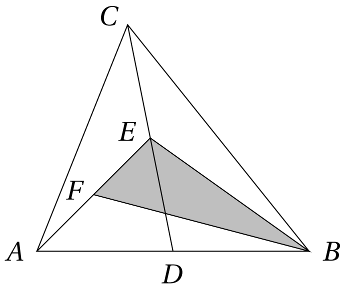
Firkanten type D inddeles i to lige store dele ved at indtegne diagonalen i kvadratet. Hver af de to trekanter der opstår, er halvt så store som trekanterne af type A, B og C da deres grundlinje er halvt så stor, mens de har samme højde. Derfor har stykket af type D samme areal som de andre. Alle stykkerne er derfor lige store.

Opgave 15 Svar: 42. Trekanten der bryder farverne, har grundlinje 6 og højde 4, dvs. den har areal $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. Den hvide del af denne trekant er ensvinklet med hele trekant, men halvt så lille da dens højde er 2. Derfor er dens grundlinje $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$, og dermed dens areal $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$. Arealet af den grå del af den omtalte trekant er altså $12 - 3 = 9$.



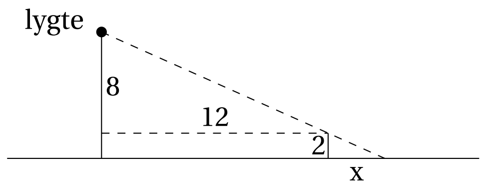
Arealet af de grå områder er derfor $2 \cdot 18 - 3 + 9 = 42$.

Opgave 16 Svar: 30. Da E er midtpunktet af CD er afstanden fra E til linjen AB halvt så stor som afstanden fra C til linjen AB. Trekant ABE er derfor halvt så stor som trekant ABC da de har samme grundlinje. Derfor er arealet af trekant ABE lig med $\frac{1}{2} \cdot 120 = 60$.



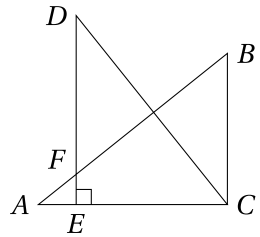
Trekant BEF er halvt så stor som trekant ABE da grundlinjen EF i trekant BEF er halvt så stor som grundlinjen AE i trekant ABE, mens højden er den samme. Altså er arealet af trekant BEF lig med $\frac{1}{2} \cdot 60 = 30$.

Opgave 17 Svar: C. På figuren tegnes en vandret linje i 2 meters højde så der dannes en trekant med grundlinje 12 og højde 8. Kald desuden skyggens længde for x.



Nu har vi to ensvinklede retvinklede trekanter, og de må have samme forhold mellem de to kateter. Derfor er $\frac{12}{8} = \frac{x}{2}$, dvs. $x = 3$. Pælen kaster altså en skygge på 3 meter.

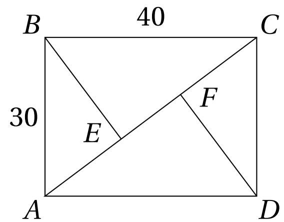
Opgave 18 Svar: C. Da trekant ABC og DCE er kongruente, er vinkel C i trekant ABC ret, $|DE| = 5$ og $|EC| = 4$. Det betyder at $|AE| = 1$.



Trekant AFE og trekant ABC er ensvinklede da de deler vinkel A og begge har en ret vinkel. Derfor er forholdet mellem kateterne i de to trekanter det samme, dvs. $\frac{|FE|}{1} = \frac{4}{5}$. Altså er $|FE| = \frac{4}{5}$ og $|DF| = |DE| - |FE| = 4\frac{1}{5}$.

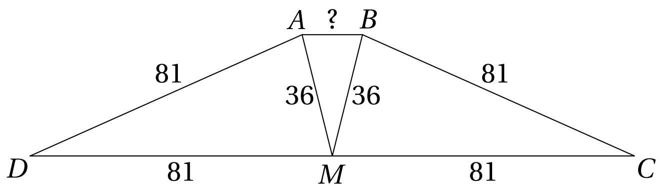
Opgave 19 Svar: 14. Trekant ABC er en retvinklet trekant, og vi kan derfor benytte Pythagoras' sætning til at bestemme hypotenusen AC.

$$|AC| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50.$$



Trekanterne ABC og AEB er ensvinklede da de deler vinkel A, og begge har en ret vinkel. Dermed er forholdet mellem ensliggende sider ens, dvs. forholdet mellem den mindste katete og hypotenusen er $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$. Altså er $|AE| = \frac{3}{5}|AB| = \frac{3}{5} \cdot 30 = 18$. På tilsvarende vis ses at $|CF| = 18$. Dermed er $|EF| = |AC| - |AE| - |CF| = 50 - 2 \cdot 18 = 14$.

Opgave 20 Kald midtpunktet af CD for M. Trekant DAM er ligebenet dvs. vinklerne ved A og M er ens. Kald disse vinkler for v. Trekant BCM er identisk med trekant ADM, dvs. vinklerne ved M og B er også v.



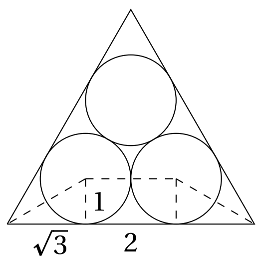
Det betyder at vinklen ved M i trekant AMB er $180° - 2v$. Da trekant AMB er ligebenet, er vinklerne ved A og B lige store, og da vinkelsummen i trekanten er 180°, må de hver være v. Dermed er trekant AMB ensvinklet med trekant ADM, dvs. at

$$\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|AD|}$$

og altså

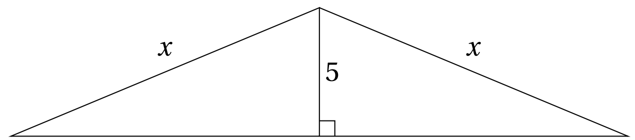
$$|AB| = \frac{|AM|^2}{|AD|} = \frac{36^2}{81} = 16.$$

Opgave 21 Svar: B. På figuren indtegnes linjen mellem de to nederste linjers centre. Linjen gennem centrene på to cirkler som tangerer hinanden, går altid gennem deres røringspunkt, dvs. denne linje har længde 2 da cirklerne har radius 1.



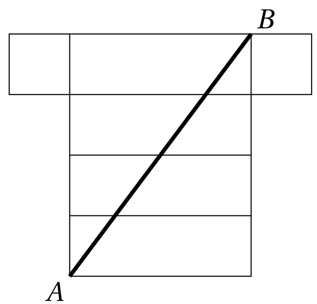
Desuden tegnes en linje fra hvert af de to centre vinkelret ned på trekantens side, og linjer fra centrene til trekantens vinkelspidser som vist på figuren, så der opstår to små kongruente retvinklede trekanter. Vinklerne i den store trekant er 60°, og når vi danner de små trekanter halverer vi disse vinkler. Derfor er de små trekanter 90°- 60°- 30°-trekanter. Altså er forholdet mellem den store katete og den lille katete $\sqrt{3}$, og sidelængden i trekanten er $\sqrt{3}+2+\sqrt{3} = 2+2\sqrt{3}$.

Opgave 22 Svar: 50. Formlen for arealet af en trekant er $A = \frac{h \cdot g}{2}$, hvor g er gundlinjen, og h er højden. Da trekanten har højde $h = 5$ og areal $A = 60$, er grundlinjen $g = \frac{2 \cdot A}{h} = \frac{2 \cdot 60}{5} = 24$.



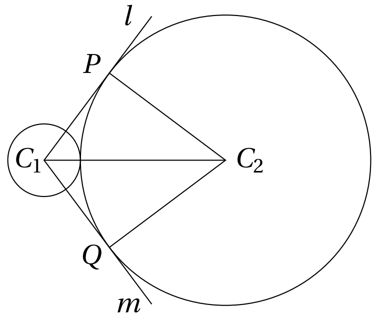
Højden deler trekanten i to retvinklede trekanter, og da trekanten er ligebenet, deler højden grundlinjen på midten. Vi får derved to kongruente retvinklede trekanter, hvor de to kateter har længde 5 og $\frac{24}{2} = 12$. Vha. Pythagoras kan vi nu bestemme længden af de sidste to lige lange sider i trekanten: $x = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. Trekantens omkreds er derfor $24 + 2 \cdot 13 = 50$.

Opgave 23 Svar: 10. Figuren viser kassen foldet ud.



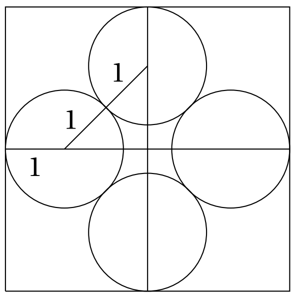
Da snoren skal fra A til B langs kassen, må den korteste vej være den lige linje fra A til B når kassen er foldet ud. Ifølge Pythagoras' sætnings skal snoren derfor have en længde på mindst $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Opgave 24 Svar: 108. Linjen C_2P står vinkelret på tangenten l. Når vi tegner en linje mellem de to centre, opstår der derfor en retvinklet trekant PC_1C_2.



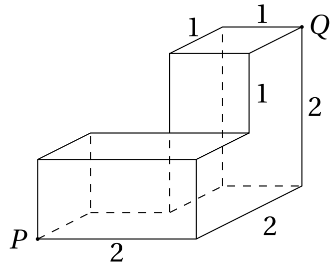
I denne trekant kender vi to af sidelængderne da vi kender cirklernes radier: $|C_1C_2| = 3+12 = 15$ og $|C_2P| = 12$. Ifølge Pythagoras' sætning er $|PC_1| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Firkant C_1PC_2Q består derfor af to kongruente retvinklede trekanter med kateterne 9 og 12. Altså er firkantens areal $9 \cdot 12 = 108$.

Opgave 25 Svar: C. Ved at tegne linjer som vist på figuren, gennem cirklernes centre opstår der en retvinklet trekant.

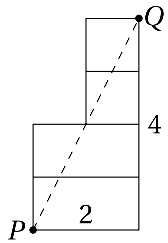


Trekanten er pga. symmetri ligebenet. Kald længden af kateten for x. Da hypotenusen har længde $1+1=2$, kan x beregnes ved Pythagoras' sætning: $x^2+x^2=2^2$, og altså $x=\sqrt{2}$. Kvadratets sidelængde er altså $2(1+\sqrt{2}) = 2+2\sqrt{2}$.

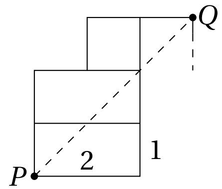
Opgave 26 Svar: A. Dette er ikke en fyldestgørende løsning, men en skitse til hvordan man bestemmer den korteste rute. For at finde den korteste rute skal man gennemgå de forskellige muligheder for at bevæge sig hen over klodsen.



Først ser vi på tilfældet hvor billen fra P kravler hen over den lodrette 2×1 flade, derefter op på den vandrette 2×1 flade, op på den lodrette 1×1 flade, og til slut hen over den vandrette 1×1 flade til Q. For at finde den korteste rute i dette tilfælde "folder vi figuren ud"så fladerne ligger i samme plan (se figur 1). Den korteste vej mellem to punkter i en plan er en ret linje, dvs. i dette tilfælde er den korteste rute $\sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.



figur 1

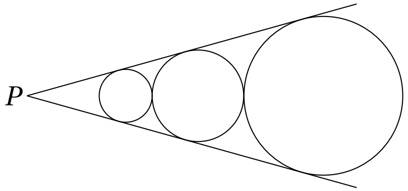


figur 2

Hvis vi i stedet betragter tilfældet hvor billen kravler hen over den lodrette 2×1 flade, derefter op på den vandrette 2×1 flade, evt. op på den lodrette 1×1 flade og til slut over på den lodrette flade til Q, så bliver den udfoldede figur som vist på figur 2. I dette tilfælde er den korteste rute en ret linje fra P til Q, og den har længde $\sqrt{3^3+3^3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Af de to ruter vi her har set på, er den sidste den korteste, da $\sqrt{18} < \sqrt{20}$. Ved at gå de andre muligheder igennem ses at dette er den korteste.

Opgave 27 Svar: B. *Løsning 1:* Kald radius af den mellemste cirkel for r. Hvis vi forstørrer figuren med en faktor k med udgangspunkt i P sådan at den lille cirkel centrum afbildes i den mellemste cirkels centrum, da må den lille cirkel afbildes i den mellemste cirkel da de begge tangerer de to linjer som afbildes i sig selv. Tilsvarende vil den mellemste cirkel afbildes i den store cirkel ved denne forstørrelse.

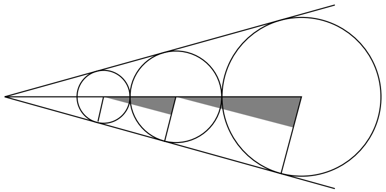


Det betyder at $k = \frac{r}{2}$ og $k = \frac{6}{r}$. Dermed er

$$\frac{r}{2} = \frac{6}{r} \Leftrightarrow r^2 = 2 \cdot 6 = 12$$

og altså $r = \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 4} = 2\sqrt{3}$.

Løsning 2: Kald radius af den mellemste cirkel for r. Indtegn linjer fra de tre centre vinkelret på den nederste linje, og indtegn derefter retvinklede trekanter som vist på figuren:

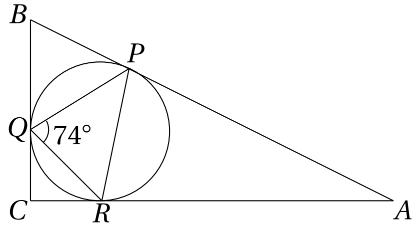


Hypotenusen i den lille grå trekant har længde $2+r$, mens hypotenusen i den store grå trekant har længde $r+6$. Den lille katete i den lille grå trekant har længde $r-2$, og den lille katete i den store grå trekant har længde $6-r$. Desuden er de to grå trekanter ensvinklede. Altså må

$$\frac{r+6}{2+r} = \frac{6-r}{r-2} \Rightarrow r^2 + 6r - 2r - 12 = 12 - 2r + 6r - r^2 \Leftrightarrow r^2 = 12.$$

Dermed er $r = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Opgave 28 Svar: 58. Bemærk først at $|CR| = |CQ|$ da R og Q er tangentpunkterne. Derfor er trekant CRQ ligebenet og retvinklet, dvs. de to spidse vinkler er 45°.



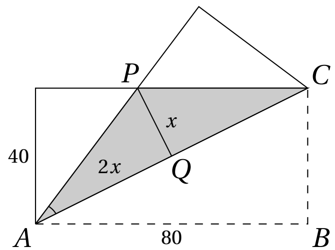
De tre vinkler ved Q har sum 180°, så derfor er

$$\angle PQB = 180^\circ - 45^\circ - 74^\circ = 61^\circ.$$

Trekant BQP er ligebenet da P og Q er tangentpunkter. Derfor er vinklerne ved P og Q ens, dvs. $\angle QPB = 61^\circ$. Nu kender vi to vinkler i trekant BPQ, og kan derfor også finde den sidste:

$$\angle B = 180^\circ - 61^\circ - 61^\circ = 58^\circ.$$

Opgave 29 Svar: 1000. Bemærk at der er symmetri gennem linjen PQ, og at vi derfor kan inddele den grå trekant i to identiske retvinklede trekanter som vist på figuren. Vinkel A i trekant AQP fremkommer ved at papiret foldes, dvs. den svarer til vinklen ved A i trekant ABC. De retvinklede trekanter ABC og AQP er derfor ensvinklede, dvs. forholdet mellem kateterne i trekant AQP må være det samme som i trekant ABC, dvs. 2.



Kald længden af hypotesen i rektanglet for $4x$. Da er $|AQ| = 2x$, og dermed må $|PQ| = x$ da forholdet mellem kateterne i trekant AQP er 2. Arealet af den grå trekant er derfor $\frac{1}{2}|AC||PQ| = 2x^2$. Vi kan udregne x^2 vha. Pythagoras' sætning: $(4x)^2 = 40^2 + 80^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 + 20^2$ og altså $2x^2 = 2(10^2 + 20^2) = 1000$.