Tip til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen

Algebra

Her præsenteres idéer til hvordan man løser algebraopgaver. Det er ikke en teoretisk indføring, men der er i stedet fokus på at illustrere nogle centrale principper og idéer til hvordan man fx vurderer størrelsen af et tal, opstiller en formel, opstiller ligninger, løser ligninger og ligningssystemer og omskriver uligheder. For at blive god til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er det allervigtigste at løse mange opgaver, og derfor er der også en masse opgaver hvor mange har været stillet som opgaver til 1. runde.

Til 1. runde af Georg Mohr-Konkurrencen er de første ti opgaver multiple choice-opgaver med fem svarmuligheder, mens de sidste ti opgaver skal besvares med et positivt helt tal. Derfor er opgaverne her en blanding af multiple choice-opgaver og opgaver hvor facit er et positivt helt tal. Der er løsningsskitser til alle opgaver bagerst.

Vurder størrelsen af et tal

For at vurdere hvilket af to tal der er størst, har man ofte brug for at omskrive tallene så man har dem på en sammenlignelig form.

Det er umiddelbart svært at vurdere størrelsen af en kvadratrod så hvis mindst et af to tal indeholder en kvadratrod, og man ønsker at undersøge hvilket der er størst, så sammenligner man ofte tallene i anden for at slippe af med kvadratroden.

Eksempel For at vurdere hvilket af følgende tal der er størst,

A) $\frac{4}{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{16}{13}$ D) $\frac{\sqrt{10}}{3}$

sammenligninger vi først de to brøker A og C:

$$\frac{4}{3} > \frac{16}{13}, \quad \text{da} \quad 4\cdot 13 > 3\cdot 16.$$

Altså kan vi udelukke C.

For at sammenligne A, B og D tager vi tallene i anden da der indgår kvadratrødder i to af udtrykkene:

$$\text{A)}\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}, \qquad \text{B)}\ (\sqrt{2})^2 = 2, \qquad \text{D)}\ \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

Da B er størst når vi har taget tallene i anden, er det også det største blandt de oprindelige tal fordi de alle er positive.

Opgave 1. Hvilket af følgende tal er størst?

A) $\frac{1}{4}$ B) 0,47 C) $\frac{4}{7}$ D) $(\frac{1}{4})^2$ E) $\frac{7}{40}$

(*Georg Mohr 2010, opgave 1*)

Opgave 2. Hvilket af følgende tal er mindst?

A) $\frac{3}{103}$ B) $\frac{1}{33}$ C) $\frac{301}{1001}$ D) $\frac{3}{100}$ E) $\frac{30}{1003}$

(*Georg Mohr 2014, opgave 6*)

Opgave 3. Hvilket af følgende tal er størst?

A) $\sqrt{408}$ B) 20 C) $\sqrt{100}+\sqrt{308}$ D) $\frac{\sqrt{816}}{2}$ E) $2\sqrt{204}$

(*Georg Mohr 2012, opgave 15*)

Opgave 4. Hvilket af følgende tal er størst?

A) $2^3\cdot 3^4\cdot 4^3$ B) $(4\cdot 3^2)^2\cdot(3\cdot 4^2)\cdot 2$ C) $2\cdot 3\cdot \frac{4}{2\cdot 3}\cdot 3\cdot \frac{3^3}{2^4}\cdot 2^{10}$
D) $2^{10}\cdot 3^4$ E) $\frac{3^4}{2}\cdot 4^5$

(*Georg Mohr 2007, opgave 15*)

Find en formel

I de næste opgaver skal der opstilles en formel ud fra nogle oplysninger. Her er der nogle variabel, og man skal ud fra disse variable opstille et formeldtryk for noget der afhænger af disse variable.

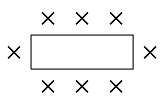
Eksempel Det tager 5 minutter at udfylde et bestemt spørgeskema på computer. Der er x personer der skal udfylde spørgeskemaet i løbet af en time. Vi vil nu opstille en formel for hvor mange computere der er brug for.

For at finde en formel for dette, bemærker vi først at der er 60 minutter på en time, og at der derfor er $\frac{60}{5} = 12$ personer pr. computer der kan udfylde spørgeskemaet i løbet af en time. Hvis x personer skal udfylde spørgeskemaet i løbet af en time, skal der altså bruges $\frac{x}{12}$ computere. Dette tal skal selvfølgelig rundes op til nærmeste hele tal da vi kun regner i hele computere.

Opgave 5. I IceIceIce koster en vaffel med to kugler is 15 kroner, en vaffel med tre kugler 20 kroner, en vaffel med fire kugler 25 kroner, osv. Hvor mange kroner koster en vaffel med n kugler?

A) $15n+5$ B) $5n+10$ C) $5n+5$ D) $n+15$ E) $(n-2)\cdot 5+10$

Opgave 6. Til et selskab sættes n pæne 8-mandsborde af den viste type i forlængelse af hinanden. Hvor mange pladser bliver der?



A) n B) $7n+1$ C) $n(n-2)+2$ D) $6n+2$ E) $8(n-1)$

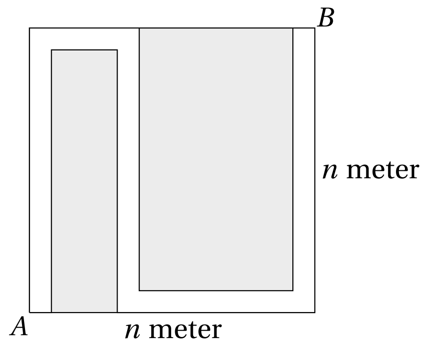
(*Georg Mohr 2009, opgave 2*)

Opgave 7. Til en sammenkomst laver n personer hver s liter suppe. Suppen skal fyldes i store dunke der hver rummer d liter. Hvor mange dunke er der mindst brug for når hver dunk kun må fyldes halvt op?

A) $\frac{2ns}{d}$ B) $\frac{\frac{1}{2}ds}{n}$ C) $\frac{2s}{dn}$ D) $\frac{nds}{2}$ E) $\frac{ns}{2d}$

(*Georg Mohr 2010, opgave 9*)

Opgave 8. I et udstillingsområde på n meter gange n meter føres publikum gennem udstillingen ad en 1 meter bred gang fra hjørnet A til hjørnet B som vist på figuren.



Hvor mange m^2 er der tilovers til udstillingen når gangarealet fraregnes?

A) n^2-3n+1 B) n^2-4n+3 C) n^2-n-5 D) n^2-4n E) $n^2-3n-10$

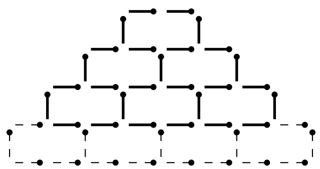
(*Georg Mohr 2017, opgave 2*)

Opgave 9. Til et selskab på p personer beregnes s liter saft pr. person. Saften hældes på kander der hver rummer m liter, og kanderne fordeles på n borde. Hvor mange kander står der i gennemsnit på hvert bord?

A) $\dfrac{s\cdot p}{m\cdot n}$ B) $\dfrac{p\cdot m}{n\cdot s}$ C) $\dfrac{m\cdot s}{p\cdot n}$ D) $\dfrac{p\cdot n}{s\cdot m}$ E) $\dfrac{n\cdot m}{p\cdot s}$

(*Georg Mohr 2018, opgave 6*)

Opgave 10. Adam er i gang med at bygge en figur med mange rækker. Han er lige blevet færdig med række nr. n. Hvor mange tændstikker skal han bruge for at udbygge figuren så den består af $n+1$ rækker?



A) $n+1$ B) $n+(n+1)+2+(n+2)$ C) $3(n+2)$
D) $2n+2(n+1)$ E) $2n$

(*Georg Mohr 2011, opgave 12*)

Ligninger

Når man har en ligning, kan man fx undersøge om et bestemt tal er en løsning, eller man kan løse ligningen.

Hvis man har flere ligninger, kan man kombinere dem og undersøge hvad man samlet kan slutte ud fra ligningerne.

Nogle gange skal man selv indføre passende variable og opstille flere ligninger som man derefter løser.

Eksempel For at undersøge om noget er en løsning til en ligning, sætter man ind i ligningen.

Fx er $x=\frac{1}{2}$ ikke løsning til ligningen $\dfrac{x}{4}+\dfrac{8}{x}=3$, da

$$\frac{\frac{1}{2}}{4}+\frac{8}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{8}+16\neq 3.$$

Til gengæld er $x=4$ løsning til ligningen $\dfrac{x}{4}+\dfrac{8}{x}=3$, da

$$\frac{4}{4}+\frac{8}{4}=3.$$

Opgave 11. I hvilken af følgende ligninger er $x=5$ løsning?

A) $(x-1)+(x-6)=0$ B) $(x-4)^2+(x-5)^2=0$
C) $(x-3)^3+(x-7)^3=0$ D) $(x-5)^4+(x-2)^4=0$
E) $(x-1)^5+(x-5)^5=0$

(*Georg Mohr 2010, opgave 6*)

Opgave 12. Ligningen

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=45x+x^2$$

har tre løsninger. En af løsningerne er:

A) $x=3$ B) $x=\frac{1}{3}$ C) $x=5$ D) $x=\frac{1}{5}$ E) $x=\frac{1}{15}$

(*Georg Mohr 2011, opgave 13*)

Opgave 13. Hvis $\frac{1}{n+3}=\frac{1}{7}$, så er $\frac{1}{n^2+9}$ lig med

A) $\frac{2}{7}$ B) $\frac{1}{14}$ C) $\frac{1}{49}$ D) $\frac{1}{16}$ E) $\frac{1}{25}$

(*Georg Mohr 2010, opgave 3*)

Eksempel Når vi skal løse ligningen

$$(x+2)^2+(2x+4)^2=0,$$

udnytter vi at noget i anden ikke kan være negativt. Da summen af $(x+2)^2$ og $(2x+4)^2$ skal give nul, må de derfor begge være nul. Det betyder at både $x+2=0$ og $2x+4=0$, hvilket er sandt netop når $x=-2$. Derfor er $x=-2$ eneste løsning til ligningen.

Opgave 14. Hvor mange reelle tal x opfylder at

$$(x-3)^2+(2x-8)^2+(2x-3)^4+(x-4)^4=0\,?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(*Georg Mohr 2009 s, opgave 11*)

Eksempel Nu skal vi se på hvad man kan slutte ud fra nogle ligninger. Tallene a, b og c opfylder at $ab+bc=2$ og $a^2+b^2+c^2=3$. Hvad kan man heraf med sikkerhed slutte?

A) a, b og c er alle positive
B) a, b og c er alle negative
C) hvis a og c er negative, da er b negativ
D) mindst et af de tre tal er 0

Da $(a, b\,c) = (1,1,1)$ og $(a,b,c) = (-1,-1,-1)$ begge er løsninger til ligningssystemet, kan man ikke med sikkerhed slutte hverken A, B eller D. Hvis a og c begge er negative, betyder det at $a+c$ er negativ. Da $(a+c)b = ab+bc = 2$, må b også være negativ. Derfor kan man med sikkerhed slutte C.

Opgave 15. De tre hele tal a, b og c opfylder at $a+b-1=b+c=c+a+3$. Hvilket af tallene a, b og c er størst?

A) a B) b C) c D) de er alle lige store E) det kan ikke afgøres

(*Georg Mohr 2015, opgave 4*)

Opgave 16. Det oplyses at tallet $x=4$ er en løsning til følgende ligning:
$a+b\cdot\sqrt{x^3+36}=c\cdot x$.
Hvad kan på denne baggrund sluttes om ligningen $a+b\cdot\sqrt{x^6+36}=c\cdot x^2$?

A) $x=2$ er løsning B) $x=4$ er løsning C) $x=8$ er løsning
D) $x=16$ er løsning E) ingen af delene

(*Georg Mohr 2016, opgave 4*)

Opgave 17. Om tallet a ved man at

$$2017a^{2017}+100=110.$$

Hvad er

$$2017(-a)^{2017}+100\ ?$$

(*Georg Mohr 2017, opgave 13*)

Opgave 18. Om tre tal x, y og z vides at $x\,y+z=0$. Hvad kan heraf udledes?

A) alle tallene x, y og z er 0
B) $x^2y^2+z^2=0$
C) mindst et af tallene x, y og z er negativt
D) hvis tallet z er 0, er mindst et af tallene x og y også 0
E) hvis tallet x er negativt, er mindst et af tallene y og z positivt

(*Georg Mohr 2011, opgave 8*)

Opgave 19. Tallene x, y, z og w opfylder $x+2y=3z+w$ og $z+2w=3x+y$. Hvilket af følgende udsagn er ikke nødvendigvis korrekt?

A) $y+w=2(z+x)$ B) $x-3z=w-2y$ C) $4x+3y=4z+3w$
D) $z+2w=3(3z+w-2y)+y$ E) $z+3x=y+2w$

(*Georg Mohr 2012, opgave 19*)

Opgave 20. Tallene a, b, c og d opfylder ligningerne:

$$a+b-c=d,\quad a-b+c=d,\quad -a+b-c=d,\quad -a-b+c=d.$$

Hvad kan heraf sluttes?

A) $a=b$ og $d=0$ B) $b=c$ og $a=0$ C) $a=c$ og $d=0$
D) $b=d$ og $a=0$ E) $a=d$ og $c=0$

(*Georg Mohr 2006, opgave 11*)

Opgave 21. Hvilket positivt helt tal n opfylder at

$$n(n+3)(n+6)\cdots(n+297)(n+300)=(200-n)(203-n)(206-n)\cdots(497-n)(500-n)\ ?$$

(*Georg Mohr 2017, opgave 15*)

Eksempel - Indfør variable og opstil ligninger
Emma samler på ispinde, ølkapsler og klistermærker. Når hun skal regne ud hvor meget hendes samling er værd, plejer hun at regne med at 4 ispinde svarer til 7 ølkapsler, og at 10 klistermærker svarer til 3 ølkapsler. Hvor mange klistermærker går der på 6 ispinde?

(*Georg Mohr 2012, opgave 3*)

For at svare på dette indfører vi først variable: Kald værdien af en ispind for i, værdien af en ølkapsel for o og værdien af et klistermærke for k. Vi ved at $4i = 7o$ og $10k = 3o$, og altså er $i = \frac{7}{4}o$ og $o = \frac{10}{3}k$. Dermed er

$$6i = 6 \cdot \frac{7}{4}o = \frac{21}{2}o = \frac{21}{2} \cdot \frac{10}{3}k = \frac{21 \cdot 10}{2 \cdot 3}k = 35k.$$

Seks ispinde svarer derfor til 35 klistermærker.
Man man også være lidt smart og direkte se at 12 ispinde svarer til 21 ølkapsler som svarer til 70 klistermærker, og altså at 6 ispinde svarer til 35 klistermærker.

Opgave 22. I gården står der tohjulede cykler, trehjulede cykler og firehjulede barnevogne. Der er dobbelt så mange barnevogne som der er trehjulede cykler, og der er tre gange så mange tohjulede cykler som der er barnevogne. I alt er der 184 hjul. Hvor mange trehjulede cykler er der?

(*Georg Mohr 2013, opgave 11*)

Opgave 23. Anna mangler kun at afslutte to fag for at være færdig med sin uddannelse. Hvis hun får 12 i dem begge, bliver gennemsnittet af hendes karakterer nøjagtig 8. Hvis hun får 02 i begge fag, bliver det nøjagtig 7. Hvor mange fag består uddannelsen af?

(*Georg Mohr 2011, opgave 15*)

Opgave 24. Summen af 81 på hinanden følgende hele tal er 3^8. Hvad er det midterste af de 81 tal?

(*Georg Mohr 2017, opgave 17*)

Opgave 25. Ved et valg i to runder med kandidaterne P1, P2 og P3 går kun P1 og P2 videre til anden runde. I første runde fik P3 25% af stemmerne. Hans vælgere forventes i anden runde at fordele sig med 20% til P1 og 80% til P2, og P2 forventes hermed at opnå i alt 55% af stemmerne i anden runde. Hvor mange procent af stemmerne fik P1 i første runde?

(*Georg Mohr 2008, opgave 11*)

Uligheder

Nu skal vi se på hvordan man kan omskrive uligheder og vurdere hvor stor en variabel er, eller hvor stor en variabel er i forhold til en anden. Dette afsnit er markant sværere end de andre.

Regning med uligheder

Man må lægge samme tal til eller trække samme tal fra på begge sider af ulighedstegnet:

Hvis $a < b$, da er $a \pm c < b \pm c$.

Man må gange med et positivt tal på begge sider af ulighedstegnet:

Hvis $a < b$ og $c > 0$, da er $a \cdot c < b \cdot c$.

Man må dividere med et positivt tal på begge sider af ulighedstegnet:

Hvis $a < b$ og $c > 0$, da er $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Man må lægge to ligheder sammen:

Hvis $a < b$ og $c < d$, da er $a + c < b + d$.

Man må opløfte begge sider i en anden hvis begge sider er positive:

Hvis $a < b$ og a og b er positive tal, da er $a^2 < b^2$.

Man må tage kvadratroden på begge sider hvis begge sider er positive:

Hvis $a < b$ og a og b er positive tal, da er $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Eksempel Tallene a og b ligger begge mellem 0 og 1, dvs. $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$. Hvilket af følgende tal har ikke nødvendigvis denne egenskab?

A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}$ D) $\frac{ab}{a+b}$

(*Georg Mohr 2009, opgave 17*)

A) Først lægger vi ulighederne $0 < a < 1$ og $0 < b < 1$ sammen og får $0 < a+b < 2$. Derefter dividerer vi med 2 og får $0 < \frac{a+b}{2} < 1$. Tallet $\frac{a+b}{2}$ ligger derfor også mellem 0 og 1.

B) Når uligheden $0 < a < 1$ ganges igennem med b, fås $0 < ab < b$. Dette er tilladt da b er positiv. Da $0 < ab$, er $0 < \sqrt{ab}$. Nu udnytter vi yderligere at $b < 1$, dvs. at $ab < b < 1$. Da $ab < 1$ hvor begge størrelser er positive, må vi tage kvadratroden på begge sider, dvs. $\sqrt{ab} < \sqrt{1} = 1$. Tallet $\sqrt{ab}$ ligger derfor også mellem 0 og 1.

D) Som i B fås $0 < ab < b$. Nu dividerer vi med det positive tal $a+b$ og får $\frac{ab}{a+b} < \frac{b}{a+b}$. Brøken $\frac{b}{a+b}$ må være mindre end 1 da nævneren er større end tælleren. Altså er $\frac{ab}{a+b} < 1$. Da både tæller og nævner i brøken $\frac{ab}{a+b}$ er positive, må den være større end 0. Tallet $\frac{ab}{a+b}$ ligger derfor også mellem 0 og 1.

C) Tallet $\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}}$ ligger derimod ikke altid mellem 0 og 1. Hvis fx $a = b = \frac{1}{2}$, er $\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{\frac{b}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$.

Opgave 26. Hvad kan man slutte af oplysningerne $a < b+c$ og $b < a+c$?

A) $c = 0$ B) $a = b$ C) $a+b < a+b+c$ D) $c < 0$ E) $\frac{a+b}{2} < c$

Opgave 27. Om tre positive tal x, y og z ved vi at $2x > 3y > 4z$. Hvad kan med sikkerhed sluttes?

A) $x < y < z$ B) $x > 2y > 3z$ C) $3x > 4y > 5z$
D) $3x > 5y > 7z$ E) $x > 3y > 5z$

(*Georg Mohr 2017, opgave 4*)

Opgave 28. Lad a være et tal så $0 < a < 1$. Hvilket af følgende udsagn er sandt?

A) $a > \sqrt{a}$ B) $\frac{1}{a} > a$ C) $a > \frac{1}{\sqrt{a}}$
D) $a^3 > 1$ E) $a^2 > a$

Opgave 29. Om de to tal x og y oplyses at

$$4x \le 3y + 2016 \le 2x + 2016.$$

Hvad er den størst mulige værdi af y?

(*Georg Mohr 2016, opgave 18*)

Opgave 30. Bestem det mindste hele tal n så

$$x^{10} - 1001x^7 + 1 > 0$$

for alle $x \ge n$.

(*Georg Mohr 2014, opgave 19*)

Opgave 31. Et positivt helt tal n opfylder at der findes præcis ét positivt helt tal k så

$$54n < 55k < 56n\ .$$

Hvad er den størst mulige værdi af n?

(*Georg Mohr 2013, opgave 20*)

Blandede opgaver

Opgave 32. Hvor mange løsninger har ligningen

$$-x(x-1)+x(x-2)-x(x-1)(x-2)=0\ ?$$

(*Georg Mohr 2007, opgave 11*)

Opgave 33. Et positivt helt tal kaldes et *palindrom* hvis det skrives ens forfra og bagfra. For eksempel er 57475 et palindrom, men 1227 er det ikke. Det oplyses at x er et 4-cifret palindrom, og at $x+852$ er et 5-cifret palindrom. Hvad er x?

(*Georg Mohr 2016, opgave 15*)

Opgave 34. Sæt $a_0=3$ og $a_1=5$ og derefter

$$a_2=a_1-a_0, \quad a_3=a_2-a_1, \quad \dots$$

Hvad sker der med tallene a_n i det lange løb?

A) tallene bliver større og større B) fra et vist trin er alle tallene positive
C) fra et vist trin er alle tallene negative D) tallene nærmer sig 0
E) tallene gentager sig periodisk

(*Georg Mohr 2010, opgave 19*)

Opgave 35. Bestem tallet

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\dots\left(1+\frac{1}{999}\right)^2.$$

(*Georg Mohr 2018, opgave 19*)

Løsningsskitser

Opgave 1 Svar: C). Da $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, mens alle de andre tal er mindre end $\frac{1}{2}$, er $\frac{4}{7}$ det største af tallene.

Opgave 2 Svar: A). Der gælder at $A < E < D < B$ og $A < C$ da

$$\frac{30}{1030} < \frac{30}{1003} < \frac{30}{1000} < \frac{30}{990} \quad \text{og} \quad \frac{30}{1030} < \frac{301}{1001}.$$

Husk at når tælleren bliver større, så bliver brøken større, og når nævneren bliver større, så bliver brøken mindre.

Opgave 3 Svar: E). Først omskrives B, D og E til en kvadratrod:

$$\text{B)}\quad 20 = \sqrt{400}$$

$$\text{D)}\quad \frac{\sqrt{816}}{2} = \frac{\sqrt{816}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{816}{4}} = \sqrt{204}$$

$$\text{E)}\quad 2\sqrt{204} = \sqrt{4}\sqrt{204} = \sqrt{4 \cdot 204} = \sqrt{816}.$$

Nu er A) $\sqrt{408}$, B) $\sqrt{400}$, D) $\sqrt{204}$ og E) $\sqrt{816}$, og det er klart at E er størst blandt disse.

Nu vurderer vi hvilket af E og C der er størst:

$$\text{C)}\quad \sqrt{100} + \sqrt{308} = 10 + \sqrt{308} < 10 + 18 = 28, \text{ da } 308 < 18^2 = 324$$

$$\text{E)}\quad \sqrt{816} > 28, \text{ da } 816 > 28^2 = 784.$$

Altså er E størst.

Opgave 4 Svar: B). Vi omskriver alle udtrykkene så de er på formen $2^n \cdot 3^m$, for at vi bedre kan sammenligne deres størrelse:

A) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 4^3 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot (2^2)^3 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 2^6 = 2^9 \cdot 3^4$.

B) $(4 \cdot 3^2)^2 \cdot (3 \cdot 4^2) \cdot 2 = (2^2 \cdot 3^2)^2 \cdot 3 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot 2 = 2^9 \cdot 3^5$.

C) $2 \cdot 3 \cdot \frac{4}{2\cdot 3} \cdot 3 \cdot \frac{3^3}{2^4} \cdot 2^{10} = \frac{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 3^3\cdot 2^{10}}{2\cdot 3\cdot 2^4} = \frac{2^{13}\cdot 3^5}{2^5\cdot 3} = 2^8 \cdot 3^4$.

D) $2^{10} \cdot 3^4$.

E) $\frac{3^4}{2} \cdot 4^5 = \frac{3^4\cdot(2^2)^5}{2} = \frac{3^3\cdot 2^1 0}{2} = 2^9 \cdot 3^3$.

Det er oplagt at A, C og E er mindre end B. Da $2^{10} \cdot 3^4 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 2 < 2^9 \cdot 3^4 \cdot 3 = 2^9 \cdot 3^5$, er B størst.

Opgave 5 Svar: C). Læg mærke til at prisen stiger 5 kroner for hver ekstra kugle. Derfor koster det 5 kroner pr. kugle. Desuden koster vaflen 5 kroner, da en vaffel med to kugler koster 15 kroner, en med tre kugler 20 kroner, osv. En vaffel med n kugler koster derfor $5n + 5$ kroner.

Opgave 6 Svar: D). Langs siderne af hvert bord sidder der 6 personer, dvs. at der sidder $6n$ personer langs siderne af n borde. Desuden sidder der en person for hver bordende af det lange bord, dvs. 2 ekstra personer. Når n borde sættes i forlængelse af hinanden, er der derfor plads til $6n + 2$ personer.

Opgave 7 Svar: A). Da n personer hver laver s liter suppe, er der i alt ns liter suppe. I hver dunk må der fyldes $\frac{d}{2}$ liter suppe. Derfor skal der mindst bruges $\frac{ns}{\frac{d}{2}} = \frac{2ns}{d}$ dunke.

Opgave 8 Svar: B). De tre lodrette gange er n meter lange og 1 meter bredde, dvs. de har areal $3n$ m^2. De to vandrette gangstykker er tilsammen $n+1$ meter lange og 1 meter bredde, dvs. de har areal på $n+1$ m^2. Der er 4 gangstykker a 1×1 meter som indgår i både lodrette og vandrette gangstykker, så dem har vi talt med to gange. Det samlede gangareal er derfor $3n + (n+1) - 4 = 4n - 3$. Derfor er det samlede udstillingsområde $n^2 - (4n - 3) = n^2 - 4n + 3$.

Opgave 9 Svar: A). Da der er p personer, og der beregnes s liter saft per person, skal der bruges $p \cdot s$ liter saft. Da hver kande rummer m liter, skal der være $\frac{ps}{m}$ kander. Da der er n borde, må der derfor i gennemsnit stå $\frac{ps}{nm}$ kander på hvert bord.

Opgave 10 Svar: C). Når man skal udbygge figuren så den består af $n+1$ rækker, skal man bruge 2 tændstikker mere til overkanten af række $n+1$. Desuden skal man bruge $n+2$ tændstikker lodret og $2(n+1)$ tændstikker vandret. Samlet skal man bruge

$$2 + (n+2) + 2(n+1) = 3(n+2).$$

Opgave 11 Svar: C). Ved at indsætte $x = 5$ i de fem ligninger kan vi se at $x = 5$ kun er løsning til C.

A) $(5-1)+(5-6)=3\neq 0$

B) $(5-4)^2+(5-5)^2=1\neq 0$

C) $(5-3)^3+(5-7)^3=2^3+(-2)^3=0$

D) $(5-5)^4+(5-2)^4=3^4\neq 0$

E) $(5-1)^5+(5-5)^5=4^5\neq 0$

Opgave 12 Svar: B). Ved at indsætte de fem muligheder i ligningen ses at kun $x=\frac{1}{3}$ er løsning. Her vises kun udregningerne for $x=\frac{1}{3}$. Vi udregner først ventresiden og derefter højresiden:

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{x}=\frac{\frac{1}{3}}{3}+\frac{5}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}+15 \quad \text{og} \quad 45x+x^2=45\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=15+\frac{1}{9}.$$

Opgave 13 Svar: E). Først løses ligningen $\frac{1}{n+3}=\frac{1}{7}$:

$$\frac{1}{n+3}=\frac{1}{7}\Leftrightarrow n+3=7\Leftrightarrow n=4.$$

Altså er $\frac{1}{n^2+9}=\frac{1}{4^2+9}=\frac{1}{25}$.

Opgave 14 Svar: A). Bemærk først at ingen af de fire led i

$$(x-3)^2+(2x-8)^2+(2x-3)^4+(x-4)^4$$

kan være negative. Da deres sum skal være lig 0, skal de alle være lig 0. Altså skal $x-3=0$, $2x-8=0$, $2x-3=0$ og $x-4=0$ på samme tid, men det er der ingen x der opfylder. Derfor har ligningen ingen løsninger.

Opgave 15 Svar: B). Vi har $a+b-1=c+a+3$ og dermed $b=c+4$, dvs. b er større end c. Vi har desuden $b+c=c+a+3$ og dermed $b=a+3$, dvs. b større end a. Altså er b størst.

Opgave 16 Svar: A). Da $x=4$ er løsning til $a+b\cdot\sqrt{x^3+36}=c\cdot x$, må

$$a+b\cdot\sqrt{4^3+36}=c\cdot 4 \quad\Leftrightarrow\quad a+b\cdot\sqrt{2^6+36}=c\cdot 2^2.$$

Dette viser at $x=2$ er løsning til $a+b\cdot\sqrt{x^6+36}=c\cdot x^2$.

Opgave 17 Svar: 90. Da $2017a^{2017}+100=110$, er $2017a^{2017}=10$ og dermed $2017(-a)^{2017}=-2017a^{2017}=-10$. Nu er $2017(-a)^{2017}+100=-10+100=90$.

Opgave 18 Svar: D). Hvis $z=0$, er $xy=0$. Ifølge nulreglen betyder det at mindst et af tallene er 0. Derfor kan vi udlede D. Da $(x,y,z)=(0,0,0)$ og $(x,y,z)=(-1,-1,-1)$ begge løser ligningen, kan vi udelukke A, B, C og E.

Opgave 19 Svar: E).

A) $y+w=2(z+x)$ fås ved at lægge de to ligninger sammen.

B) $x-3z=w-2y$ fås ved at omskrive $x+2y=3z+w$.

C) $4x+3y=4z+3w$ fås ved at lægge de to ligninger sammen: venstresiden i den første med højresiden i den anden og omvendt.

D) $z+2w=3(3z+w-2y)+y$ fås ved at isolere x i $x+2y=3z+w$ og indsætte dette i $z+2w=3x+y$.

E) $z+3x=y+2w$ er ikke altid korrekt da fx løsningen $(x,y,z,w)=(-1,3,2,-1)$ ikke opfylder denne ligning.

Opgave 20 Svar: B. De første to ligninger giver $a+b-c=d=a-b+c$ og dermed $2b=2c\Leftrightarrow b=c$. Hvis det indsættes i første ligning, fås $a=d$. Hvis det indsættes i sidste ligning, fås $-a=d$. Altså er $-a=a$, dvs. $a=0$. Dermed kan man slutte B. Man kan ikke slutte A, C, D og E da $a=d=0$ og $b=c=1$ er løsninger til alle ligningerne.

Opgave 21 Svar: 100. På venstresiden står

$$n(n+3)(n+6)\cdots(n+297)(n+300)$$

som er 101 tal ganget sammen hvor det mindste er n, og det næste hele tiden er 3 større end det foregående. På højresiden står

$$(200-n)(203-n)(206-n)\cdots(497-n)(500-n)$$

som er 101 tal ganget sammen hvor det mindste er $200-n$, og det næste hele tiden er 3 større end det foregående. Altså må $n=200-n$ hvis der skal gælde ligningstegn, dvs. $n=100$.

Opgave 22 Svar: 8. Kald antallet af trehjulede cykler for x. Altså er der $2x$ barnevogne og $3\cdot 2x = 6x$ tohjulede cykler. I alt er der derfor

$$184 = 3\cdot x + 4\cdot 2x + 2\cdot 6x = 23x$$

hjul. Dette giver at $x = \frac{184}{23} = 8$ og altså 8 trehjulede cykler.

Opgave 23 Svar: 20. Kald antallet af fag for n. Da hendes gennemsnittet bliver nøjagtigt 8, hvis hun får 12 i de to sidste fag, må summen af karakterne af de fag hun allerede har afsluttet, være

$$8n - 2\cdot 12 = 8n - 24.$$

Da hendes gennemsnittet bliver nøjagtigt 7, hvis hun får 02 i de to sidste fag, må summen af karakterne af de fag hun allerede har afsluttet, også kunne skrives som

$$7n - 2\cdot 2 = 7n - 4.$$

Altså er

$$8n - 24 = 7n - 4,$$

og derfor $n = 20$. Uddannelsen består altså af 20 fag.

Opgave 24 Svar: 81. Kald det midterste af de 81 tal for n. Da er der 40 tal før n og 40 tal efter n. Da summen af de 81 tal er 3^8, må

$$3^8 = (n-40)+(n-39)+\cdots+(n-1)+n+(n+1)+\cdots+(n+39)+(n+40) = 81n = 3^4 n.$$

Altså er $n = \frac{3^8}{3^4} = 3^4 = 81$.

Opgave 25 Svar: 40. Lad $x\%$ være andelen af stemmer som P2 fik i første runde. I første runde fik P3 25% af stemmerne, og da hans vælgere forventes i anden runde at fordele sig med 20% til P1 og 80% til P2, må P2 forventes at få $x\% + 0{,}8\cdot 25\% = x\% + 20\%$ i anden runde. Da vi yderligere ved at P2 faktisk forventes at opnå i alt 55% af stemmerne i anden runde, kan vi opstille ligningen:

$$x\% + 20\% = 55\%.$$

Altså er $x = 55 - 20 = 35$. I første runde fik P1 derfor

$$100\% - 25\% - 35\% = 40\%$$

af stemmerne.

Opgave 26 Svar: C). Ved at lægge ulighederne sammen fås

$$a + b < a + b + 2c.$$

Dermed er $0 < 2c$, og altså $0 < c$. Derfor kan vi slutte at C)

$$a + b < a + b + c.$$

Da fx $(a, b, c) = (10, 11, 2)$ opfylder begge uligheder, kan man ikke slutte hverken A, B, D eller E.

Opgave 27 Svar: C). Bemærk først at $x = 5$, $y = 3$ og $z = 2$ opfylder uligheden. Ved at indsætte $x = 5$ og $y = 3$ i ulighederne A, B, D og E ses at de ikke holder, dvs. dem kan vi ikke med sikkerhed slutte.

At $2x > 3y$ betyder at $3x = \frac{3}{2}\cdot 2x > \frac{3}{2}\cdot 3y = \frac{9}{2}y > 4y$, dvs. vi kan slutte at $3x > 4y$.

At $3y > 4z$ betyder at $4y = \frac{4}{3}\cdot 3y > \frac{4}{3}\cdot 4z = \frac{16}{3}z > 5z$, dvs. vi kan slutte at $4y > 5z$. Altså kan vi med sikkerhed slutte C.

Opgave 28 Svar: B). Hvis $0 < a < 1$, er $a^2 < 1$. Da a er positiv, kan vi dividere begge sider med a og få $a < \frac{1}{a}$. Derfor er B) sand. De andre udsagn er ikke sande for noget a i intervallet, fx ikke for $a = \frac{1}{4}$:

A) $a > \sqrt{a}$ er ikke sand da $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

C) $a > \frac{1}{\sqrt{a}}$ er ikke sand da $\frac{1}{4} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 2$.

D) $a^3 > 1$ er ikke sand da $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64} < 1$.

E) $a^2 > a$ er ikke sand da $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{4}$.

Alle andre udsagn end B) kan i virkeligheden omskrives til $a^x > 1$ for et positivt tal x, og det er ikke sandt når $0 < a < 1$.

Opgave 29 Svar: 672. Ulighederne viser at $4x \le 2x + 2016$ og altså $2x \le 2016$. Den sidste ulighed viser at $3y \le 2x$, og kombineret med $2x \le 2016$ fås $3y \le 2016$, dvs. $y \le \frac{2016}{3} = 672$. Det er muligt med $y = 672$ når $x = \frac{2016}{2} = 1008$. Altså er 672 den størst mulige værdi af y.

Opgave 30 Svar: 11. Omskriv først uligheden:

$$x^7(x^3-1001)+1>0.$$

Nu ses at venstresiden er negativ hvis $1 \le x \le 10$, mens den er positiv hvis $x \ge 11$, da $10^3 < 1001 < 11^3$. Derfor er $n = 11$ det mindste hele tal så uligheden gælder for alle $x \ge n$.

Opgave 31 Svar: 55. Omskriv først uligheden ved at dividere med 55:

$$\frac{54}{55}n < k < \frac{56}{55}n.$$

Hvis $n = 55$, bliver uligheden $54 < k < 56$, og der findes præcis et helt positivt tal k der opfylder dette. Hvis $n \ge 56$, så er

$$\frac{54}{55}n < n < \frac{56}{55}n,$$

og

$$\frac{54}{55}n < n+1 < n+\frac{1}{55}n = \frac{56}{55}n.$$

I dette tilfælde opfylder både $k = n$ og $k = n+1$ uligheden, og der findes derfor mindst to hele positive tal k som opfylder uligheden.

Opgave 32 Svar: 1. Først sættes x uden foran en parentes

$$\begin{aligned}
0 &= -x(x-1)+x(x-2)-x(x-1)(x-2)\\
0 &= x(-(x-1)+(x-2)-(x-1)(x-2))\\
0 &= x(-x+1+x-2-(x^2-3x+2))\\
0 &= x(-x^2+3x-3).
\end{aligned}$$

Ifølge nulreglen er $x = 0$ eller $-x^2+3x-3 = 0$. Andengradsligningens diskriminant er mindre end 0, dvs. den har ingen løsninger. Derfor er $x = 0$ eneste løsning, og ligningen har dermed præcis 1 løsning.

Opgave 33 Svar: 9449. Bemærk først at x er firecifret, mens $x+852$ er femcifret. Det betyder at $x \ge 10000-852 = 9048$. Da x er et palindrom, må $x = 9aa9$, hvor a er et ciffer. Desuden er $9aa9+852 \le 9999+852 = 10851$. Det betyder at det femcifrede palindrom $9aa9+852$ er på formen $10b01$, hvor b er et ciffer. Derfor må $a9+52 = 101$, dvs. $a9 = 101-52 = 49$ og dermed $a = 4$. Altså er $x = 9449$ og $x+852 = 10301$.

Opgave 34 Svar: E. Hvis man regner de første tal i følgen ud, får man: $3,5,2,-3,-5,-2,3,5,\ldots$. Da det næste tal i følgen er bestemt ud fra de to foregående, kan vi se at følgen gentager sig og bliver periodisk da vi når tilbage til de to tal som vi startede med i samme rækkefølge. Følgen består altså af tallene $5,3,2,-3,-5,-2$ gentaget i det uendelige i denne rækkefølge. Dermed kan vi udelukke A, B, C og D, mens E er sand.

Opgave 35 Svar: 250000. Vi omskriver produktet P:

$$\begin{aligned}
P &= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\left(1+\frac{1}{4}\right)^2\left(1+\frac{1}{5}\right)^2\ldots\left(1+\frac{1}{999}\right)^2\\
&= \left(\frac{2+1}{2}\right)^2\left(\frac{3+1}{3}\right)^2\left(\frac{4+1}{4}\right)^2\left(\frac{5+1}{5}\right)^2\ldots\left(\frac{999+1}{999}\right)^2\\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{5}{4}\right)^2\left(\frac{6}{5}\right)^2\ldots\left(\frac{1000}{999}\right)^2\\
&= \frac{3^2}{2^2}\frac{4^2}{3^2}\frac{5^2}{4^2}\ldots\frac{1000^2}{999^2}\\
&= \frac{1000^2}{2^2} = 250000.
\end{aligned}$$