Algebra - Teori og problemløsning

Kapitel 1-3 giver en grundlæggende introduktion til at omskrive udtryk, faktorisere og løse ligningssystemer. De kan betragtes som en slags opvarmning til algebra og har fokus på grundlæggende metoder som giver et godt grundlag for mere udfordrende opgaver. De fleste af opgaverne i disse kapitler er standardopgaver der træner teorien, men der er også et par mere udfordrende opgaver i kapitel 3.

I kapitel 4 introduceres rationale og irrationale tal og centrale sætninger om disse. Kapitel 5 har fokus på summer. Her ser vi både på differensrækker, kvotientrækker og teleskopsummer.

Indhold

1 Kvadratsætninger og omskrivning til kvadrat

Kvadratsætningerne kan bruges i rigtig mange sammenhænge, og i dette afsnit skal vi se på hvordan de kan bruges til at løse andengradsligninger og andengradsuligheder, bevise uligheder og faktorisere.

1.1. Kvadratsætningerne

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,$$
$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab,$$
$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2.$$

1.2. Løsning af andengradsligninger ved at omskrive til kvadrat

For at løse andengradsligningen $4x^2+12x-7=0$ omskriver vi til kvadrat på følgende måde:

$$0 = 4x^2+12x-7 = (4x^2+12x+9)-9-7 = (2x+3)^2-16.$$

Læg mærke til hvordan vi udnytter første kvadratsætning til at finde ud af hvilket tal vi skal lægge til eller trække fra for at få et kvadrat hvor $4x^2+12x$ indgår. Nu er der ikke langt til en løsning:

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x+3 = \pm 4\\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3\pm 4}{2}\\ &\Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2} \vee x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Omskrivningen svarer helt til hvordan man udleder diskriminantformlen til at løse andengradsligninger, men når man bliver fortrolig med at omskrive på denne måde uden brug af formel, kan man bruge denne metode i mange andre sammenhænge også.

Nu til et eksempel hvor koefficienten til x^2 ikke er et kvadrattal. For at løse andengradsligningen $3x^2+5x-2=0$ ganger vi med 3 så koefficienten til x^2

bliver et kvadrattal. Løsningen ser nu sådan ud:

$$\begin{aligned} 9x^2+15x-6=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (3x+\tfrac{5}{2})^2 = 6+\frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x+\frac{5}{2} = \pm\frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{3} \vee x=-3. \end{aligned}$$

1.3. Andengradsuligheder

Andengradsuligheder kan også løses ved at omskrive til kvadrat. Her får vi brug for den helt grundlæggende iagttagelse at

$$x^2 \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\sqrt{a} \vee \sqrt{a} \leq x$$

og

$$x^2 \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a},$$

hvor $a \geq 0$.

Hvis vi ønsker at bestemme for hvilke reelle tal x følgende ulighed gælder

$$x^2+6x+5 \geq 0,$$

kan vi også benytte metoden med at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2+6x+5 \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+3)^2 \geq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x+3 \leq -2 \vee 2 \leq x+3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq -5 \vee -1 \leq x. \end{aligned}$$

Og endnu et eksempel:

$$\begin{aligned} 3x^2-x<2 \quad &\Leftrightarrow \quad 9x^2-3x<6 \\ &\Leftrightarrow \quad (3x-\tfrac{1}{2})^2 < \frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} < 3x-\frac{1}{2} < \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -2<3x<3 \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{3} < x < 1. \end{aligned}$$

1.4. Uligheder

Nogle uligheder kan man vise gælder ved at udnytte at et kvadrat altid er større end lig med nul. Fx er

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$

for alle relle tal x og y, fordi uligheden kan omskrives til $(x-y)^2 \geq 0$ som er sand da et kvadrat aldrig er negativt.

Uligheden

$$x^2+9y^2+\frac{37}{9} \geq 4x+2y$$

ser umiddelbart temmelig kompliceret ud, men ved at omskrive til kvadrat kan vi nemt vise at den er sand for alle reelle tal x og y:

$$\begin{aligned} x^2+9y^2+\frac{37}{9} \geq 4x+2y \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2-4x+4)+(9y^2-2y+\tfrac{1}{9}) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+(3y-\tfrac{1}{3})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

1.5. Faktorisering

Indtil videre har vi kun bugt de to første kvadratsætninger. Nu skal vi også bruge den sidste til at faktorisere udtryk da det ofte er en god ide at omskrive til et produkt.

Udtrykket x^2-y^2+x+y kan faktoriseres til

$$x^2-y^2+x+y=(x+y)(x-y)+x+y=(x+y)(x-y+1).$$

Her brugte vi den sidste kvadratsætning og omskrev derefter videre.

Betragt nu udtrykket $4x^2y^2+x^2+4x^2y-y^2$. Først lægger vi mærke til at de tre første led kan omskrives til et kvadrat, og derefter bruger vi sidste kvadratsætning:

$$4x^2y^2+x^2+4x^2y-y^2=(2xy+x)^2-y^2=(2xy+x+y)(2xy+x-y).$$

I næste eksempel får vi brug for at lægge et ekstra led til og trække det fra igen undervejs i omskrivningen:

$$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

Her er tricket at se at det der står, næsten er et kvadrat, lægge det til der mangler og trække det fra igen, for at omskrive til kvadrat.

Opgave 1.1. Løs følgende andengradsligninger ved at omskrive til kvadrat.

a) $5x^2-6x+1=0$.

b) $a^2-a+\frac{1}{4}$.

c) $3x^2+4x+2=0$.

Opgave 1.2. Løs følgende andengradsuligheder ved at omskrive til kvadrat.

a) $x^2+2x>3$.

b) $3y^2+7y+2\leq 0$.

Opgave 1.3. Bevis følgende uligheder ved at omskrive til kvadrat.

a) Bevis at $a^2+1\geq 2a$ for alle reelle tal a.

b) Bevis at $x+\frac{1}{x}\geq 2$ for alle positive reelle tal x.

c) Bevis at $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ for alle positive relle tal a of b.

d) Bevis at hvis $x+y=1$ for to positive reelle tal x og y, da er $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 4$.

e) Bevis at $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ for alle reelle tal x, y og z.

f) Bevis at $8x^2+2y^2+y+\frac{5}{8}\geq 4x$ for alle reelle tal x og y

Opgave 1.4. Faktoriser følgende udtryk:

a) $9x^2-3x+\frac{1}{4}$.

b) $2n^2+8m^2+8nm$.

c) $9a^2-b^2+6a+2b$.

d) a^2-b^2+6a+9.

e) $a^2+2b^2+3ab+b-1$.

f) n^4+4.

2 Andengradsligninger og skjulte andengradsligninger

Nu skal vi se på hvordan man forholdsvis nemt kan gætte løsningerne til en andengradsligning hvis de er heltallige, og at ligninger der der ikke umiddelbart ligninger andengradsligninger, kan være skjulte andengradsligninger hvor den variable fx er x^2, x^3, $\sqrt{x}$ eller andet.

2.1. Gæt løsninger til andengradsligninger

Det er nemt at gætte løsninger til andengradsligninger hvis de er heltallige. Det er kendt at hvis andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$ har løsningerne x_1 og x_2, da er

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2.$$

Hvis $a=1$, ses at $b=-(x_1+x_2)$ og $c=x_1x_2$, dvs. hvis vi skal gætte løsningerne til ligningen $x^2-5x+6=0$, skal vi gætte to tal x_1 og x_2 så $x_1+x_2=5$ og $x_1x_2=6$. Det er nemt at se at $x_1=2$ og $x_2=3$ løser begge ligninger, og de er derfor løsningerne til $x^2-5x+6=0$ som kan faktoriseres $(x-2)(x-3)=0$.

Løsningerne til andengradsligningen $3x^2-9x-12=0$ kan gættes ved først at faktorisere $3(x^2-3x-4)=0$ og derefter finde løsninger x_1 og x_2 som opfylder at $x_1+x_2=3$ og $x_1x_2=-4$. Her er $x_1=-1$ og $x_2=4$ løsningerne, og ligningen kan faktoriseres $3(x+1)(x-4)=0$.

Man kan selvfølgelig på helt samme måde gætte løsninger hvis de ikke er heltallige; det er bare sværere.

2.2. Skjulte andengradsligninger

Ligninger som $x^4-3x^2-4=0$ og $a^6-9a^3+8=0$ kan betragtes som andengradsligninger hvor den variable er henholdsvis x^2 og a^3, da de kan omskrives til $(x^2)^2-3x^2-4=0$ og $(a^3)^2-9a^3+8=0$. Vi kan derfor løse dem på samme måde som andengradsligninger fx ved at gætte løsninger:

$$(x^2)^2-3x^2-4=0\quad\Leftrightarrow\quad(x^2-4)(x^2+1)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2=4$$

da x^2 ikke kan være negativ. Samtlige løsninger er altså $x=\pm 2$.

Den anden ligning løses tilsvarende:

$$(a^3)^2-9a^3+8=0\quad\Leftrightarrow\quad(a^3-1)(a^3-8)=0\quad\Leftrightarrow\quad a^3=1\vee a^3=8$$

Samtlige løsninger er derfor $a = 1$ og $a = 2$.

I de to første eksempler skulle vi blot finde den variabel der gjorde ligninger til andengradsligninger. Nu ser vi på et eksempel der også kræver at vi skriver om på ligningen:

$$y^2 + 14\frac{1}{y^2} = 9$$

Her bemærker vi først at $y^2 \neq 0$ da der divideres med y^2. Derfor kan vi gange med y^2 på begge sider af ligningstegnet og få en ligning med præcis de samme løsninger:

$$(y^2)^2 - 9y^2 + 14 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 2)(y^2 - 7) = 0$$

Dermed er samtlige løsninger $y = \pm\sqrt{2}$ og $y = \pm\sqrt{7}$.

Opgave 2.1. Gæt løsningerne til følgende andengradsligninger og faktoriser

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$.

b) $2x^2 + 8x - 10 = 0$.

c) $-4x^2 + 24x + 28 = 0$.

Opgave 2.2. Løs følgende skjulte andengradsligninger

a) $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$.

b) $u^{10} + 1 = 2u^5$.

c) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

d) $a^4 = 15 + \frac{16}{a^4}$.

e) $4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$.

Opgave 2.3. Bevis at forholdet mellem siderne på et A4-ark er $\sqrt{2}$. (Om A4-papir ved du at det er rektangulært og ligedannet med A5-papir der fremkommer ved halvering af den lange side af et stykke A4-papir.)
Hint: Kald højden for y og bredden x, og opstil en ligning som forholdet $\frac{y}{x}$ opfylder.

Opgave 2.4. Som bekendt siges et punkt P at dele et liniestykke AB i det gyldne snit hvis $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|}$, og denne fælles værdi af forholdet kaldes det gyldne snit. Bevis at det gyldne snit er lig med $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Hint: Sæt uden tab af generalitet $|PB| = 1$, kald $|AB|$ for x, og opstil en ligning som x opfylder.

3 Ligningssystemer

Lineære ligningssystemer kan løses ved standardmetoder, men mange ligningssystemer er mere udfordrende. Her vises hvordan lineære ligningssystemer kan løses ved substitution og ved lige store koefficienters metode. Desuden ser vi på ikke-lineære ligningssystemer og kommer mere idéer til hvordan man løser disse.

3.1. Lineære ligningssystemer

$$\begin{aligned} 3x+y-2z&=6,\\ -x+2y+3z&=-9,\\ 5x-3y+z&=6. \end{aligned}$$

Ligningssystemet består af tre ligninger med tre ubekendte, og det kaldes lineært fordi alle ligningerne er på formen $ax+by+cz=d$, hvor a,b,c,d er konstanter. Den slags ligninger kan løses uden problemer med standardmetoder.

Substitution

Det kan fx løses ved at isolere fx y i første ligning så y er udtrykt ved x og z, og indsætte det i de to andre ligninger. På den måde reduceres ligningssystemet til to ligninger med to ubekendte. Dette kaldes substitutionsmetoden da y substitueres med noget andet. Ifølge den første ligning er $y=6-3x+2z$. Ved at indsætte dette i de to andre ligninger fås:

$$\begin{aligned} -x+2(6-3x+2z)+3z&=-9,\\ 5x-3(6-3x+2z)+z&=6, \end{aligned}$$

og altså

$$\begin{aligned} -x+z&=-3,\\ 14x-5z&=24. \end{aligned}$$

Ved at isolere x i den første ligning og indsætte i den sidste fås

$$14\cdot(z+3)-5z=24 \quad\Leftrightarrow\quad 9z=-18 \quad\Leftrightarrow\quad z=-2.$$

Altså er $z=-2$, $x=3+(-2)=1$ og $y=6-3\cdot 1+2(-2)=-1$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $(x,y,z)=(1,-1,-2)$ faktisk løser ligningssystemet.

Lige store koefficienters metode

Vi kan også løse ligningssystemet ved at benytte lige store koefficienters metode. Hvis vi ganger første ligning med 3 og anden ligning med 2 fås:

$$\begin{aligned} 9x+3y-6z&=18,\\ -2x+4y+6z&=-18. \end{aligned}$$

Vi har nu to ligninger hvor koefficienten til z er den samme pånær fortegn, og når vi lægger dem sammen fås en ligning i x og y: $7x+7y=0$ og altså $x+y=0$. På den måde har vi elimineret z ved at kombinere de to første ligninger. Nu gør vi det samme med de to sidste ligninger:

$$\begin{aligned} -x+2y+3z&=-9,\\ 15x-9y+3z&=18. \end{aligned}$$

Når vi trækker den nederste ligning fra den øverste fås $-16x+11y=-27$. Nu har vi reduceret til to ligninger med to ubekendte. Vi kan igen få lige store koefficienter til fx x ved at gange første ligning med 16:

$$\begin{aligned} 16x+16y&=0,\\ -16x+11y&=-27 \end{aligned}$$

Summen af ligningerne er $27y=-27$ og altså $y=-1$ Nu kan vi udnytte de tidligere ligninger til at bestemme x og z og som før få $(x,y,z)=(1,-1,-2)$.

3.2. Ikke lineære ligningssystemer

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y}+x&=3,\\ \frac{x}{x+y}&=2. \end{aligned}$$

Disse ligninger er ikke lineære, så vi kan ikke gøre helt som i eksemplet før. Man kan sagtens bruge substitutionsmetoden her, men det er lidt mere besværligt. Vi ser i stedet på ligningerne og overvejer om der ikke er noget smartere vi kan gøre. Hvis vi ganger den første ligning igennem med x, så bliver brøken i denne ligning lig med brøken i den anden ligning, og så kan vi trække dem fra hinanden og få en ligning i x.

Inden vi ganger igennem med x, skal vi sikre os at $x=0$ ikke er en løsning til ligningssystemet. Hvis vi ser på ligning nummer to, er det klart at der ikke findes løsninger hvor $x=0$. Derfor kan vi antage at $x\neq 0$, og få:

$$\frac{x}{x+y}+x^2=3x,$$
$$\frac{x}{x+y}=2.$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås $x^2-3x+2=0$. Dette er en andengradsligning som fx kan løses ved at faktorisere: $(x-1)(x-2)=0$. Dermed er $x=1$ eller $x=2$. Hvis $x=1$, fås ved at indsætte i anden ligning at $\frac{1}{1+y}=2$, og altså $y=-\frac{1}{2}$. Hvis vi indsætter $x=1$ og $y=-\frac{1}{2}$ i første ligning, ses at $(x,y)=(1,-\frac{1}{2})$ er en løsning til ligningssystemet. Hvis $x=2$, er $\frac{2}{2+y}=2$, og altså $y=-1$. Ved indsættelse ses at $(x,y)=(2,-1)$ også løser ligningssystemet.

Bemærk at vi ved at omskrive ligningssystemet først finder alle mulige løsninger, men at vi skal indsætte i begge ligninger til slut for at se om de faktisk er løsninger.

Advarsel Pas på ikke at gange eller dividere med nul når du omskriver i de følgende opgaver!

Opgave 3.1. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}3x+2y-5z&=5,\\ 2x+y+7z&=-6,\\ x+4y-10z&=0.\end{aligned}$$

Opgave 3.2. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}y+2x&=x^2-10,\\ 2y-2x&=-20.\end{aligned}$$

Opgave 3.3. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{5}{x}-\frac{3}{y}&=1,\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}&=7.\end{aligned}$$

Opgave 3.4. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}\frac{12}{x^2+y}+y&=4,\\ \frac{3y}{x^2+y}+2y&=5.\end{aligned}$$

Opgave 3.5. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}x+y&=1,\\ \frac{x}{x^2+y^2}&=2x.\end{aligned}$$

Opgave 3.6. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned}xy&=3,\\ yz&=1,\\ zx&=12.\end{aligned}$$

Opgave 3.7. Bestem samtlige reelle løsninger til ligningssystemet.

$$\begin{aligned}x+\lfloor y\rfloor+\{z\}&=1{,}1\\ z+\lfloor x\rfloor+\{y\}&=2{,}2\\ y+\lfloor z\rfloor+\{x\}&=3{,}3.\end{aligned}$$

Heltalsdelen af x betegnes $\lfloor x\rfloor$ og er det største hele tal mindre end lig med x. Brøkdelen af x betgens $\{x\}$ og er $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. Fx er $\lfloor 5{,}39\rfloor=5$ og $\{5{,}39\}=0{,}39$.

4 Rationale og irrationale tal

4.1. Rationale tal

Et rationalt tal er et tal der kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ med et helt tal i tæller og nævner og selvfølgelig $b \neq 0$.

Om to rationale tal $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$ gælder at deres sum, differens, produkt og kvotient igen er et rationalt tal. Fx er deres sum et rationalt tal da

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

og $ad + bc$ og bd er hele tal da a, b, c, d er hele tal, og $bd \neq 0$ da $b \neq 0$ og $d \neq 0$.

4.2. Irrationale tal

Et irrationalt tal er et reelt tal der ikke er rationalt, dvs. et reelt tal som ikke kan skrives som en brøk med et helt tal i tæller og nævner. Fx er $\sqrt{2}$ og π irrationale tal.

Summen, differensen, produktet og kvotienten af et rationalt og et irrationalt tal er irrationalt, med undtagelse af produkt og kvotient hvor det rationale tal er 0. Fx er deres sum et irrationalt tal, for hvis den var rational ville det irrationale tal være differensen mellem to rationale tal og altså selv rational, hvilket er en modstrid. Dermed er summen af et rationalt og et irrationalt tal irrationalt.

Summen, differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal kan derimod både være rational og irrational. Fx er $\sqrt{2} + (3 - \sqrt{2}) = 3$ rational, mens $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ er irrational.

Opgave 4.1. Bevis at differens, produkt og kvotient af to rationale tal igen er rationale tal.

Opgave 4.2. Bevis at differensen, produktet og kvotienten af et rationalt og et irrationalt tal er et irrationalt tal (på nær produkt og kvotient hvor det rationale tal er 0).

4.3. Sætning

Lad n være et helt positivt tal. Da er $\sqrt{n}$ et rationalt tal netop hvis n er et kvadrattal.

Bevis: Det er oplagt at hvis n er et kvadrattal, da er $\sqrt{n}$ et helt tal og altså rational. Antag at n ikke er et kvadrattal. Vi viser indirekte at $\sqrt{n}$ er irrational ved at antage det modsatte og nå frem til en modstrid. Antag derfor at $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ hvor a og b er hele tal. Dermed er

$$b^2 n = a^2$$

Betragt nu primfaktoropløsningen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Fordi n ikke er et kvadrattal, er mindst en af eksponenterne, lad os sige α_i, ulige da kvadrattallene netop er de hele tal hvor alle eksponeneterne i primfaktoropløsningen er lige. Eksponenten til p_i på venstresiden $b^2 n$ er derfor ulige da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af kvadrattallet b^2 er lige, og lige plus ulige giver ulige. Eksponenten til p_i på højresiden a^2 er lige da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af kvadrattallet a^2 er lige. Dette er en modstrid da primfaktoropløsning er entydig, og dermed er $\sqrt{n}$ irrational. □

Opgave 4.3. Bevis at differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal både kan være rationalt og irrationalt.

4.4. Sætning

Lad n og m være hele positive tal. Da er $\sqrt[m]{n}$ et rationalt tal netop hvis n er en m'te potens af et postivt helt tal.

Opgave 4.4. Bevis sætning 4.4.

4.5. Sætning

Lad a og b være to forskellige reelle tal. Der er uendeligt mange rationale og uendeligt mange irrationale tal mellem a og b.

Bevis: Vi viser kun at der er et rationalt tal mellem a og b. Resten overlades til læseren i en opgave. Antag uden tab af generalitet at $a < b$. Lad n være et helt tal så $\frac{1}{n} < b-a$. Lad m være det mindste hele tal så $a < \frac{m}{n}$. Da må det rationale tal $\frac{m}{n}$ ligge mellem a og b da

$$a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b. \quad \square$$

Opgave 4.5. Lad a og b være to forskellige reelle tal. Bevis at der mellem a og b ligger uendeligt mange rationale tal og uendeligt mange irrationale tal.

Opgave 4.6. Lad a og b være ro forskellige rationale tal. Bevis at hvis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ er rational eller $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ er rational, da er $\sqrt{a}$ og $\sqrt{b}$ også rationale.

Opgave 4.7. For hvilke postive hele tal n og m gælder at $\sqrt{\frac{n}{m}}$ er rational?

Opgave 4.8. Bestem alle ikke-negative hele tal a, b og c så

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = \sqrt{2014}.$$

(NMC 2014 opgave 2). *Hint*: Træk $\sqrt{c}$ fra på begge sider, og gør noget smart;)

5 Summer

5.1. Sumtegn

Når man skal angive en sum med mange led som fx $1+2+3+\cdots+100$ eller $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{57}$ bruger man ofte sumtegn $\sum$ og et indeks, fx i. Under sumtegnet skrives fra hvilket indeks summen starter, fx $i=1$, og over sumtegnet skrives sidste indeks. Her er nogle eksempler:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+\cdots+100.$$

$$\sum_{i=1}^{57} x_i = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{57}.$$

$$\sum_{i=1}^{50} 2i = 2+4+6+\cdots+100.$$

$$\sum_{i=11}^{35} \frac{1}{2i} = \frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\cdots+\frac{1}{70}.$$

$$\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

$$\sum_{i=10}^{n} 10i = 100+110+120+\cdots+10n.$$

Sørg for at blive fortrolig med sumtegnet da du får brug for det i mange sammenhænge. Det er en god idé i starten hver gang du ser et sumtegn at skrive summen op som ovenfor.

5.2. Differensrække

En differensrække (også kaldet en aritmetisk progression) er en talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med den egenskab at differensen mellem ethvert af følgens tal og det foregående er en konstant d kaldet differensen.

Summen af de første n led i differensrækken er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2}$$

5.3. Kvotientrække

En kvotientrække (også kaldet en geometrisk progression) er en talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med den egenskab at kvotienten mellem ethvert af rækkens tal og det foregående er et fast tal q kaldet kvotienten.

Summen af de første n led i kvotientrækken er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Opgave 5.1.

a) Bevis formlen for summen af de første n led i en differensrække.

b) Bevis formlen for summen af de første n led i en kvotientrække.

c) Udregn summen $1+2+4+\cdots+1024$.

5.4. Teleskopsummer

Det kan umiddelbart se svært ud at beregne summen

$$\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

Ved en simpel omskrivning bliver det helt ligetil fordi vi kan få næsten alle led til at gå ud med hinanden. Bemærk først at for hele tal n, m, hvor $n \neq m$, er

$$\frac{1}{nm} = \frac{1}{m-n}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\Big).$$

Specielt er

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Vores sum fra før kan nu skrives som

$$\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{i(i+1)} = \Big(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\Big) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Dette kaldes en teleskopsum fordi summen kan *foldes sammen* ligesom et teleskop.

Opgave 5.2. Udregn følgende summer

$$\sum_{i=1}^{1000} \frac{1}{2i(2i+2)}.$$

$$\sum_{a=10}^{199} \frac{1}{5a(5a+5)}.$$

$$\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{(3i-1)(3i+2)}.$$

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{3}{n^2+3n+2}.$$

Opgave 5.3. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ være en differensrække med differens d. Udregn summen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}}.$$

udtrykt ved a_1, d og n.

5.5. Flere teleskopsummer

For at udregne summen

$$\sum_{i=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

bemærker vi først at

$$\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{(\sqrt{i+1}+\sqrt{i})(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})} = \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{(i+1)-i} = \sqrt{i+1}-\sqrt{i}.$$

Nu kan vi nemt omskrive summen

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} &= \sum_{i=1}^{80} (\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{81}-\sqrt{80}) \\ &= -\sqrt{1}+\sqrt{81} = 8.\end{aligned}$$

5.6. Bemærkning

Det er et standardtrick der virkelig er værd at huske, at hvis der står $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ i nævneren, så forlænges brøken med $\sqrt{n} \mp \sqrt{m}$ fordi det giver $n-m$ i nævneren.

Opgave 5.4. Vis at

$$\sum_{i=1}^{132} \frac{1}{\sqrt{3i+1}+\sqrt{3i+4}} = 6$$

Opgave 5.5. Vis at

$$\sum_{i=1}^{5000} \frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} > 49.$$

Opgave 5.6. Vis at

$$\sum_{i=0}^{43} \frac{1}{\sqrt{10i+1}+\sqrt{10i+6}} \geq 2.$$

Hint: Tilføj flere led så du kan få en teleskopsum.

I de næste opgaver skal du omskrive til en teleskopsum ved at lave nogle smarte omskrivninger. De er lidt mere udfordrende end de tidligere! Husk at for et positivt helt tal n er $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Opgave 5.7. Udregn

$$\sum_{n=1}^{100} n! \cdot n.$$

Opgave 5.8. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Opgave 5.9. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

Opgave 5.10. Vis at

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}} < \sqrt{2}$$

for alle positive hele tal $n \geq 2$.

6 Løsningsskitser

Opgave 1.1

a)

$$\begin{aligned} 5x^2-6x+1=0 &\Leftrightarrow 25x^2-30x+5=0 \\ &\Leftrightarrow (5x-3)^2=4 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{3\pm 2}{5} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{5} \vee x=1. \end{aligned}$$

b)

$$a^2-a+\frac{1}{4}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (a-\frac{1}{2})^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=\frac{1}{2}.$$

c)

$$3x^2+4x+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad 9x^2+12x+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad (3x+2)^2=-2.$$

Dermed har ligningen ingen løsninger.

Opgave 1.2

a)

$$\begin{aligned} x^2+2x>3 &\Leftrightarrow (x+1)^2>4 \\ &\Leftrightarrow x+1<-2 \vee 2<x+1 \\ &\Leftrightarrow x<-3 \vee 1<x. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3y^2+7y+2\le 0 &\Leftrightarrow (3y+\frac{7}{2})^2\le\frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow -\frac{5}{2}\le 3y+\frac{7}{2}\le\frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow -2\le y\le -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Opgave 1.3

a)

$$a^2+1\ge 2a \quad\Leftrightarrow\quad (a-1)^2\ge 0.$$

b) Bemærk at x er positiv, og vi derfor kan gange med x på begge sider af ulighedstegnet.

$$x+\frac{1}{x}\ge 2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-2x+1\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-1)^2\ge 0.$$

c)

$$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab} \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\ge 2\sqrt{a}\sqrt{b} \quad\Leftrightarrow\quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0.$$

d) Antag at $x+y=1$, og at x og y begge er positive. Ved at udnytte at $(x+y)^2 = x+y$ fordi $x+y=1$, fås:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge 4 &\Leftrightarrow \frac{y+x}{xy}\ge 4 \\ &\Leftrightarrow x+y\ge 4xy \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2\ge 4xy \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0. \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx \quad\Leftrightarrow \\ &(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2)\ge 2xy+2yz+2zx \quad\Leftrightarrow \\ &(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0. \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} 8x^2+2y^2+y+\frac{5}{8}\ge 4x &\Leftrightarrow 16x^2-8x+1+4y^2+2y+\frac{1}{4}\ge 0 \\ &\Leftrightarrow (4x-1)^2+(2y+\frac{1}{2})^2\ge 0. \end{aligned}$$

Opgave 1.4

a) $9x^2-3x+\frac{1}{4}=(3x-\frac{1}{2})^2$.

b) $2n^2+8m^2+8nm=2(n+2m)^2$.

c) $9a^2-b^2+6a+2b=(3a+b)(3a-b)+2(3a+b)=(3a+b)(3a-b+2)$.

d) $a^2-b^2+6a+9=(a+3)^2-b^2=(a+b+3)(a-b+3)$.

e) $a^2+2b^2+3ab+b-1=(a+b)^2+b^2+ab+b-1=$
$(a+b+1)(a+b-1)+b(a+b+1)=(a+2b-1)(a+b+1)$.

f) $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$.

Opgave 2.1
a) Ligningen
$$x^2-6x+8=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-4)(x-2)=0$$
har løsningerne $x=2$ og $x=4$.
b) Ligningen
$$2x^2+8x-10=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2(x+5)(x-1)=0$$
har løsningerne $x=1$ og $x=-5$.
c) Ligningen
$$-4x^2+24x+28=0 \quad\Leftrightarrow\quad -4(x-7)(x+1)=0$$
har løsningerne $x=-1$ og $x=7$.

Opgave 2.2
a)
$$\begin{aligned} x^4-8x^2+7=0 \quad&\Leftrightarrow\quad (x^2)^2-8x^2+7=0\\ &\Leftrightarrow\quad (x^2-1)(x^2-7)=0.\end{aligned}$$
Samtlige løsninger er altså $x=\pm1$ og $x=\pm\sqrt{7}$.
b)
$$\begin{aligned} u^{10}+1=2u^5 \quad&\Leftrightarrow\quad (u^5)^2-2u^5+1=0\\ &\Leftrightarrow\quad (u^5-1)^2=0\\ &\Leftrightarrow\quad u^5=1.\end{aligned}$$
Eneste løsning er derfor $u=1$.
c)
$$\begin{aligned} x-5\sqrt{x}+6=0 \quad&\Leftrightarrow\quad (\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+6=0\\ &\Leftrightarrow\quad (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)=0.\end{aligned}$$
Samtlige løsninger er altså $x=(\sqrt{2})^2=4$ og $x=(\sqrt{3})^2=9$.
d)
$$\begin{aligned} a^4=15+\frac{16}{a^4} \quad&\Leftrightarrow\quad (a^4)^2-15a^4-16=0\\ &\Leftrightarrow\quad (a^4-16)(a^4+1)=0\end{aligned}$$
Da a^4 ikke kan være negativ, er samtlige løsninger $a=\pm2$.
e)
$$\begin{aligned} 4^x-2\cdot2^x+1=0 \quad&\Leftrightarrow\quad (2^x)^2-2\cdot2^x+1=0\\ &\Leftrightarrow\quad (2^x-1)^2=0\end{aligned}$$
Altså er $2^x=1$ og eneste løsning $x=0$.

Opgave 2.3 Kald højden på et A4-ark for y og bredden x. Da bliver højden på et A5-ark x og bredden $\frac{y}{2}$. Da et A4-ark og et A5-ark er ligedannede, er forholdet mellem højde og bredde det samme:
$$\frac{y}{x}=\frac{x}{\frac{y}{2}}=2\frac{x}{y} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{y}{x}\right)^2=2.$$
Da x og y begge er positive, er forholdet mellem højde og bredde $\frac{y}{x}=\sqrt{2}$.

Opgave 2.4 Lad P være et punkt på linjestykket AB så $\frac{|AB|}{|AP|}=\frac{|AP|}{|PB|}$. Sæt $|BP|=1$ og $|AP|=x$. Da svarer betingelsen til
$$\frac{1+x}{x}=\frac{x}{1} \quad\Leftrightarrow\quad 0=x^2-x+1 \quad\Leftrightarrow\quad (x-\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}$$
Da linjestykkerne har positiv længde, er $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dette svarer netop til forholdet $\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{x}{1}=x$.

Opgave 3.1 Ved at bruge lige store koefficienters metode fås
$$\begin{aligned}(3x+2y-5z)-3(x+4y-10z)&=5-3\cdot0,\\ (2x+y+7z)-2(x+4y-10z)&=-6-2\cdot0,\end{aligned}$$
som reduceres til
$$\begin{aligned}-2y+5z&=1,\\ -7y+27z&=-6.\end{aligned}$$

Ved endnu engang at bruge lige store koefficienters metode fås

$$7(-2y+5z)-2(-7y+27z)=7\cdot 1-2\cdot(-6) \quad\Leftrightarrow\quad -19z=19 \quad\Leftrightarrow\quad z=-1.$$

Ved indsættelse ses at når $z=-1$, er $y=-3$ og $x=2$. Dette er eneste løsning.

Opgave 3.2 Ved at dividere nederste ligning med 2 og trække de to ligninger fra hinanden fås

$$(y+2x)-(y-x)=(x^2-10)-(10) \quad\Leftrightarrow\quad 3x=x^2 \quad\Leftrightarrow\quad 0=x(x-3)$$

dvs. $x=0$ eller $x=3$. Hvis $x=0$, er $y=-10$, og hvis $x=3$, er $y=-7$. Samtlige mulige løsninger er derfor $(x,y)=(0,-10)$ og $(x,y)=(3,-7)$, og ved indsættelse ses at de faktisk er løsninger.

Opgave 3.3 Ved at gange den nederste ligning med 3 og lægge de to ligninger sammen fås

$$\frac{11}{x}=22 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}.$$

Ved indsættelse ses at $y=\frac{1}{3}$. Eneste mulige løsning er altså $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$, og ved indsættelse ses at den faktisk løser ligningssystemet.

Opgave 3.4 Af sidste ligning ses at $y=0$ ikke er en løsning. Antag derfor at $y\neq 0$ og omskriv til

$$\frac{12y}{x^2+y}+y^2=4y,$$
$$\frac{12y}{x^2+y}+8y=20.$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås $y^2-12y+20=0$ og altså $(y-2)(y-10)=0$. Dermed er $y=2$ eller $y=10$. Hvis $y=2$, er $\frac{12}{x^2+2}+2=4$, og altså $x=\pm 2$. Hvis $y=10$, er $\frac{12}{x^2+10}+10=4$, og altså $x^2=-12$ hvilket er umuligt. Eneste mulige løsninger er derfor $(x,y)=(\pm 2,2)$, og ved indsættelse tjekkes at de begge løser ligningssystemet.

Opgave 3.5 Hvis $x=0$, er anden ligning opfyldt for alle y, hvor $y\neq 0$. Første ligning giver i dette tilfælde $y=1$. Dermed er $(x,y)=(0,1)$ eneste løsning hvor $x=0$. Antag derfor at $x\neq 0$, og divider anden ligning med x. Kvadrer desuden første ligning:

$$x^2+y^2+2xy=1,$$
$$\frac{1}{x^2+y^2}=2.$$

Ved at kombinere de to ligninger fås $xy=\frac{1}{4}$, og sammen med $x+y=1$ at $x(1-x)=\frac{1}{4}$. Dermed er $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, og altså $(x-\frac{1}{2})^2=0$. I dette tilfælde ses at $x=y=\frac{1}{2}$, og ved indsættelse ses at dette er en løsning. Samtlige løsninger er dermed $(x,y)=(0,1)$ og $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Opgave 3.6 Bemærk først at ingen af de tre ubekendte kan være 0. Ved at udtrykke x ved y i første ligning, z ved y i anden ligning og derefter indsætte dette i sidste ligning fås

$$\frac{3}{y}\cdot\frac{1}{y}=12 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\frac{1}{2}.$$

Eneste mulige løsninger er derfor $(x,y,z)=(6,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ og $(x,y,z)=(-6,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, og ved at indsætte i ligningssystemet ses at de begge er løsninger.

Opgave 3.7 Ved at lægge alle tre ligninger sammen og udnytte at $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ fås

$$x+y+z=3{,}3.$$

Ved at trække de oprindelige ligninger fra fås

$$\lfloor z\rfloor+\{y\}=2{,}2$$
$$\lfloor y\rfloor+\{x\}=1{,}1$$
$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=0.$$

Da $0\leq\{x\}<1$ og $\lfloor x\rfloor$ altid er et helt tal, er $x=0{,}1$, $y=1{,}2$ og $z=2$ eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at det faktisk er en løsning til ligningssystemet.

Opgave 4.1 At differens, produkt og kvotient af to rationale tal igen er rationale tal følger direkte af brøkregneregler.

Opgave 4.2 At differensen, produktet og kvotienten af et rationalt tal $\frac{a}{b}$ og et irrationalt tal x er et irrationalt tal, ses ved at antage det modsatte og se at det medfører at x er rational. (Bemærk at vi mht. produkt og kvotient skal antage at $a \neq 0$ da vi i beviset gerne vil dividere med a).

Opgave 4.3 At differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal både kan være rational og irrational ses af følgende eksempler: $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, $\sqrt{8}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2$ og $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$.

Opgave 4.4 Det er oplagt at hvis n er en m'te potens af et positivt helt tal, da er $\sqrt[m]{n}$ et helt tal og altså rational. Antag at n ikke er en m'te potens af et positivt heltal. Vi viser indirekte at $\sqrt[m]{n}$ er irrational ved at antage det modsatte og nå frem til en modstrid. Antag derfor at $\sqrt[m]{n}=\frac{a}{b}$ hvor a og b er hele tal. Dermed er

$$b^m n = a^m$$

Betragt nu primfaktoropløsningen $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$. Fordi n ikke er en m'te potens af et positivt heltal, er mindst en af eksponenterne, lad os sige α_i, ikke et multiplum af m da de m'te potenser netop er de hele tal hvor alle eksponeneterne i primfaktoropløsningen er multipla af m. Eksponenten til p_i på venstresiden $b^m n$ er derfor ikke et multiplum af m da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af b^m er multipla af m. Eksponenten til p_i på højresiden a^m er derimod et multipla af m. Dette er en modstrid da primfaktoropløsning er entydig, og dermed er $\sqrt[m]{n}$ irrational.

Opgave 4.5 Lad a og b være to forskellige reelle tal, og antag uden tab af generalitet at $a<b$. Vi ved allerede at der ligger et rationalt tal q_1 mellem a og b. Der ligger yderligere et rationalt tal q_2 mellem q_1 og b. Sådan kan vi fortsætte og få uendeligt mange rationale tal $q_1, q_2, \ldots$ mellem a og b. Nu viser vi at der findes uendeligt mange irrationale tal mellem a og b. Lad c og d være to forskellige rationale tal mellem a og b med $c<d$. Lad yderligere n være et helt tal så $\frac{1}{n}<d-c$. Da følger det at det tidligere viste at $x_1=c+\frac{\sqrt{2}}{2n}$ er et irrationalt tal mellem c og d. Nu har vi vist at der mellem to vilkårlige forskellige reelle tal findes et irrationalt tal. Dermed findes der igen et irrationalt tal x_2 mellem x_1 og b. Sådan kan vi fortsætte og få uendeligt mange irrationale tal $x_1, x_2, \ldots$ mellem a og b.

Opgave 4.6 Lad a og b være rationale tal. Antag at $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ er rational. Hvis $\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$, er $a=b=0$, og dermed er a og b begge rationale. Antag derfor at a og b ikke begge er 0. Da er

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

også rational fordi kvotionen mellem to rationale tal er rational. Dermed er $\sqrt{a}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}$ rational, og også $\sqrt{b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{a}$ rational. Helt tilsvarende hvis $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ er rational.

Opgave 4.7 $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational netop hvis mn er et kvadrattal: Antag at $nm=a^2$ hvor a er et ikke-negativt helt tal. Da er $\sqrt{\frac{m}{n}}=\sqrt{\frac{a^2}{n^2}}=\frac{a}{n}$, hvilket viser at $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational. Antag at $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational, dvs. $\sqrt{\frac{m}{n}}=\frac{c}{d}$ hvor c og d er to ikke-negative heltal og $d\neq 0$. Da er $d^2nm=c^2n^2$, hvilket betyder at nm er et kvadrattal.

Opgave 4.8 Omskriv ligningen til $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2014}-\sqrt{c}$, og kvadrer:

$$a+b+2\sqrt{ab}=2014+c-2\sqrt{2014c}$$

Dette viser at $\sqrt{ab}+\sqrt{2014c}$ er rational, og dermed fra opgave 4.6 at $\sqrt{ab}$ og $\sqrt{2014c}$ begge er rationale. Da ab og $2014c$ er hele tal, ved vi fra sætning 4.3 at de begge er kvadrattal. Tallet $2014c=2\cdot 19\cdot 53\cdot c$ er et kvadrattal netop når $c=2014\cdot n^2$ hvor n er et ikke-negativt helt tal. Tilsvarende ses at $a=2014\cdot l^2$ og $b=2014\cdot m^2$ hvor l og m er ikke-negative hele tal, da der er symmetri mht. a, b og c. Den oprindelige ligning kan altså reduceres til $l+m+n=1$, og samtlige løsninger er derfor $(a,b,c)=(2014,0,0)$, $(a,b,c)=(0,2014,0)$ og $(a,b,c)=(0,0,2014)$.

Opgave 5.1

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+(n-1)d)\\ &= na_1+d(1+2+\cdots+(n-1))\\ &= na_1+d\frac{(n-1)n}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})\\ &= a_1\,\frac{q(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})-(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})}{q-1}\\ &= a_1\,\frac{q^n-1}{q-1}\end{aligned}$$

Summen består af de 11 første led i kvotientrækken $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ er er derfor ifølge formlen lig med

$$1\cdot\frac{2^{11}-1}{2-1} = 2^{11}-1 = 2047.$$

Opgave 5.2

$$\sum_{i=1}^{1000}\frac{1}{2i(2i+2)} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{1000}\Big(\frac{1}{2i}-\frac{1}{2i+2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1000}{2002} = \frac{250}{1001}.$$

$$\sum_{a=10}^{199}\frac{1}{5a(5a+5)} = \frac{1}{5}\sum_{a=10}^{199}\Big(\frac{1}{5a}-\frac{1}{5a+5}\Big) = \frac{1}{5}\Big(\frac{1}{50}-\frac{1}{1000}\Big) = \frac{1}{5}\cdot\frac{19}{1000} = \frac{19}{5000}.$$

$$\sum_{i=1}^{100}\frac{1}{(3i-1)(3i+2)} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{100}\Big(\frac{1}{3i-1}-\frac{1}{3i+2}\Big) = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{302}\Big) = \frac{1}{3}\cdot\frac{150}{302} = \frac{25}{151}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1000}\frac{3}{n^2+3n+2} &= 3\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{(n+2)(n+1)} = 3\sum_{n=1}^{1000}\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)\\ &= 3\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{1002}\Big) = 3\cdot\frac{500}{1002} = \frac{250}{167}\end{aligned}$$

Opgave 5.3

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i\cdot a_{i+1}} &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{a_{i+1}}\Big)\\ &= \frac{1}{d}\Big(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\Big)\\ &= \frac{1}{d}\Big(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+nd}\Big)\\ &= \frac{1}{d}\Big(\frac{nd}{a_1(a_1+nd)}\Big)\\ &= \frac{n}{a_1(a_1+nd)}.\end{aligned}$$

Opgave 5.4

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{132}\frac{1}{\sqrt{3i+1}+\sqrt{3i+4}} &= \sum_{i=1}^{132}\frac{\sqrt{3i+4}-\sqrt{3i+1}}{(3i+4)-(3i+1)}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{132}(\sqrt{3i+4}-\sqrt{3i+1})\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{3\cdot 132+4}-\sqrt{3\cdot 1+1})\\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{400}-\sqrt{4}) = 6\end{aligned}$$

Opgave 5.5

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5000}\frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}} &= \sum_{i=1}^{5000}\frac{\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1}}{(2i+1)-(2i-1)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5000}(\sqrt{2i+1}-\sqrt{2i-1})\\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{10001}-\sqrt{1})\\ &> \frac{1}{2}(100-1) > 49.\end{aligned}$$

Opgave 5.6 For at vi kan omskrive summen til en teleskopsum, bliver vi nødt til at tilføje alle de led vi mangler. Den sum vi skal vurdere størrelse af, er

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{431}+\sqrt{436}}.$$

Hvis vi tilføjer summen

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{21}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{436}+\sqrt{441}},$$

kan vi omskrive til en teleskopsum. I den sum vi tilføjer, er hvert led mindre end det tilsvarense i den oprindelige, dvs. den sum vi får bliver mindre end det dobbelte af den oprindelige:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{43}\frac{1}{\sqrt{10i+1}+\sqrt{10i+6}} &> \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{87}\frac{1}{\sqrt{5i+1}+\sqrt{5i+6}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{87}\frac{\sqrt{5i+6}-\sqrt{5i+1}}{(5i+6)-(5i+1)}\\ &= \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{87}(\sqrt{5i+6}-\sqrt{5i+1})\\ &= \frac{1}{10}(\sqrt{441}-\sqrt{1})\\ &= \frac{1}{10}(21-1)=2\end{aligned}$$

Opgave 5.7

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100}n!\cdot n &= \sum_{n=1}^{100}n!\big((n+1)-1\big)\\ &= \sum_{n=1}^{100}\big((n+1)!-n!\big)\\ &= 101!-1.\end{aligned}$$

Opgave 5.8

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\Big)\\ &= 1-\frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Opgave 5.9

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3 &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\Big((k+1)^2k^2-k^2(k-1)^2\Big)\\ &= \frac{(n+1)^2n^2}{4}.\end{aligned}$$

Opgave 5.10

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}} &= \sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{k}{\sqrt{k(k-1)}}-\frac{\sqrt{(k+1)(k-1)}}{\sqrt{k(k-1)}}\Big)\\ &= \sum_{k=2}^{n}\Big(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}}-\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\Big)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\\ &< \sqrt{2}\end{aligned}$$

for alle hele tal $n \geq 2$.