GEORG MOHR BOGEN

Kirsten Rosenkilde

GEORG MOHR-BOGEN er skrevet af Kirsten Rosenkilde og er blevet til over mange år. I november 2024 er bogens kapitler for første gang samlet til en bog og trykt til brug på Georg Mohr-Konkurrencens camps. Tak til Marianne Terp for korrekturlæsning og sparring. Georg Mohr-Bogen er udgivet af Georg Mohr-Konkurrencen og trykt af ScandinavianBook i 2024. Dette er 1. oplag.

OMSLAGETS BAGGRUND er en *Einstein*-tessellering, dvs. en dækning af planen med én figur uden mellemrum eller overlap på en måde så mønsteret aldrig bliver periodisk. Denne tessellering blev opdaget af David Smith der sammen med et team (Myers, Kaplan, Goodman-Strauss) publicerede dette resultat i 2023. Tak til Ask Kildelund for design af omslag.

KILDEN til alle de historiske oplysninger i Georg Mohr-Bogen er Wolfram MathWorld (mathworld.wolfram.com).

GEORG MOHR-KONKURENCEN er sponsoreret af Undervisningsministeriet, Novo Nordisk Fonden, LEO Fondet, Jobindex, Institut for Matematiske Fag KU, Institut for Matematik og Datalogi SDU, Institut for Matematik AU, Institut for Matematiske Fag AAU, Georg Mohr Fonden.

OM PROBLEMLØSNING

Georg Mohr-Bogen giver indblik i den grundlæggende teori der benyttes til internationale matematikkonkurrencer, men mest af alt har den fokus på problemløsning.

Konkurrenceopgaver er ikke standardopgaver, men opgaver hvor man skal være kreativ og kombinere idéer og matematisk indsigt på nye måder. Det tager tid og kræver fordybelse. Derfor er det vigtigt at du arbejder grundigt med så mange opgaver som muligt og afsætter god tid til hver opgave. Du kan sagtens arbejde med en opgave i lang tid uden at komme nogen vegne for så pludselig at få den idé der får alt til at falde på plads. Derfor kræver opgaverne tålmodighed.

Der er hints til en del opgaver hvis du har brug for et skub i den rigtige retning.

Der er løsninger til alle opgaver bagerst, men læs først løsningen til en opgave når du har løst den eller arbejdet længe med den. Løsningerne kan også vise hvordan man skriver løsninger til opgaver.

GEORG MOHR-BOGEN

Georg Mohr-Bogen giver en grundlæggende introduktion til talteori, algebra, geometri og kombinatorik med fokus på den teori der kræves til internationale matematikkonkurrencer, men man kan også arbejde med fx kapitlet om talteori eller geometri separat for at få en introduktion til emnet. I hvert kapitel kan du læse hvilken grundlæggende viden kapitlet bygger på. Hvert kapitel starter med at introducere emnet og grundlæggende begreber, men sværhedsgraden stiger, og opgaverne bliver sværere og mere krævende, jo længere man når hen i de enkelte kapitler.

Bogens målgruppe er gymnasieelever som er interesserede i matematik med fokus på problemløsning, og den er primært skrevet til Georg Mohr-Konkurrencens vindere og er det grundlæggende undervisningsmateriale på Georg Mohr-Konkurrencens camps.

Opgaver til internationale matematikkonkurrencer er ikke standardopgaver, men opgaver der kræver matematisk indsigt og kreativitet. Og fordybelse og tålmodighed. Det kræver træning at blive en god problemløser, og derfor er der lagt op til at en del af de centrale sætninger i Georg Mohr-Bogen bevises af læseren i opgaverne. Desuden er der mange opgaver, og en del af dem er svære og krævende. Opgaverne er med til at udvikle matematisk forståelse, indsigt i teorien og evnen til at kombinere ting på nye måder.

Bogen skal som allerede antydet ikke læses fra ende til anden. Man skal i stedet starte med de første afsnit i udvalgte kapitler og arbejde virkeligt grundigt med dem. Det er også sådan vi arbejder på Georg Mohr-Konkurrencens camps for Georg Mohr-Konkurrencens vindere.

Kirsten Rosenkilde, november 2024

HVORDAN KOMMER DU I GANG?

Georg Mohr-Bogen rummer stof til flere års træning til matematikkonkurrencer, så hvis du endnu ikke har så meget træning, er det vigtigt at fordybe dig i en lille del af bogen til at starte med. Her er en oversigt over det mest grundlæggende som du kan starte med. Husk at der er *Tip til 1. runde* og *Tip til 2. runde af Georg Mohr-Konkurrencen* på Georg Mohr-Konkurrencens hjemmeside som er endnu mere grundlæggende, og derfor er det der du skal starte, hvis du er ny i Georg Mohr-Konkurrencen.

1. Induktionsbeviser giver en introduktion til bevistypen *induktion* som kan benyttes til at vise sætninger der udtaler sig om hvad der gælder for alle positive hele tal. Denne bevistype bruges mange steder i de andre kapitler.

2. Talteori er læren om de hele tal. De fem første afsnit kan anbefales som en grundlæggende introduktion til delelighed, primtal, antallet af divisorer i et helt tal, største fælles divisor og ikke mindst restklasser.

3. Algebra. De tre første afsnit giver god træning i at løse ligninger og ligningssystemer og omskrive udtryk. Dette er et godt grundlag for næsten al matematik.

4. Geometri forudsætter kendskab til grundlæggende viden om vinkler, retvinklede trekanter og ensvinklede trekanter. Første afsnit, *Kom i gang med geometri*, giver indblik i hvordan man arbejder med geometriopgaver, og de næste tre afsnit introducerer de mest grundlæggende begreber og idéer som benyttes i konkurrenceopgaver i geometri.

5. Kombinatorik handler ofte om at tælle antallet af kombinationer af noget. Første afsnit har fokus på helt grundlæggende måder at tælle og beregne antallet af kombinationer på.

Indhold

Symbolliste

$\mathbb{N}$	De positive hele tal $1,2,3,4,5,\ldots$.
$\mathbb{N}_0$	De ikke-negative hele tal $0,1,2,3,4,\ldots$.
$\mathbb{Z}$	De hele tal $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$.
$\mathbb{Q}$	De rationale tal. Se side 47.
$\mathbb{R}$	De reelle tal.
$\mathbb{R}_+$	De positive reelle tal.
$\mathbb{C}$	De komplekse tal. Se side 157.
$\vee$	Eller.
$\wedge$	Og.
$\in$	Tilhører.
$\subseteq$	Delmængde. Se side 103.
$\cap$	Fællessmængde. Se side 103.
$\cup$	Foreningsmængde. Se side 103.
$A \backslash B$	Differensmængde. Se side 103.
∞	Uendelig.
$\min(a,b)$	Minimum af a og b.
$\max(a,b)$	Maksimum af a og b.
$\lfloor x \rfloor$	Heltalsdelen af x. Se side 47.
$\{x\}$	Brøkdelen af x. Se side 47.
$\equiv$	Kongruenstegn. Se side 12.
$\gcd(a,b)$	Største fælles divisor af a og b. Se side 9.
$\operatorname{lcm}(a,b)$	Mindste fælles multiplum af a og b. Se side 11
$v_p(n)$	Den p-adiske valuation af n. Se side 18.

1 Induktionsbeviser

Sætninger der udtaler sig om hvad der gælder for alle positive heltal $n \in \mathbb{N}$, kan undertiden bevises ved *induktion*.

Idéen bag induktionsbeviser er enkel: i stedet for at bevise sætningen for hvert enkelt n for sig fra en ende af (hvorved man jo skulle igennem uendelig mange beviser før man havde klaret alle de positive hele tal), beviser man bare to ting: i) at påstanden gælder for $n = 1$, og ii) at man altid kan komme videre, dvs. at det for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at hvis påstanden er sand for n, så er den også sand for $n+1$. Vi kalder ofte den påstand vi gerne vil bevise, for $q(n)$, hvor $q(1)$ er påstanden for $n = 1$, $q(2)$ er påstanden for $n = 2$, osv.

At dette faktisk er en gyldig bevistype, er egentlig et aksiom, *induktionsaksiomet*, som er en del af fundamentet for den matematik vi beskæftiger os med til daglig.

Induktionsaksiomet 1.1. Påstanden $q(n)$ er sand for alle positive hele tal n, hvis

i) Påstanden $q(1)$ er sand. Dette kaldes *induktionens start*.

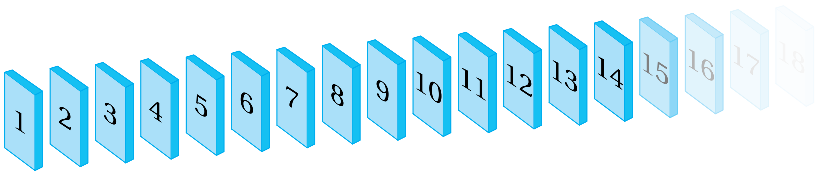
ii) For alle $n \in \mathbb{N}$ gælder at hvis påstanden $q(n)$ er sand, da er påstanden $q(n+1)$ også sand, dvs. $q(n) \Rightarrow q(n+1)$. Dette kaldes *induktionsskridtet*.

Induktionsskridtet "$q(n) \Rightarrow q(n+1)$" fortæller at

$$q(1) \Rightarrow q(2) \Rightarrow q(3) \Rightarrow q(4) \Rightarrow q(5) \Rightarrow q(6) \Rightarrow q(7) \Rightarrow q(8) \Rightarrow \cdots$$

Hvis man yderligere har vist at $q(1)$ er sand, så følger det at $q(2)$ er sand, og dermed et $q(3)$ er sand, osv., så $q(n)$ er sand for alle positive heltal n.

Man kan forestille sig påstandene $q(1)$, $q(2)$, $q(3)$ osv. stillet op på en uendelig række som dominobrikker:



Når man viser at *induktionens start*, altså at $q(1)$ er sand, så vælter den første dominobrik da det symboliserer at $q(1)$ er sand. Når man viser *induktionsskridtet*, dvs. at $q(n) \Rightarrow q(n+1)$, så svarer det til at vise at hvis en dominobrik i rækken vælter, så vælter den næste også. Samlet betyder det jo at alle dominobrikkerne vælter, og påstandene derfor alle er sande.

For at vise hvordan et induktionsbevis typisk forløber, ser vi på vi følgende sætning.

Sætning 1.2. For alle positive hele tal $n \in \mathbb{N}$ gælder påstanden

$$q(n): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bevis. Vi beviser sætningen ved induktion. Påstanden $q(1)$ lyder $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$, og den er sandt. Hermed har vi *induktionens start* på plads.

Vi skal nu vise *induktionsskridtet*, dvs. at hvis

$$q(n): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

er sand, da er

$$q(n+1): \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3))}{6}$$

også sand. Vi antager derfor at $q(n)$ er sand, og udnytter det til at vise $q(n+1)$:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Hermed har vi bevist at $q(n+1)$ er sand hvis $q(n)$ er sand, dvs. at *induktionsskridtet* er fuldført. Altså er sætningen bevist. □

Løs følgende opgaver ved induktion. Mange af dem kan løses på flere andre måder end ved induktion, men her skal du benytte induktion.

Opgave 1.1. Bevis at

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Opgave 1.2. Bevis at

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Opgave 1.3. Lad $a \neq 1$ være et reelt tal. Bevis at

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Opgave 1.4. Bevis at

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Opgave 1.5. Gæt en formel for summen af de første n kubiktal

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3.$$

Prøv dig frem med små værdier, og se om du kan se et system. Bevis derefter formlen. *Hint*: 193

Opgave 1.6. Dag 1 om morgenen anbringes en abe på det nederste trin af en uendelig høj stige. Hver dag klatrer aben først op til trinnet dobbelt så højt oppe som det trin den startede på om morgenen, og derpå yderligere et trin op. På hvilket trin befinder aben sig om morgenen den n'te dag?

Opgave 1.7. Lad n være et positivt heltal. Georg har 3^n mønter der alle vejer det samme, pånær en enkelt falsk mønt der vejer mindre end de andre. Georg har desuden en gammeldags vægt med to vægtskåle der i én vejning kan vise om indholdet af den ene vægtskål vejer mere, mindre eller det samme som indholdet af den anden vægtskål. Bevis at Georg altid kan finde den falske mønt ved højst n vejninger. *Hint*: 114

Induktionsstarten behøver ikke være $n = 1$, men kan sagtens være et andet helt tal n.

Opgave 1.8. Lad $n \geq 5$ være et helt tal. Bevis at $2^n > n^2$.

Opgave 1.9. Lad $n \geq 3$ være et helt tal. Bevis at vinkelsummen i en n-kant er $(n-2)\cdot 180°$.

Somme tider kan induktion bruges i opgaver der som udgangspunkt slet ikke handler om alle de positive heltal. De følgende opgaver bliver faktisk lettere hvis man gætter på at påstanden nok holder for alle positive heltal, og derefter går efter at bevise dette mere generelle resultat.

Opgave 1.10. Lad a være et tal med den egenskab at tallet

$$a+\frac{1}{a}$$

er et helt tal. Bevis at også

$$a^{19}+\frac{1}{a^{19}}$$

er et helt tal. *Hint*: 45 255

Opgave 1.11. I et firma med 107 ansatte overvåger man hinanden på følgende måde: For ethvert par af ansatte gælder at enten overvåger den ene den anden, eller også overvåger den anden den ene. Bevis at der findes en ansat P med den egenskab at enhver anden person enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P. *Hint*: 40

2 Talteori

Talteori er læren om de hele tal, og her spiller primtallene en helt central rolle. I de første afsnit introduceres grundlæggende teori om delelighed, primtal, antallet af divisorer, største fælles divisor og ikke mindst restklasser. I de senere afsnit introduceres mere avanceret teori som Eulers ϕ-funktion, Fermats lille sætning, Eulers sætning, den kinesiske restklassesætning og flere sætninger om primtal. Kapitlet kræver ikke forhåndskendskab til talteori, men introducerer alle begreber. Man skal dog være forberedt på at niveauet vokser meget hurtigt, og at der er mange udfordrende opgaver undervejs.

Indhold

2.1 Delelighed, primtal og primfaktoropløsning

Definition af delelighed, divisor og multiplum

Lad d og n være hele tal. Vi siger at d er *divisor* i n, eller at d *går op* i n, hvis der findes et helt tal q så

$$n = q \cdot d.$$

At d er divisor i n, skrives $d \mid n$. Når d er divisor i n, siger vi at n er *delelig* med d, og at n er et *multiplum* af d.

Fx er 12 delelig med tallene 1, 2, 3, 4, 6 og 12, og disse er netop samtlige positive divisorer i 12. Tallene −26, 0, 39 og 130 er alle multipla af 13.

Opgave 2.1.1. Bestem samtlige positive divisorer i 60 og samtlige positive divisorer i 98.

Sætning 2.1.1. Delelighedsregler

Lad $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Hvis $a \mid b$ og $b \mid c$, da vil $a \mid c$.
2. Hvis $a \mid b$, da vil $a \mid b \cdot c$.
3. Hvis $a \mid b$ og $a \mid c$, da vil $a \mid b + c$ og $a \mid b - c$.

Bevis. 1. At $a \mid b$ betyder at der findes et helt tal q_1 så $a \cdot q_1 = b$. At $b \mid c$ betyder at der findes et helt tal q_2 så $b \cdot q_2 = c$. Dermed er

$$c = b \cdot q_2 = a \cdot q_1 \cdot q_2 = a \cdot (q_1 \cdot q_2),$$

hvilket viser at $a \mid c$. □

Opgave 2.1.2. Bevis resten af sætningen.

Opgave 2.1.3. Om de hele tal n og m oplyses at $2 \mid n$ og $6 \mid m$. Hvilke af følgende tal er da med sikkerhed delelige med 4?
a) $n+m$, b) $nm-m$, c) m^2+n, d) $m(m+n)$, e) $n(m+1)$.

Opgave 2.1.4. Om de hele tal m og n oplyses at $n+m=n^2$. Hvad kan man med sikkerhed slutte? a) $n \mid m$, b) $m \mid n$, c) n og m er ulige, d) n og m er lige.

Definition af trivielle og ægte divisorer

De *trivielle divisorer* i et positivt heltal n er $1, -1, n$ og $-n$. En divisor d i n kaldes en *ægte divisor* i n hvis den ikke er en triviel divisor.

Definition af primtal og sammensatte tal

Primtallene er de positive heltal større end 1 som kun har trivielle divisorer. De første ti primtal er derfor

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.$$

Positive heltal større end 1 som har en ægte divisor, kaldes *sammensatte tal*.

Opgave 2.1.5. Bestem alle primtallene op til 100.

Definition af primfaktor

Et primtal der er divisor i et tal n, kaldes en *primfaktor* i n.

Fx er primfaktorerne i 60 netop 2, 3 og 5.

Definition af primfaktoropløsning

At *primfaktoropløse* et tal betyder at skrive det som et produkt af primtal.

Fx er primfaktoropløsningen af 60 lig med $2^2 \cdot 3 \cdot 5$, primfaktoropløsningen af 13 lig med 13 og primfaktoropløsningen af 72 lig med $2^3 \cdot 3^2$.

Generelt er *primfaktoropløsningen* af et postivt heltal n, $n > 1$,

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$$

hvor p_i' erne er forskellige primtal, og α_i'erne er positive heltal.

Om lidt skal vi se at alle positive heltal større end 1 har en primfaktoropløsning, og at denne er entydig på nær rækkefølgen af faktorerne. Primtallene fungerer altså som en slags byggesten som alle positive heltal større end 1 er bygget op af.

Opgave 2.1.6. Bestem primfaktoropløsningen af 1001 og af 11400. Bestem samtlige primfaktorer i 1024 og 1001.

Sætning 2.1.2. Ethvert positivt heltal n større end 1 har en primfaktor. Specielt er den mindste divisor i n større end 1 en primfaktor.

Bevis. Lad n være et positivt heltal større end 1, og lad p være den mindste divisor i n større end 1. Da må p være et primtal: Antag nemlig at p ikke er et primtal, dvs. at p har en ægte divisor større end 1. Denne divisor må også være divisor i n ifølge sætning 2.1.1 i modstrid med at p er den mindste. Dermed er p et primtal og altså en primfaktor i n. $\square$

Sætning 2.1.3. Aritmetikkens fundamentalsætning

Et positivt heltal n større end 1 har en primfaktoropløsning, og denne primfaktoropløsning er entydig (på nær faktorernes rækkefølge).

Bevis. *Eksistens*: Lad n være et positivt heltal større end 1, og lad p_1 være en primfaktor i n (vi ved at en sådan findes ifølge sætning 2.1.2). Nu er $n = p_1 \cdot q_1$. Hvis $q_1 = 1$, har vi fundet en primfaktoropløsning af n. Ellers vælger vi en primfaktor p_2 i q_1. Nu er $n = p_1 \cdot p_2 \cdot q_2$. Vi fortsætter på denne måde til vi får et $q_r = 1$, og da $q_1, q_2, \ldots$ er en aftagende følge af positive hele tal, må vi før eller siden få et $q_r = 1$. Dermed er $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, hvor p_i'erne er primtal, og n har altså en primfaktoropløsning.

Entydighed: Antag at der findes positive heltal med to forskellige primfaktoropløsninger, og lad n være det mindste af disse, så

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_r = n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Ingen af primfaktorerne på venstresiden kan være lig med en af primfaktorerne på højresiden, for så ville vi ved at dividere med dette primtal få et tal mindre end n med to forskellige primfaktoropløsninger, i modstrid med at n er det mindste. Betragt nu primtallene p_1 og q_1. Enten er $p_1 < q_1$ eller omvendt. Antag uden tab af generalitet at $p_1 < q_1$, og betragt tallet

$$m = (q_1 - p_1) \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_s.$$

Tallet m er mindre end n og har dermed ifølge antagelsen en entydig primfaktoropløsning. Men

$$\begin{aligned} m &= q_1 \cdot q_2 \cdots q_s - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_s \\ &= n - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_s \\ &= p_1(p_2 \cdot p_3 \cdots p_r - q_2 \cdot q_3 \cdots q_s), \end{aligned}$$

hvor sidste linje viser at der findes en primfaktoropløsning af m som indeholder primtallet p_1, mens

$$m = (q_1 - p_1) \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots q_s$$

viser at m også har en primfaktoropløsning som ikke indeholder p_1 da p_1 ikke går op i $q_1 - p_1$. Dette er i modstrid med antagelsen, og alle positive heltal større end 1 har dermed en entydig primfaktoropløsning. □

En helt central følge af entydigheden af primfaktoropløsningen er at hvis $a, b, n \in \mathbb{N}$, hvor $n = a \cdot b$, da er primfaktoropløsningen af n lig med produktet af primfaktoropløsningen af a og primfaktoropløsningen af b. Dette leder til følgende korollar som det er vigtigt at forstå når man arbejder med delelighed.

Korollar 2.1.4. Lad $p_1, p_2, \dots, p_r$ være r forskellige primtal, og lad yderligere $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ være positive heltal. Et helt tal n er deleligt med produktet

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},$$

netop hvis det er deleligt med hvert af tallene $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}$.

Bevis. Antag at n er delelig med $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Da følger det af sætning 2.1.1 at hvert af tallene $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}$ går op i n.

Antag modsat at n er delelig med hvert af tallene $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_r^{\alpha_r}$. Da $p_i^{\alpha_i}$ går op i n, $i = 1, 2, \dots, r$, kan n skrives på formen $n = p_i^{\alpha_i} \cdot q$. Fordi primfaktoropløsningen af n er entydig, betyder det at $p_i^{\alpha_i}$ indgår i primfaktoropløsningen af n, for alle $i = 1, 2, \dots, r$, og altså at n kan skrives på formen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot q$. Dette viser at $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ går op i n. □

Opgave 2.1.7. Fire forskellige positive hele tal har produktet 2008. Hvad er summen af de fire tal?

Opgave 2.1.8. Hvor mange nuller ender tallet 20! på?
(20! betyder $20 \cdot 19 \cdots 1$ og siges ”20 fakultet”).

Opgave 2.1.9. Går 4004 op i $238 \cdot 65 \cdot 1221$?

Definition af kvadrattal

Kvadrattallene er alle tal der kan skrives på formen a^2, hvor a er et helt tal, dvs. tallene $0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$.

Det er en rigtig god idé at kende de første 20 kvadrattal.

Opgave 2.1.10. Vis at kvadrattallene større end 1 netop er de positive heltal n, hvor alle primfaktorer indgår i en lige potens i primfaktoropløsningen af n.

Opgave 2.1.11. Bestem det mindste positive heltal n så $\sqrt{n \cdot 261}$ er et helt tal.

Sætning 2.1.5. Primtalsegenskaben

Lad p være et primtal, og lad a og b være hele tal. Hvis $p \mid ab$, da vil $p \mid a$ eller $p \mid b$.
Dette er ikke altid tilfældet hvis p ikke er et primtal.

Opgave 2.1.12. Vis sætningen.

Sætning 2.1.6. Der findes uendeligt mange primtal.

Bevis. Antag modsat at der kun findes endeligt mange primtal, og lad disse være $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Betragt tallet

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m + 1.$$

Da $n > 1$, har n en primfaktor p. Denne primfaktor p må være blandt primtallene $p_1, p_2, \ldots, p_m$, dvs. p går både op i n og i $p_1 p_2 \cdots p_m$, og dermed i $n - p_1 p_2 \cdots p_m = 1$, hvilket er en modstrid. Altså er der uendeligt mange primtal. $\square$

Eksempel 2.1.1. Hvis vi skal vise at et helt tal n er deleligt med fx 6, er det ifølge korollar 2.1.4 nok at vise at $2 \mid n$ og $3 \mid n$ da $6 = 2 \cdot 3$, og 2 og 3 er to forskellige primtal. Det er fx nemt at se at tallet 33333330 er deleligt med 6 da det er lige og deleligt med 3.

Opgave 2.1.13. Hvilke af følgende tal $10046 \cdot 20396$, $10982 \cdot 505$ og $102971 \cdot 2031 \cdot 315$ er delelige med 10? Hvilke af følgende tal $5025 \cdot 2092$, $205 \cdot 262 \cdot 515$ og $50035 \cdot 408$ er delelige med 100?

Opgave 2.1.14. Vis at produktet af tre på hinanden følgende heltal altid er deleligt med 6. Vis at produktet af fem på hinanden følgende heltal altid er deleligt med 60.

Opgave 2.1.15. Lad a og b være to positive heltal hvis sum er 2002. Er det muligt at 2002 går op i ab? (Georg Mohr-Konkurrencen 2002) *Hint*: 242

Sætning 2.1.7. For ethvert positivt helt tal m findes m på hinanden følgende hele tal som ikke er primtal.

Bevis. Betragt de m på hinanden følgende hele tal

$$(m+1)! + 2,\ (m+1)! + 3,\ (m+1)! + 4, \ldots (m+1)! + m + 1.$$

Det første tal er 2 en ægte divisor, i det næste er 3, osv. Altså er ingen af de m på hinanden følgende tal primtal. $\square$

2.2 Omskrivning vha. kvadratsætninger

I talteori ønsker vi ofte at faktorisere når det er muligt, da det er nemmere at sige noget om et produkt end om en sum, netop fordi vi ved produktet kan tænke i primfaktoropløsning. Hver gang vi ser et udtryk som $a^2 - b^2$, omskriver vi derfor straks til $(a+b)(a-b)$.

Eksempel 2.2.1. Hvis vi fx ønsker at bestemme alle primtal p og q som opfylder

$$p^2 - 2q^2 = 1,$$

kan vi omskrive og få

$$(p+1)(p-1) = 2q^2.$$

Da højresiden er lige, må p være ulige. Dermed vil 4 gå op i venstresiden, og dette giver at q er lige, dvs. $q = 2$. De eneste primtal som løser ligningen, er altså $q = 2$ og $p = 3$.

Eksempel 2.2.2. Hvis vi skal finde samtlige heltallige løsninger til ligningen

$$n^2 + 389 = m^2,$$

omskriver vi straks til

$$389 = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

Da 389 er et primtal, er det nemt at se at faktorerne $m+n$ og $m-n$ er ± 389 og ± 1. Løsningerne er derfor $(m,n) = (\pm 195, \pm 194)$. Hvis 389 ikke var et primtal, fik vi lidt flere muligheder, men stadig kun endeligt mange.

Læg mærke til at det er fordi vi omskriver $m^2 - n^2$ til et produkt, at vi meget nemt kan danne os overblik over de mulige løsninger, netop fordi vi kan se på primfaktoropløsningen.

Opgave 2.2.1. Bestem alle par (x, y) af positive heltal som opfylder ligningen $x^6 = y^2 + 53$.

Opgave 2.2.2. Vis at $m^3 - m$ er delelig med 6 for alle hele tal m.

Opgave 2.2.3. I en retvinklet trekant hvori alle sidelængder er hele tal, har den ene katete længde 1994. Bestem længden af hypotenusen. (Georg Mohr-Konkurrencen 1994)

Opgave 2.2.4. Om tre hele tal p, q og r gælder at $p + q^2 = r^2$. Vis at $6 \mid pqr$. (Georg Mohr-Konkurrencen 2008)

Eksempel 2.2.3. Nogle gange skal der lidt mere sofistikerede omskrivninger vha. kvadratsætningerne til for at løse en problemstilling. Lad a være et positivt heltal større end 1. Hvis vi fx ønsker at vise at $a^4 + a^2 + 1$ er et sammensat tal, kan vi omskrive på følgende måde.

$$a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 + a)(a^2 + 1 - a).$$

Heraf fremgår det klart at $a^4 + a^2 + 1$ er et sammensat tal når $a > 1$.

Opgave 2.2.5. Vis at hvis der for to hele tal a og b gælder at $a^2 + b^2 + 9ab$ er delelig med 11, da er også $a^2 - b^2$ delelig med 11. (Georg Mohr-Konkurrencen 2004) *Hint*: 197

Opgave 2.2.6. Lad n og m være to hele tal som kan skrives som sum af to kvadrattal. Vis at da kan deres produkt mn også skrives som sum af to kvadrattal. (*Hint*: Skriv n og m som sum af to kvadrattal, bestem produktet nm, og omskriv vha. af kvadratsætningerne så det bliver en sum af to kvadrattal.)

Opgave 2.2.7. For hvilke positive heltal n er $n^4 + 4$ et primtal? *Hint*: 236

Grunden til at vi gerne vil faktorisere, er som sagt at det i talteori er meget nemmere at sige noget om et produkt end om en sum. Indtil nu har vi kun omskrevet vha. kvadratsætningerne, men de kan ikke altid bruges når man vil omskrive til produkt.

Eksempel 2.2.4. Hvis vi fx vil bestemme samtlige par af positive heltal x og y som er løsning til ligningen

$$2x^2 + 5y^2 = 11(xy - 11),$$

ønsker vi at omskrive så der er et produkt på den ene side og et tal på den anden. I første omgang fås

$$11^2 = 11xy - 2x^2 - 5y^2.$$

Højresiden kan nu omskrives til produkt:

$$11^2 = (2x - y)(5y - x)$$

Pointen er som tidligere at vi nu har et produkt, hvor de ubekendte indgår, på den ene side af lighedstegnet og et tal på den anden. Det er ikke altid helt let at finde en omskrivning, men i dette eksempel kan man gætte sig frem til at produktet skal være på formen $(ax - by)(cy - dx)$, og herefter er det ikke så svært at finde a, b, c og d. Når vi først har omskrevet, kan vi løse ligningen sådan:

Hvis begge faktorer er negative, er $2x < y < \frac{1}{5}x$, hvilket er en modstrid da x er positiv. Dermed er begge faktorer positive. Det er nu nemt at tjekke mulighederne igennem, og man får at den eneste løsning er $x = 14$ og $y = 27$. (Baltic Way 1998)

Opgave 2.2.8. Bestem alle par af positive heltal (x, y) som opfylder ligningen

$$2y^2x^2 + 16x^2 + y^2 = 448.$$

Opgave 2.2.9. Bestem alle par af positive heltal (x, y) som opfylder ligningen

$$x^2 + 2x - xy - 3y = 1997.$$

(Georg Mohr-Konkurrencen 1997)

2.3 Antal divisorer

Når man skal bestemme antallet af positive divisorer i et positivt heltal, er det en god dé at se på primfaktoropløsningen for at finde samtlige divisorer på en nem og overskuelig måde.

Eksempel 2.3.1. Hvis vi fx skal bestemme antallet af divisorer i

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

så er samtlige divisorer

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 3,\ 2\cdot 3,\ 2^2\cdot 3,\ 5,\ 2\cdot 5,\ 2^2\cdot 5,\ 3\cdot 5,\ 2\cdot 3\cdot 5,\ 2^2\cdot 3\cdot 5.$$

Altså alle tal på formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, hvor $a = 0,1,2$, $b = 0,1$ og $c = 0,1$. Tallet 60 har derfor i alt $3\cdot 2\cdot 2 = 12$ divisorer.

Sætning 2.3.1. Et positivt heltal n større end 1 med primfaktoropløsning

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m},$$

hvor p_i'erne er forskellige primtal, har

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m)$$

forskellige positive divisorer.

Opgave 2.3.1. Bevis sætningen.

Eksempel 2.3.2. Hvis vi ønsker at bestemme alle positive heltal n med netop p divisorer, hvor p er et primtal, da skal vi finde alle

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$$

for hvilke

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m) = p.$$

Da p er et primtal, og alle faktorerne på venstresiden er større end 1, må $m = 1$ og $\alpha_1 = p-1$. Altså er samtlige positive heltal med netop p divisorer alle tal på formen q^{p-1}, hvor q er et primtal.

Opgave 2.3.2. Bestem alle positive heltal større end 1 som har et ulige antal positive divisorer.

Opgave 2.3.3. Et positivt heltal n, som højst er 500, har den egenskab at når man vælger et tal m tilfældigt blandt tallene $1,2,3,\dots,499,500$, så er sandsynligheden $\frac{1}{100}$ for at m går op i n. Bestem den størst mulige værdi af n. (Georg Mohr-Konkurrencen 2006)

Opgave 2.3.4. Lad n være produktet af samtlige positive heltal mindre end en million med præcis syv divisorer. Vis at n er et kubiktal, dvs. et tal på formen m^3, hvor m er et helt tal.

Opgave 2.3.5. Bestem samtlige positive heltal n som er delelige med 1001 og har præcis 1001 divisorer.

2.4 Største fælles divisor og Euklids algoritme

Definition af største fælles divisor

Den *største fælles divisor* for to hele tal n og m er den største divisor der går op i både n og m. Den største fælles divisor betegnes $\gcd(n,m)$ (**g**reatest **c**ommon **d**ivisor).

Fx er $\gcd(12,18)=6$, $\gcd(100,125)=25$ og $\gcd(35,36)=1$.

Opgave 2.4.1. Bestem $\gcd(12,45)$, $\gcd(1000,1205)$, $\gcd(1024,12)$, $\gcd(88,90)$ og $\gcd(1002,1003)$.

Opgave 2.4.2. Lad $n \in \mathbb{Z}$. Bestem $\gcd(n,n+1)$. Bestem $\gcd(n,n+2)$ når n er lige, og når n er ulige.

Sætning 2.4.1. Lad n, m og q være hele tal. Da er

$$\gcd(n,m)=\gcd(m,n-qm).$$

Bevis. En fælles divisor i n og m er ifølge sætning 2.1.1 også divisor i m og $n-qm$. Tilsvarende er en fælles divisor i m og $n-qm$ også divisor i m og n da $n=(n-qm)+qm$. Tallene n og m og tallene m og $n-qm$ har altså præcis de samme fælles divisorer, og dermed også samme største fælles divisor. □

Eksempel 2.4.1. Euklids algoritme

Når man skal bestemme største fælles divisor mellem to små tal, kan man fx se på deres primfaktoropløsning, men for større tal tager det tid at bestemme primfaktoropløsningen. Man kan i stedet bruge en anden metode til at bestemme største fælles divisor, nemlig *Euklids algoritme*. Denne algoritme bygger på sætning 2.4.1.

Først viser vi hvordan Euklids algoritme fungerer ved et eksempel. Vi ønsker at bestemme $\gcd(1078,70)$. Først skrives 1078 som et produkt af 70 plus en rest r, $0 \le r < 70$. Derefter skrives 70 som et produkt af r plus en ny rest, osv. til vi får resten 0:

$$\begin{aligned}1078 &= 15\cdot 70+28\\ 70 &= 2\cdot 28+14\\ 28 &= 2\cdot 14+0.\end{aligned}$$

Dette viser ifølge sætning 2.4.1 at

$$\begin{aligned}\gcd(1078,70)&=\gcd(1078-15\cdot 70,70)=\gcd(28,70)=\gcd(28,70-2\cdot 28)\\ &=\gcd(28,14)=\gcd(28-2\cdot 14,14)=\gcd(0,14)=14.\end{aligned}$$

Definition af Euklids algoritme

Generelt fungerer *Euklids algoritme* således: Lad n og m være ikke-negative heltal, hvor $n \ge m$. Først skrives n som et multiplum af m med en rest r_1, $0 \le r_1 < m$. Derefter skrives m som et multiplum af r_1 med en rest r_2, $0 \le r_2 < r_1$, osv. indtil vi får resten 0. Resten bliver mindre for hvert skridt, dvs. på et eller andet tidspunkt er vi sikre på at få en rest på 0.

$$\begin{aligned}n &= q_1\cdot m+r_1, \quad 0\le r_1<m\\ m &= q_2\cdot r_1+r_2, \quad 0\le r_2<r_1\\ r_1 &= q_3\cdot r_2+r_3, \quad 0\le r_3<r_2\\ &\vdots\\ r_{k-2} &= q_k\cdot r_{k-1}+r_k, \quad 0\le r_k<r_{k-1}\\ r_{k-1} &= q_{k+1}\cdot r_k+0.\end{aligned}$$

Af dette ses at

$$\gcd(n,m)=\gcd(m,r_1)=\gcd(r_1,r_2)=\cdots=\gcd(r_k,0)=r_k.$$

Opgave 2.4.3. Benyt Euklids algoritme til at bestemme gcd(754,338).

Definition af primisk og indbyrdes primisk

Lad a og b være to hele tal. Tallet a er *primisk* med b (eller omvendt) hvis deres eneste positive fælles divisor er 1, dvs. hvis $\gcd(a,b)=1$. Når a er primisk med b, siger vi at a og b er *indbyrdes primiske.*

Eksempel 2.4.2. Idéen med at se på den største fælles divisor kan fx benyttes til at vise at brøken $\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$ er uforkortelig for alle hele tal $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-2\}$ da dette er ensbetydende med at tæller og nævner er indbyrdes primiske. Vi benytter sætning 2.4.1 til at bestemme største fælles divisor mellem tæller og nævner:

$$\begin{aligned}\gcd(n^2+n-1, n^2+2n) &= \gcd(n^2+n-1, n^2+2n-(n^2+n-1))\\ &= \gcd(n^2+n-1, n+1)\\ &= \gcd(n^2+n-1-n(n+1), n+1)\\ &= \gcd(-1, n+1) = 1.\end{aligned}$$

Dette viser at brøken er uforkortelig for alle heltal $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0,-2\}$.

Inden du regner flere opgaver, får du brug for en god lille regneregel om største fælles divisor:

Sætning 2.4.2. Lad a, b og c være hele tal, hvor b og c er indbyrdes primiske. Da er

$$\gcd(a,b) = \gcd(ac,b).$$

Opgave 2.4.4. Vis sætningen.

Eksempel 2.4.3. Vi kan fx bruge sætning 2.4.2 hvis vi fx vil undersøge for hvilke hele tal n at $\gcd(n^2+25, 4n+1)$ er størst. Da $4n+1$ og 4 er indbyrdes primiske, er

$$\begin{aligned}\gcd(n^2+25, 4n+1) &= \gcd(4(n^2+25), 4n+1)\\ &= \gcd(4n^2+100-n(4n+1), 4n+1)\\ &= \gcd(-4n+100, 4n+1)\\ &= \gcd(-4n+100+(4n+1), 4n+1)\\ &= \gcd(101, 4n+1)\end{aligned}$$

Dette viser at $\gcd(n^2+25, 4n+1)$ højst er 101, og det er det, netop når $4n+1 = \pm 101$. Eneste mulige n der løser denne ligning, er $n=25$, dvs. $\gcd(n^2+25, 4n+1)$ er størst når $n=25$.

Opgave 2.4.5. Vis at brøken

$$\frac{n^3+2n}{n^4+3n^2+1}$$

er uforkortelig for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2.4.6. Lad $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 1$. Vis at brøken

$$\frac{m^4+3m^3-3m^2+2m-2}{m-1}$$

er uforkortelig. *Hint*: 105

Opgave 2.4.7. Bestem alle $n \in \mathbb{Z}$ så

$$\frac{3n^2+3n+9}{3n+2}$$

er et helt tal. *Hint*: 138

Opgave 2.4.8. Lad $a_n = n^2+500$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vis at der findes et helt tal N så $\gcd(a_n, a_{n+1}) \leq N$ for alle $n \in \mathbb{N}$, og bestem det mindste heltal N med denne egenskab. *Hint*: 100

Definition af af mindste fælles multiplum

Det *mindste fælles multiplum* af to positive hele tal a og b er det mindste positive hele tal som de begge går op i, og det betegnes $\operatorname{lcm}(a,b)$ (**l**east **c**ommon **m**ultiple).

Fx er $\operatorname{lcm}(4,6)=12$, $\operatorname{lcm}(5,7)=35$ og $\operatorname{lcm}(50,100)=100$.

Opgave 2.4.9. Bestem $\operatorname{lcm}(10,12)$, $\operatorname{lcm}(2\cdot 3^4\cdot 7^8, 2^2\cdot 3^3\cdot 7^3\cdot 11)$ og $\operatorname{lcm}(13,17)$.

Sætning 2.4.3. Lad a og b være to positive hele tal. Lad $p_1,p_2,\dots,p_n$ være samtlige primdivisorer i a og b, $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}$ og $b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdots p_n^{\beta_n}$. Da er

$$\begin{aligned}\gcd(a,b)&=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\cdots p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)},\\ \operatorname{lcm}(a,b)&=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\cdots p_n^{\max(\alpha_n,\beta_n)},\\ a\cdot b&=\operatorname{lcm}(a,b)\cdot\gcd(a,b).\end{aligned}$$

Opgave 2.4.10. Bevis sætningen.

Sætning 2.4.4. Bezouts identitet

Lad n og m være hele tal. Da kan største fælles divisor mellem n og m skrives som en heltallig linearkombination af n og m, dvs. der findes hele tal s og t så

$$\gcd(n,m)=sn+tm.$$

Bemærk at tallene s og t ikke er entydige.

Bevis. Beviset bygger på Euklids algoritme. Vi viser ved induktion efter i at alle resterne r_i, $i=1,2,\dots,k$, fra Euklids algoritme kan skrives som en heltallig linearkombination af n og m da dette specielt viser at $r_k=\gcd(n,m)$ kan skrives sådan. Sæt $r_0=m$, og husk at $r_{i-1}=q_{i+1}r_i+r_{i+1}$ i Euklids algoritme.

Induktionsstart: Både r_0 og r_1 kan skrives som heltallige linearkombinationer af n og m da $r_0=m=0\cdot n+1\cdot m$ og $r_1=1\cdot n-q_1\cdot m$.

Induktionsskridt: Antag nu at for et $j\ge 1$ kan r_i skrives som en heltallig linearkombination af n og m for alle $i\le j$, og sæt $r_i=s_in+t_im$. Vi viser nu at r_{j+1} kan skrives som en heltallig linearkombination af n og m:

$$\begin{aligned}r_{j+1}=r_{j-1}-q_{j+1}r_j&=s_{j-1}n+t_{j-1}m-q_{j+1}(s_jn+t_jm)\\&=(s_{j-1}-q_{j+1}s_j)n+(t_{j-1}-q_{j+1}t_j)m.\end{aligned}$$

Dermed er induktionen fuldført. □

Eksempel 2.4.4. I eksempel 2.4.1 viste vi ved at benytte Euklids algoritme at $\gcd(1078,70)=14$. Nu kan vi bruge algoritmen baglæns så at sige til at bestemme hele tal s og t så $14=s\cdot 1078+t\cdot 70$:

$$14=70-2\cdot 28=70-2(1078-15\cdot 70)=-2\cdot 1078+31\cdot 70.$$

Opgave 2.4.11. Bestem hele tal s og t så $\gcd(754,338)=s\cdot 754+t\cdot 338$.

Opgave 2.4.12. Bestem alle tal på formen $s\cdot 15+t\cdot 35$, $s,t\in\mathbb{Z}$.

Sætning 2.4.5. Lad $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Der findes hele tal x og y som løser ligningen

$$c=ax+by,$$

netop hvis c er et multiplum af $\gcd(a,b)$. Med andre ord er c en heltallig linearkombination af a og b netop når c er et multiplum af deres største fælles divisor.

Opgave 2.4.13. Vis sætningen. *Hint*: 38

2.5 Restklasser

Definition af division med rest

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $m \in \mathbb{Z}$. Da findes $q, r \in \mathbb{Z}$, hvor $0 \le r < n$, så

$$m = q \cdot n + r.$$

Vi siger at m har *resten* r ved division med n.

Fx har $m = 38$ resten $r = 3$ ved division med $n = 5$ da $38 = 7 \cdot 5 + 3$, og $m = -27$ har resten $r = 1$ ved division med $n = 4$ da $-27 = -7 \cdot 4 + 1$.

Idéen i restklasseregning, som vi om lidt vil introducere mere formelt, er at man vælger et tal n og identificerer andre tal ved deres rest ved division med n.

Hvis vi fx ser på $n = 5$, så deler vi alle de hele tal ind i restklasser afhængigt af deres rest ved division med 5. Vi får altså fem restklasser - en for hver af de fem rester $0, 1, 2, 3, 4$. Fx består restklassen 1 af tallene

$$\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots.$$

Regning med restklasser er helt centralt i talteori fordi det i rigtig mange sammenhænge gør en problemstilling meget mere overskuelig hvis vi kun identificerer tal ved deres rest ved division med et positivt helt tal n. I resten af dette kapitel af det et af de mest grundlæggende værktøjer til løsning af komplicerede talteoretiske problemstillinger.

Definition af kongruens

Lad n være et positivt heltal. Tallene $a, b \in \mathbb{Z}$ siges at være *kongruente modulo* n hvis

$$n \mid a - b.$$

At a og b er kongruente modulo n, skrives

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

At $n \mid a - b$, er ensbetydende med at a og b har samme rest ved division med n, dvs. to tal er kongruente modulo n netop hvis de har samme rest ved division med n. (Det overlades til læseren at bevise dette).

Eksempel 2.5.1. Hvis vi fx tager vores modulo 10-briller på, så kan vi ikke se forskel på -2 og 18. Der gælder nemlig at $-2 \equiv 18 \pmod{10}$ da 10 går op i $18 - (-2) = 20$, eller sagt med andre ord da både -2 og 18 har rest 8 ved division med 10.

Hvis vi tilsvarende tager vores modulo 7-briller på, kan vi ikke se forskel på fx 8, 15, 71 og 701 da de alle har rest 1 ved division med 7.

Definition af restklasse

Restklassen repræsenteret ved a modulo n er netop alle tal der er kongruente med a modulo n, dvs. de tal der har samme rest som a ved division med n. Altså netop tallene

$$\ldots, -3n + a, -2n + a, -n + a, a, n + a, 2n + a, 3n + a, \ldots.$$

Der er uendelig mange repræsentanter for hver restklasse. Når vi taler om resten af et tal modulo n, mener vi resten r som opfylder at $0 \le r < n$, og det er også den vi vil benytte som den primære repræsentant for en restklasse.

Eksempel 2.5.2. Restklassen repræsenteret ved 8 modulo 10 er tallene

$$\ldots, -12, -2, 8, 18, 28, \ldots.$$

Restklassen repræsenteret ved 1 modulo 7 er tallene

$$\ldots, -13, -6, 1, 8, 15, 22, \ldots.$$

Opgave 2.5.1. Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a, b \in \mathbb{Z}$. Bevis at $a \equiv b \pmod{n}$ netop hvis de har samme rest ved division med n.

Opgave 2.5.2. Formulér med andre ord hvad det betyder at et helt tal a opfylder at $a \equiv 0 \pmod{n}$.

Opgave 2.5.3. Formulér med andre ord hvad det vil sige at de hele tal a og b opfylder at $a \equiv b \pmod{2}$.

Opgave 2.5.4. Undersøg om a) $182 \equiv 92 \pmod{18}$, b) $-43 \equiv 1 \pmod{4}$ og c) $111 \equiv 13 \pmod{11}$.

Sætning 2.5.1. Lad $n, k \in \mathbb{N}$ og $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Da gælder følgende regneregler:

i) Hvis $a \equiv b \pmod{n}$ og $c \equiv d \pmod{n}$, da er $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

ii) Hvis $a \equiv b \pmod{n}$ og $c \equiv d \pmod{n}$, da er $a - c \equiv b - d \pmod{n}$.

iii) Hvis $a \equiv b \pmod{n}$ og $c \equiv d \pmod{n}$, da er $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$.

iv) Hvis $a \equiv b \pmod{n}$, da er $c \cdot a \equiv c \cdot b \pmod{n}$.

v) Hvis $a \equiv b \pmod{n}$, da er $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.

Bevis. i) At $a \equiv b$ og $c \equiv d \pmod{n}$ betyder at $n \mid a - b$ og $n \mid c - d$. Dermed må $n \mid (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$, og altså $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.

iii) At $a \equiv b$ og $c \equiv d \pmod{n}$ betyder at $n \mid a - b$ og $n \mid c - d$. Dermed må $n \mid c(a - b) + b(c - d) = ac - bd$, og altså $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{n}$. □

Opgave 2.5.5. Bevis resten af sætningen.

Sætningen viser at man kan omskrive en kongruensligning ligesom man kan omskrive en almindelig ligning når det gælder regningsarterne plus, minus og gange. Det samme gælder ikke umiddelbart for division. Fx er $3 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 2 \pmod{6}$, mens $4 \not\equiv 2 \pmod{6}$.

Eksempel 2.5.3. Hvis man fx skal løse ligningen

$$x + 7 \equiv 2 \pmod{8},$$

kan man omskrive til $x \equiv 2 - 7 \pmod{8}$ ifølge regneregel ii). Dermed er $x \equiv -5 \equiv 3 \pmod{8}$, dvs. løsningerne er netop restklassen 3 modulo 8. Løsningsmængden er altså

$$\{\ldots, -13, -5, 3, 11, 19, \ldots\}.$$

Eksempel 2.5.4. For at bestemme resten af tallet $24^9 \cdot 18^{16} \cdot 101^7$ ved division med 5 kan vi regne modulo 5 og benytte regnereglerne i sætning 2.5.1 på denne måde:

$$24^9 \cdot 18^{16} \cdot 101^7 \equiv (-1)^9 \cdot 3^{16} \cdot 1^7 \equiv -1 \cdot (3^2)^8 \cdot 1 \equiv -1 \cdot (-1)^8 \equiv -1 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Undervejs benytter vi fx regneregel v) til at konkludere at når $24 \equiv -1 \pmod{5}$, er $24^9 \equiv (-1)^9 \pmod{5}$ osv. Desuden benyttes regneregel iii) fx til at konkludere at når $24^9 \equiv (-1)^9$, $18^{16} \equiv 3^{16}$ og $101^7 \equiv 1^7 \pmod{5}$, da er $24^9 \cdot 18^{16} \cdot 101^7 \equiv (-1)^9 \cdot 3^{16} \cdot 1^7 \pmod{5}$.

Opgave 2.5.6. Løs ligningen $x - 12 \equiv 5 \pmod{11}$.

Opgave 2.5.7. Bestem resten af $27^{103} \cdot 17^2 \cdot 5^{14}$ ved division med 13.

Opgave 2.5.8. Bestem sidste ciffer i 2007^{2007}. (Georg Mohr-Konkurrencen 2007)

Sætning 2.5.2. Nulregel modulo primtal

Lad p være et primtal, og lad a og b være hele tal. Da gælder nulreglen modulo p, dvs. at hvis $a \cdot b \equiv 0 \pmod{p}$, da er $a \equiv 0$ eller $b \equiv 0 \pmod{p}$.

Opgave 2.5.9. Vis sætningen.

Bemærkning. Nulreglen gælder ikke for et sammensat tal n. Det kan man fx indse ved at betragte $n = a \cdot b$, hvor a og b er ægte divisorer i n. Her er $a \cdot b \equiv 0 \pmod{n}$, mens $a \not\equiv 0 \pmod{n}$ og $b \not\equiv 0 \pmod{n}$.

Eksempel 2.5.5. Hvis vi skal løse ligningen

$$x^2 \equiv 4 \pmod{6},$$

ved vi at hvis et tal x er løsning, så er alle tal i den retsklasse x repræsenterer modulo 6, også løsninger. Tilsvarende ved vi at hvis x ikke er en løsning til ligningen, da er der heller ikke andre repræsentanter for restklassen repræsenteret ved x modulo 6, som er løsninger. Det følger nemlig af sætning 2.5.1.

Når vi skal løse ligningen, kan vi altså nøjes med at tjekke en repræsentant for hver af de 6 restklasser modulo 6, fx repræsentanterne $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ved indsættelse ses at det kun er $x = 2$ og $x = 4$ blandt disse tal der løser ligningen. Løsningsmængden består derfor af restklasserne repræsenteret ved 2 og 4 modulo 6.

Opgave 2.5.10. Løs ligningerne a) $x^2 \equiv 4 \pmod{5}$, b) $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$, c) $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$, d) $x^2 \equiv 0 \pmod{2}$.

Sætning 2.5.3. Hvis p er et primtal større end 2, da er de eneste løsninger til ligningen

$$x^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

retsklasserne 1 og -1 modulo p.

Opgave 2.5.11. Bevis sætningen. (Husk at enhver matematiker straks omskriver vha. kvadratsætningerne når hun ser en differens mellem to kvadrattal!)

Definition af tværsum

Tværsummen af et positivt heltal er summen af dets cifre. I det følgende betegner $t(n)$ tværsummen af $n \in \mathbb{N}$. Fx er $t(1245) = 1 + 2 + 4 + 5 = 12$.

Definition af den alternerende tværsum

Den *alternerende tværsum* af et tal $n \in \mathbb{N}$ fås ved at tage første ciffer, trække det næste ciffer fra, lægge det næste til, osv. Fx er den alternerende tværsum af 913263 lig med $9 - 1 + 3 - 2 + 6 - 3 = 12$.

Sætning 2.5.4. Lad $n \in \mathbb{N}$.

i) Tallet 3 går op i n netop hvis det går op i tværsummen af n.

ii) Tallet 9 går op i n netop hvis det går op i tværsummen af n.

iii) Tallet 11 går op i n netop hvis det går op i den alternerende tværsum af n.

Bevis. i) Lad $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ være cifrene i n, så

$$n = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0.$$

Nu viser vi at $n \equiv t(n) \pmod{3}$.

$$\begin{aligned} n &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &\equiv a_m \cdot 1^m + a_{m-1} \cdot 1^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ &\equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 = t(n) \pmod{3}. \end{aligned}$$

Dermed er n delelig med 3, netop når tværsummen er det. □

Opgave 2.5.12. Bevis resten af sætningen.

Opgave 2.5.13. Overvej hvordan man nemt kan afgøre om et tal er deleligt med 18 og med 22.

2.6 Restklasseregning og kvadratiske rester

I kapitel 2.2 løste vi ligninger med hele tal bl.a. ved at omskrive vha. kvadratsætninger og se på primfaktoropløsning. En anden metode er at regne modulo et tal for at få information om løsningerne. Det svære er som regel at gennemskue hvilket tal det kan betale sig at regne modulo. Først ser vi på kvadratiske rester da de i mange sammenhænge er interessante når man fx skal løse ligninger.

Definition af kvadratisk rest

En restklasse a modulo n er en *kvadratisk rest* modulo n hvis ligningen

$$x^2 \equiv a \pmod{n}$$

har en heltallig løsning.

Eksempel 2.6.1. Man finder fx de kvadratiske rester modulo 8 ved at udregne kvadratet på samtlige rester:

$$0^2 \equiv 0,\quad 1^2 \equiv 1,\quad 2^2 \equiv 4,\quad 3^2 \equiv 1,\quad 4^2 \equiv 0,\quad 5^2 \equiv 1,\quad 6^2 \equiv 4,\quad 7^2 \equiv 1$$

modulo 8. Af dette kan man se at de kvadratiske rester modulo 8 netop er 0, 1 og 4, mens 2, 3, 5, 6, og 7 ikke er kvadratiske rester modulo 8.

Faktisk behøver man kun udregne kvadraterne på $0,1,2,3,4$ for at bestemme de kvadratiske rester modulo 8 da $a^2 \equiv (8-a)^2 \pmod{8}$.

Opgave 2.6.1. Bestem de kvadratiske rester modulo 3, modulo 4 og modulo 5.

Eksempel 2.6.2. Man kan fx benytte kvadratiske rester til at vise at summen af kvadraterne på tre på hinanden følgende tal ikke kan være et kvadrattal. Tre på hinanden følgende tal har resterne 0, 1 og 2 (i en eller anden rækkefølge) modulo 3, og dermed er summen af kvadraterne på dem kongruent med

$$0^2+1^2+2^2 \equiv 0+1+1 = 2 \pmod{3}.$$

Da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 3, kan summen af de tre kvadrater ikke være et kvadrattal.

Her undersøgte vi om ligningen

$$n^2+(n+1)^2+(n+2)^2 = m^2$$

havde heltallige løsninger n og m ved at regne modulo 3 for at få information om n og m. Dette viste at $m^2 \equiv 2 \pmod{3}$, dvs. vi fik en ligning der ikke havde løsninger, og vi kunne derfor konstatere at den oprindelige ligning heller ikke havde løsninger. Hvis vi havde opnået en ligning der havde løsninger ved at regne modulo 3, kunne vi ikke omvendt konstatere at den oprindelige ligning havde løsninger, men vi kunne måske finde information om hvilken rest eventuelle løsninger skulle have modulo 3.

Opgave 2.6.2. a) Vis at summen af kvadraterne af fire på hinanden følgende hele tal ikke kan være et kvadrattal. b) Vis at summen af kvadraterne af fem på hinanden følgende hele tal ikke kan være et kvadrattal. c) Vis at summen af kvadraterne af seks på hinanden følgende hele tal ikke kan være et kvadrattal.
Hint: 98

Eksempel 2.6.3. Hvis man vil vise at en ligning hvor der indgår kvadratet på en af de ubekendte, ikke har løsninger, er det er ofte en god ide at forsøge at reducere problemstillingen til en ligning af typen $x^2 \equiv a \pmod{n}$ da ikke alle rester er kvadratiske rester modulo n.
Hvis vi ønsker at vise at ligningen

$$15x^2 - 7y^2 = 9,$$

ikke har nogen heltallige løsninger, regner vi modulo et helt tal for at forsøge at opnå en ligning af typen $x^2 \equiv a \pmod{n}$ som ikke har nogen heltallige løsninger. Da primfaktorerne i 15, 7 og 9 er 3, 5 og 7, er det oplagt

at forsøge at regne modulo et af disse tal. For at illustrere metoden prøver vi med alle disse tre tal.

Først regner vi modulo 3. Dette giver $7y^2 \equiv 0 \pmod 3$, og dermed ifølge nulreglen at y er delelig med 3 da 3 er et primtal. Vi kan nu sætte $y = 3y_1$ og indsætte dette i ligningen. Dette giver´

$$15x^2 - 63y_1^2 = 9$$

som reduceres til

$$5x^2 - 21y_1^2 = 3.$$

Hvis vi igen regner modulo 3, fås $5x^2 \equiv 0 \pmod 3$, hvilket viser x er delelig med 3. Vi kan nu sætte $x = 3x_1$ og omskrive ligningen til

$$45x_1^2 - 21y_1^2 = 3,$$

og yderligere til

$$15x_1^2 - 7y_1^2 = 1.$$

Regner vi igen modulo 3, skal $y_1^2 \equiv 2 \pmod 3$, men 2 er ikke kvadratisk rest modulo 3. Ligningen har derfor ingen heltallige løsninger.

Hvis vi i stedet regner modulo 5, får vi

$$3y^2 \equiv 4 \pmod 5.$$

Da vi gerne vil opnå en ligning af typen $y^2 \equiv a \pmod 5$, overvejer vi om der ikke er et tal c vi kan gange med på begge sider så $c \cdot 3 \equiv 1 \pmod 5$. Det er ikke svært at se at $c = 2$ opfylder dette. Ved at gange med 2 på begge sider fås

$$y^2 \equiv 3 \pmod 5,$$

men 3 er ikke kvadratisk rest modulo 5. Ligningen har altså ingen heltallige løsninger.

Regner vi derimod modulo 7, får vi

$$x^2 \equiv 2 \pmod 7,$$

og da 2 er kvadratisk rest modulo 7, fortæller det os kun at $x \equiv 3$ eller $x \equiv 4 \pmod 7$. Det ser altså ikke umiddelbart ud til at virke.

I dette eksempel kan man altså både regne modulo 3 og modulo 5, men det er langt det hurtigste at regne modulo 5. I praksis må man forsøge sig lidt frem for at finde ud af hvad der virker.

Opgave 2.6.3. Vis at ligningen $x^2 + 10 = 5^y$ ikke har nogen positive heltallige løsninger.

Opgave 2.6.4. Bestem alle heltallige løsninger til ligningen $x^2 - 3y^2 = 17$.

Opgave 2.6.5. Findes der fire forskellige heltal med den egenskab at produktet af vilkårlige to lagt til 2006, giver et kvadrattal? (Baltic Way 2006) *Hint*: 199

Opgave 2.6.6. Bestem alle heltallige løsninger til $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$. *Hint*: 180

Sætning 2.6.1. Lad p være et ulige primtal. Da er netop halvdelen af alle tallene $1, 2, \dots, p-1$ kvadratiske rester modulo p.

Opgave 2.6.7. Bevis sætningen. *Hint*: 192

Eksempel 2.6.4. Nu skal vi se på ligninger som kan løses ved at regne modulo et bestemt tal, men som ikke involverer kvadratiske rester. Vi ønsker at bestemme alle positive heltallige løsninger til ligningen

$$1 + 3^n = 2^m.$$

Da der står en potens af 2 på den ene side af lighedstegnet, regner vi først modulo 8 og udnytter at når $m \geq 3$, da er $2^m \equiv 0 \pmod 8$. Hvis n er lige, er $3^n \equiv 1 \pmod 8$, og hvis n er ulige, er $3^n \equiv 3 \pmod 8$. Blot ved at se på ligningen modulo 8 kan man altså konstatere at der ikke findes løsninger når $m \geq 3$. Det ses nu let at den eneste løsning er $n = 1$ og $m = 2$.

Opgave 2.6.8. Bestem alle positive heltallige løsninger til $7^n = 3 + 2^m$.

Opgave 2.6.9. Bestem alle positive heltallige løsninger til $6(x! + 3) = y^2 + 5$.

Opgave 2.6.10. For hvilke positive hele tal n går 1599 op i $46^n+34^n-7^n-5^n$? (*Hint:* $1599=39\cdot 41$.)

Opgave 2.6.11. Antag at $n\in\mathbb{N}$, og at $d_1<d_2<d_3<d_4$ er de fire mindste positive divisorer i n. Bestem samtlige n som opfylder at

$$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2.$$

Hint: 43

Opgave 2.6.12. Bestem alle heltallige løsninger til $19x^3-84y^2=1984$. *Hint*: 59

Opgave 2.6.13. Bestem det mindste $k\in\mathbb{N}$ således at der findes $n,m\in\mathbb{N}$ med $k=19^n-5^m$. (Baltic Way 1999) *Hint*: 183

2.7 Nyttige faktoriseringer

Nu skal vi se på nogle nyttige faktoriseringer som man har brug for i rigtig mange sammenhænge.

Opgave 2.7.1. Reducér udtrykkene

$$\frac{a^2-b^2}{a-b},\quad \frac{a^3-b^3}{a-b},\quad \frac{a^4-b^4}{a-b},\quad \frac{a^3+b^3}{a+b}\quad \text{og}\quad \frac{a^5+b^5}{a+b}.$$

Sætning 2.7.1. Lad n være et positivt heltal. Da er

i) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$.

ii) For ulige n: $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$.

iii) $a^{2^n}-b^{2^n}=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\cdots(a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}})$.

Bevis. i) og ii) følger umiddelbart når man ganger parenteserne på højresiden sammen:

$$\begin{aligned}&(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})\\&=a^n-a^{n-1}\cdot b+a^{n-1}\cdot b-a^{n-2}\cdot b^2+a^{n-2}\cdot b^2-a^{n-3}\cdot b^3+\cdots+a\cdot b^{n-1}-b^n\\&=a^n-b^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})\\&=a^n+a^{n-1}\cdot b-a^{n-1}\cdot b-a^{n-2}\cdot b^2+a^{n-2}\cdot b^2+a^{n-3}\cdot b^3+\cdots+a\cdot b^{n-1}+b^n\\&=a^n+b^n\end{aligned}$$

Ved at omskrive vha. kvadratsætningerne n gange fås iii):

$$\begin{aligned}a^{2^n}-b^{2^n}&=(a^{2^{n-1}}-b^{2^{n-1}})(a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}})\\&=(a^{2^{n-2}}-b^{2^{n-2}})(a^{2^{n-2}}+b^{2^{n-2}})(a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}})\\&\;\;\vdots\\&=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\cdots(a^{2^{n-1}}+b^{2^{n-1}}).\quad\square\end{aligned}$$

Eksempel 2.7.1. Faktoriseringerne kan fx benyttes hvis man ønsker at vise at a^9+b^9 delelig med 81, når $a+b$ er delelig med 9.

Antag at $a+b$ er delelig med 9, og altså at $a \equiv -b \pmod 9$. Først faktoriserer vi a^9+b^9 vha. sætning 2.7.1.

$$\begin{aligned}&a^9+b^9=\\&(a+b)(a^8-a^7b+a^6b^2-a^5b^3+a^4b^4-a^3b^5+a^2b^6-ab^7+b^8).\end{aligned}$$

Vi ved at $a+b$ er delelig med 9, dvs. vi skal blot vise at den anden faktor også er delelig med 9, for at vise at a^9+b^9 er delelig med $9^2=81$. Da $a \equiv -b \pmod 9$, er

$$\begin{aligned}a^8-a^7b+a^6b^2-\cdots+a^2b^6-ab^7+b^8 &\equiv b^8+b^8+\cdots+b^8\\&=9b^8\\&\equiv 0 \pmod 9.\end{aligned}$$

Dermed er a^9+b^9 delelig med 81.

Opgave 2.7.2. Lad a og b være hele tal, og lad n være et positivt heltal. Vis at hvis d er en positiv divisor i n, da går a^d-b^d op i a^n-b^n.

Opgave 2.7.3. Vis at hvis a^n-1 er et primtal for positive hele tal a og n med $n>1$, da er $a=2$, og n er et primtal.

Opgave 2.7.4. Bestem det største hele tal n så $n+10$ går op i n^3+100.

Sætning 2.7.2. Lad n være et positivt heltal større end 1 med primfaktoropløsning $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$. Tallet $\sigma(n)$ er summen af alle positive divisorer i n. Så gælder

$$\sigma(n)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\cdots\cdot\frac{p_r^{\alpha_r+1}-1}{p_r-1}.$$

Opgave 2.7.5. Vis sætningen.

Opgave 2.7.6. Lad $n \geq 3$ være et ulige tal. Vis at n^2 går op i $1^n+2^n+\cdots+n^n$. *Hint*: 92

Definition af den p-adiske valuation

For et helt tal n og et primtal p er den *p-adiske valuation* $v_p(n)$ det største hele tal α som opfylder at p^α går op i n. Specielt er $v_p(0)=\infty$.

Fx er $v_2(24)=3$, $v_3(16)=0$ og $v_5(100)=2$.

Den p-adiske valuation kan i mange sammenhænge være praktisk. I kapitel 2.15 går vi i dybden med flere af dens egenskaber, men for nu nøjes vi med en grundlæggende regneregel, som vi allerede har brugt flere gange uden at nævne den, og som følger direkte af Aritmetikkens fundamentalsætning.

Sætning 2.7.3. Lad a og b være hele tal og p et primtal. Da er

$$v_p(a\cdot b)=v_p(a)+v_p(b).$$

Opgave 2.7.7. Lad p være et primtal og a et positivt heltal, hvor $v_p(a-1)>0$. Lad yderligere k være et positivt heltal som ikke er delelig med p. Vis at da er

$$v_p(a-1)=v_p(a^k-1).$$

Opgave 2.7.8. Bestem $v_2(3^{1024}-1)$.

Opgave 2.7.9. Antag at m er et ulige positivt tal som ikke er delelig med 5, og at a og n er positive heltal. Vis at hvis $2^m+3^m=a^n$, da er $n=1$. *Hint*: 246

Opgave 2.7.10. Lad a, b og m være positive heltal. Vis at

$$\gcd(m^a-1,m^b-1)=m^{\gcd(a,b)}-1.$$

Hint: 241

Opgave 2.7.11. Vis at ethvert tal der består af 2^n ens cifre, har mindst n forskellige primfaktorer. *Hint*: 173

En anden nyttig formel er binomialformlen:

Sætning 2.7.4. Binomialformlen

Lad n være et positivt helt tal. Da er

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Bevis. Formlen følger af at når man ganger ud, svarer hvert led til at man vælger a fra i parenteser og b fra $n-i$ parenteser, dvs. alle led er på formen $a^i b^{n-i}$, og leddet $a^i b^{n-i}$ forekommer netop $\binom{n}{i}$ gange. □

Eksempel 2.7.2. Binomialformlen kan fx bruges hvis vi ønsker at bestemme de to sidste cifre i 3^{86}. Bemærk at

$$3^{86} = 9^{43} = (10-1)^{43} \equiv \binom{43}{42} 10 - 1 = 430 - 1 \equiv 29 \pmod{100}.$$

Her udnytter vi at alle på nær de to sidste led når vi udregner $(10-1)^{43}$ vha. binomialformlen, er delelige med 100. Dette er en metode der kan bruges i mange sammenhænge.

Opgave 2.7.12. Bestem de fire sidste cifre i 99^{703}.

Opgave 2.7.13. Lad a og b være to positive indbyrdes primiske heltal, hvor $b > 1$. Bestem det største hele tal n så $(b^2+a)^b - a^b$ er delelig med b^n. *Hint*: 201

2.8 Primiske rester og Eulers ϕ-funktion

Definition af primisk rest

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{Z}$. Tallet a er en *primisk rest* modulo n hvis $\gcd(a,n) = 1$.

Sætning 2.8.1. Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a, b \in \mathbb{Z}$.

i) Hvis $a \equiv b \pmod{n}$, og a er en primisk rest modulo n, da er b også en primisk rest modulo n.

ii) Hvis a og b er primiske rester modulo n, da er ab også en primisk rest modulo n.

Bevis. i) Antag at $\gcd(n,a) = 1$. Hvis $a \equiv b \pmod{n}$, vil $n \mid a-b$, og der findes dermed et $q \in \mathbb{Z}$ så $a = qn + b$. Hvis d er divisor i $\gcd(n,b)$, må d derfor også være divisor i a og altså i $\gcd(n,a) = 1$. Dermed er b også en primisk rest modulo n.

ii) Antag at $\gcd(n,a) = 1$ og $\gcd(n,b) = 1$. Dette viser at n og a ikke har en fælles primfaktor, og at n og b ikke har en fælles primfaktor. Da primfaktoropløsningen af ab er produktet af primfaktoropløsningen af a og primfaktoropløsningen af b, kan n og ab heller ikke have en fælles primfaktor, og dermed er ab også en primisk rest modulo n. □

Definition af primisk restklasse

Sætningens første del viser at hvis en repræsentant for en restklasse er en primisk rest modulo n, da er alle andre repræsentanter for restklassen også primiske med n. Vi kan derfor nu definere en primisk restklasse:

En restklasse repræsenteret ved tallet a modulo n kaldes *primisk* med n hvis a er primisk med n.
Sætningens anden del viser at når vi ganger to primiske rester, får vi igen en primisk rest.

Definition af Eulers ϕ-funktion

Lad $n \in \mathbb{N}$. *Eulers ϕ-funktion* $\phi(n)$ er per definition antallet af primiske restklasser modulo n.

Fx er restklasser modulo 12 repræsenteret ved $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$. Af disse er det netop restklasserne $1, 5, 7, 11$ der er primiske med 12, dvs. at $\phi(12) = 4$.

Opgave 2.8.1. Bestem $\phi(3)$, $\phi(4)$, $\phi(5)$, ..., $\phi(19)$.

Sætning 2.8.2. For et primtal p gælder at

$$\phi(p) = p - 1.$$

Bevis. Samtlige restklasser modulo p er repræsenteret ved $0, 1, 2, \ldots, p-1$, og blandt disse er det kun 0 der ikke er primisk med p. Dermed er $\phi(p) = p - 1$. □

Sætning 2.8.3. For et primtal p og $\alpha \in \mathbb{N}$ gælder at

$$\phi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1).$$

Bevis. Samtlige restklasser modulo p^α er repræsenteret ved $0, 1, 2, \ldots, p^\alpha - 1$, og blandt disse er det netop de $p^{\alpha-1}$ multipla af p

$$0, p, 2p, \ldots, (p^{\alpha-1} - 1)p$$

der ikke er primiske med p^α. Altså er

$$\phi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1). \quad \square$$

Inden vi ser mere på Eulers ϕ-funktion, skal vi se på hvorfor primiske rester er så interessante. Da vi tidligere løste ligninger ved at betragte dem modulo et positivt heltal n, manglede vi en forkortningsregel der sagde at $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{n}$ medfører at $b \equiv c \pmod{n}$. Det viser sig at denne regel gælder når a er en primisk rest modulo n, og det er en helt central årsag til at primiske rester er så interessante.

Definition af multiplikativ invers

Lad $n \in \mathbb{N}$, og lad $a \in \mathbb{Z}$. Et helt tal b som opfylder at

$$a \cdot b \equiv 1 \pmod{n}$$

kaldes en *multiplikativ invers* til a modulo n, eller nogle gange blot en *invers* til a modulo n. Den multiplikative inverse til a betegnes a^{-1}, og den er ifølge sætningen nedenfor entydig modulo n hvis den findes.

Sætning 2.8.4. Lad $n \in \mathbb{N}$. Tallet $a \in \mathbb{Z}$ har en multiplikativ invers modulo n netop når a er en primisk rest modulo n. Den multiplikative inverse er entydigt bestemt modulo n.

Bevis. Antag at a er en primisk rest modulo n, dvs. at $\gcd(n, a) = 1$. Ifølge Bezouts identitet findes $s, t \in \mathbb{Z}$ så $1 = sa + tn$. Tallet s opfylder altså at $as \equiv 1 \pmod{n}$, hvilket viser at der findes en multiplikativ invers til a modulo n.

For at vise at den multiplikative inverse er entydigt bestemt, antager vi at $ab \equiv 1 \pmod{n}$ og $ac \equiv 1 \pmod{n}$. Dette viser at

$$c \equiv (ba)c \equiv b(ac) \equiv b \pmod{n}.$$

Altså er den multiplikative inverse restklasse til a entydigt bestemt modulo n.

Antag til slut at a ikke er en primisk restklasse modulo n. Da vil $d = \gcd(n, a) > 1$ gå op i både n og alle multipla af a, og der findes derfor ikke et helt tal s så $sa \equiv 1 \pmod{n}$. □

Sætning 2.8.5. Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Hvis a er primisk med n gælder at

$$a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{n} \quad \Rightarrow \quad b \equiv c \pmod{n}.$$

Bevis. Antag at a er primisk med n, og at $a \cdot b \equiv a \cdot c \pmod{n}$. Da a er primisk med n, ved vi fra sætning 2.8.4 at a har en multiplikativ invers a^{-1}, dvs. at

$$a^{-1} \cdot a \cdot b \equiv a^{-1} \cdot a \cdot c \pmod{n},$$

og altså $b \equiv c \pmod{n}$. □

Eksempel 2.8.1. Denne sætning er en slags forkortningsregel, og den gør det muligt at løse ligninger af typen

$$ax + b \equiv c \pmod{n},$$

når a er primisk med n.
Hvis vi fx ønsker at løse ligningen

$$5x + 1 \equiv 7 \pmod{9},$$

kan vi først trække 1 fra på begge sider:

$$5x \equiv 6 \pmod{9}.$$

For at fjerne 5-tallet skal vi nu gange med den multiplikative inverse til 5 modulo 9. Ved at prøve sig lidt frem ses at denne er 2. Ved at gange med 2 på begge sider fås

$$x \equiv 2 \cdot 6 \equiv 3 \pmod{9}.$$

Løsningen til ligningen er altså restklassen 3 modulo 9.

Opgave 2.8.2. a) Bestem samtlige primiske restklasser modulo 15, og bestem den multiplikative inverse til hver af dem. b) Løs ligningen $7x + 19 \equiv 36 \pmod{15}$.

Opgave 2.8.3. Lad p være et primtal. Vis at de eneste restklasser modulo p som er deres egen multiplikative inverse, er restklasserne 1 og $p-1$.

Sætning 2.8.6. Lad $k \in \mathbb{N}$, og lad $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ være repræsentanter for samtlige restklasser modulo k. Hvis $m, r \in \mathbb{Z}$, og m er primisk med k, da repræsenterer de k tal

$$ma_0 + r, \quad ma_1 + r, \quad ma_2 + r, \quad \dots, \quad ma_{k-1} + r$$

også samtlige restklasser modulo k.

Bevis. Hvis vi viser at de k restklasser repræsenteret ved

$$ma_0 + r, \quad ma_1 + r, \quad ma_2 + r, \quad \dots, \quad ma_{k-1} + r$$

alle er forskellige modulo k, da må de netop repræsentere samtlige k restklasser modulo k. Antag at $ma_i + r \equiv ma_j + r \pmod{k}$. Da k og m er indbyrdes primiske, kan vi forkorte med m når vi regner modulo k, og dermed er

$$ma_i + r \equiv ma_j + r \Leftrightarrow ma_i \equiv ma_j \Leftrightarrow a_i \equiv a_j \pmod{k}.$$

Dette viser at de k restklasser

$$ma_0 + r, \quad ma_1 + r, \quad ma_2 + r, \quad \dots, \quad ma_{k-1} + r$$

alle er forskellige og derfor udgør samtlige restklasser. □

Sætning 2.8.7. Lad $m, k \in \mathbb{N}$, og antag at m og k er indbyrdes primiske. Da er

$$\phi(mk) = \phi(m) \cdot \phi(k).$$

Bevis. Lad $m, k \in \mathbb{N}$, og antag at m og k er indbyrdes primiske. De mk restklasser modulo mk er repræsenteret ved resterne $0, 1, 2, \dots, mk-1$. Vi opstiller nu disse rester således

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 2 & \dots & m-1 \\
m & m+1 & m+2 & \dots & m+(m-1) \\
2m & 2m+1 & 2m+2 & \dots & 2m+(m-1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(k-1)m & (k-1)m+1 & (k-1)m+2 & \dots & (k-1)m+(m-1)
\end{array}$$

Der er netop $\phi(m)$ rester som er primiske med m blandt resterne $0, 1, 2, \dots, m-1$, dvs. at de rester i skemaet som er primiske med m netop er placeret i $\phi(m)$ søjler. Hver af disse søjler indeholder ifølge sætning 2.8.6 netop samtlige restklasser modulo k, dvs. der er netop $\phi(k)$ af dem som er primiske med k. Samlet er antallet af restklasser som både er primiske med k og primiske med m altså $\phi(m)\phi(k)$. De restklasser som både er primiske med m og primiske med k, er netop dem der er primiske med mk. Dette giver det ønskede. □

Sætning 2.8.8. Lad $n \in \mathbb{N}$ med primfaktoropløsning $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$, hvor p_i'erne er forskellige. Da er

$$\phi(n) = p_1^{\alpha_1 - 1}(p_1 - 1) p_2^{\alpha_2 - 1}(p_2 - 1) \cdots p_m^{\alpha_m - 1}(p_m - 1).$$

Opgave 2.8.4. Bevis sætningen.

Opgave 2.8.5. Bestem $\phi(120)$ og $\phi(98)$.

Opgave 2.8.6. Bestem alle n så $\phi(n) = 8$, og alle m så $\phi(m) = 14$.

Opgave 2.8.7. Lad $n, \alpha \in \mathbb{N}$. Vis at $\phi(n^\alpha) = n^{\alpha-1}\phi(n)$.

Opgave 2.8.8. Lad n være et heltal større end 1. Vis at

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n,$$

hvor d er samtlige positive divisorer i n. *Hint*: 1

2.9 Wilsons sætning

Sætning 2.9.1. Wilsons sætning

For ethvert primtal p gælder

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

Bevis. For $p = 2$ er $(2-1)! = 1 \equiv -1 \pmod 2$. Antag at p er et primtal større end 2. Ifølge opgave 2.8.3 er de eneste af de primiske rester modulo p som er deres egen inverse, resterne 1 og $p-1$. Hvis vi betragter de primiske rester $1, 2, \dots, p-1$ kan alle pånær 1 og $p-1$ parres med deres inverse. Dermed er

$$(p-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) \equiv 1 \cdot (p-1) \equiv -1 \pmod{p}. \quad \square$$

Opgave 2.9.1. Bestem alle positive heltal n for hvilke n går op i $(n-1)! + 1$.

Opgave 2.9.2. Er det muligt at dele en mængde bestående af ti på hinanden følgende positive heltal i to disjunkte delmængder som samlet indeholder alle ti tal, så produktet af elementerne i hver af de to delmængder bliver det samme tal? (*Disjunkte* mængder er mængder der ikke har nogen elementer til fælles). *Hint*: 37

Bemærkning. Det er et kendt resultat af matematikerne Erdös og Selfridge at produktet af to eller flere på hinanden følgende positive heltal aldrig er en potens af et helt tal. Det var i mange år en formodning og blev først vist generelt af de to matematikere i 1974. (En *potens af et helt tal* er et tal på formen n^m, hvor $m, n \in \mathbb{Z}$, og $m > 1$).

Af dette følger også at produktet af to eller flere på hinanden følgende positive heltal ikke er et kvadrattal, og at man derfor ikke kan skrive dette produkt som produktet af to ens faktorer.

Opgave 2.9.3. Vis at hvis et primtal er på formen $p = 4n+1$, da er -1 kvadratisk rest modulo p. *Hint*: 13

2.10 Fermats lille sætning og Eulers sætning

Sætning 2.10.1. Eulers sætning

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $a \in \mathbb{Z}$. Hvis a er primisk med n, er

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Bevis. Lad $a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}$ være repræsentanter for de i alt $\phi(n)$ primiske restklasser modulo n. Tallene

$$a \cdot a_1, a \cdot a_2, \ldots, a \cdot a_{\phi(n)}$$

er også primiske rester ifølge sætning 2.8.1, og de er desuden forskellige ifølge sætning 2.8.5 da vi kan forkorte med a når a er primisk med n. De er altså også netop samtlige primiske rester modulo n. Dermed er

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\phi(n)} &\equiv (a \cdot a_1)(a \cdot a_2) \cdots (a \cdot a_{\phi(n)}) \\ &= a^{\phi(n)} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\phi(n)} \pmod{n}. \end{aligned}$$

Da a_i'erne alle er primiske med n, kan vi forkorte og få

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \quad \square$$

Et vigtigt specialtilfælde af Eulers sætning er Fermats lille sætning:

Sætning 2.10.2. Fermats lille sætning

Lad p være et primtal, og lad $a \in \mathbb{Z}$ være primisk med p. Da er

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Korollar 2.10.3. Lad p være et primtal, og lad $a \in \mathbb{Z}$. Da er

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$

Opgave 2.10.1. Bevis korollaret.

Opgave 2.10.2. Vis at $a^{13} \equiv a \pmod{2730}$ for alle hele tal a.

Eulers sætning kan også bruges til at vise en af mange interessante forskelle på primtal på formen $4m+1$ og primtal på formen $4m+3$.

Sætning 2.10.4. Hvis et primtal er på formen $p = 4m+1$ for et helt tal m, da er -1 kvadratisk rest modulo p.

Hvis et primtal er på formen $p = 4m+3$ for et helt tal m, da er -1 ikke kvadratisk rest modulo p.

Bevis. Ifølge opgave 2.9.3 er -1 er kvadratisk rest modulo et primtal p på formen $p = 4m+1$.

Antag nu at p er et primtal p på formen $p = 4m+3$, og at der findes et helt tal x så $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Da er

$$x^{4m+2} = (x^2)^{2m+1} \equiv (-1)^{2m+1} \equiv -1 \pmod{p},$$

men ifølge Eulers sætning er $x^{4m+2} \equiv 1 \pmod{p}$, hvilket er en modstrid. Altså er -1 ikke kvadratisk rest for noget primtal på formen $p = 4n+3$. $\square$

Eksempel 2.10.1. Eulers sætning kan også benyttes til at reducere eksponenten hvis man fx ønsker at udregne $6^{162} \pmod{25}$. Da

$$\phi(25) = \phi(5^2) = (5-1)5 = 20,$$

og 6 er primisk med 25, er $6^{20} \equiv 1 \pmod{25}$ ifølge Eulers sætning. Dermed er

$$6^{162} = 6^2(6^{20})^8 \equiv 6^2 \cdot 1^8 \equiv 11 \pmod{25}.$$

Opgave 2.10.3. Bestem $17^{1601} \pmod{32}$.

> **Sætning 2.10.5.** Lad $n, a, b \in \mathbb{N}$, og lad $m \in \mathbb{Z}$ være en primisk rest modulo n. Antag at $a \equiv b \pmod{\phi(n)}$. Da er
>
> $$m^a \equiv m^b \pmod{n}.$$

Opgave 2.10.4. Bevis sætningen.

> **Eksempel 2.10.2.** Nu kan vi endnu mere direkte reducere eksponenten ved et regne modulo $\phi(n)$. Hvis vi fx ønsker at bestemme de to sidste cifre i 797^{323}, skal vi regne modulo 100. Da $\phi(100) = \phi(2^2)\phi(5^2) = 40$, og 797 er primisk med 100, kan vi regne modulo 100 på grundtallet 797 og modulo $\phi(100) = 40$ på eksponenten 323:
>
> $$797^{323} \equiv (-3)^3 \equiv 73 \pmod{100}.$$

Opgave 2.10.5. Findes der hele tal $x_1, x_2 \dots, x_k$ med sum 1492 som opfylder at $x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_k^7 = 70707$?

Opgave 2.10.6. Bestem de to sidste cifre i $3^{214} \cdot 97^{828} \cdot 13^{521}$.

Opgave 2.10.7. Bestem sidste ciffer i $\underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1000}$.

Opgave 2.10.8. Bestem de tre sidste cifre i $4007^{4003^{4001}}$.

Opgave 2.10.9. Bestem de sidste tre cifre i $2003^{2002^{2001}}$. *Hint*: 77

> **Eksempel 2.10.3.** Findes der et helt tal n hvis cifre er lutter 1-taller, således at n er delelig med 1999?
>
> Ja, og det kan man benytte Eulers sætning til at vise. Tal hvis cifre kun er 1-taller, er på formen
>
> $$\frac{10^m - 1}{9},$$
>
> og derfor er vi interesserede i at finde et m så $10^m - 1$ er delelig med 1999.
>
> Da 1999 er et primtal, er 10 og 1999 indbyrdes primiske og $\phi(1999) = 1998$. Ifølge Eulers sætning er
>
> $$10^{1998} \equiv 1 \pmod{1999}.$$
>
> Dermed går 1999 op i $10^{1998} - 1 = 9 \cdot \underbrace{1111111\dots111}_{1998}$. Da $\gcd(1999, 9) = 1$, må 1999 gå op i $\underbrace{1111111\dots111}_{1998}$.
>
> Opgaven er fra Georg Mohr-Konkurrencen 1999, og den kan faktisk også løses alene ved brug af skuffeprincippet og simple overvejelser om rester.

Opgave 2.10.10. Vis at hvis $m \in \mathbb{N}$ ikke er delelig med 2 eller 5, da findes uendeligt mange hele tal n hvis cifre er lutter 1-taller, så n er delelig med m. (*Advarsel:* Pas på primfaktoren 3.)

Opgave 2.10.11. Antag at $n, k \geq 2$ er to hele tal. Vis at da er mindst et af tallene $p = n + k^n$ og $q = nk^{(k^n - 1)} + 1$ ikke et primtal. *Hint*: 48

2.11 Orden

Eksempel 2.11.1. Betragt følgen af potenser

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, \ldots$$

modulo 5:

$$1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, \ldots.$$

Vi lægger hurtigt mærke til at følgen modulo 5 er periodisk med periodelængde 4. Tallet $m = 4$ er det mindste positive hele tal så $2^m \equiv 1 \pmod 5$, og det er oplagt at perioden derfor vil gentage sig med længde 4.

Som vi skal se i den følgende defintion, kalder vi 4 for ordenen af 2 modulo 5.

Definition af orden

Lad $n \in \mathbb{N}$, og lad $a \in \mathbb{Z}$ være primisk med n. *Ordenen* af a modulo n er det mindste positive heltal m så $a^m \equiv 1 \pmod n$. Ordenen betegnes $\mathrm{ord}_n(a)$.

Bemærk at det følger af Eulers sætning at der findes et sådant tal.

Opgave 2.11.1. Bestem $\mathrm{ord}_9(2)$, $\mathrm{ord}_8(3)$ og $\mathrm{ord}_{10}(7)$.

Sætning 2.11.1. Lad $n, k \in \mathbb{N}$, og lad $a \in \mathbb{Z}$ være primisk med n. Da er

$$a^k \equiv 1 \pmod n$$

hvis og kun hvis $\mathrm{ord}_n(a)$ er divisor i k.

Specielt er $\mathrm{ord}_n(a)$ divisor i $\phi(n)$.

Opgave 2.11.2. Bevis sætningen.

Sætning 2.11.2. Lad $n, m, k \in \mathbb{N}$, og lad $a \in \mathbb{Z}$ være primisk med n. Antag at $a^m \equiv 1 \pmod n$ og $a^k \equiv 1 \pmod n$. Da gælder at

$$a^{\gcd(m,k)} \equiv 1 \pmod n.$$

Opgave 2.11.3. Bevis sætningen.

Eksempel 2.11.2. Hvis vi ønsker at løse ligningen

$$x^3 \equiv 1 \pmod{64},$$

så kan vi udnytte at et x der opfylder ligningen, må være primisk med 64, dvs. der gælder ifølge Eulers sætning at $x^{\phi(64)} \equiv 1 \pmod{64}$. Ifølge sætning 2.8.3 er $\phi(64) = \phi(2^6) = 2^5 = 32$. Nu ved vi at x opfylder at $x^3 \equiv 1 \pmod{64}$ og $x^{32} \equiv 1 \pmod{64}$. Det følger derfor af sætning 2.11.2 at

$$1 \equiv x^{\gcd(3,32)} = x \pmod{64},$$

dvs. den eneste løsning til ligningen $x^3 \equiv 1 \pmod{64}$ er restklassen 1 modulo 64.

Definition af Mersennetal

Tallene $M_n = 2^n - 1$, hvor $n \in \mathbb{N}$, kaldes *Mersennetal*, og man har vist at M_n er et primtal for $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 87$ samt en del flere. Man formoder at der findes uendeligt mange Mersennetal som er primtal, men det er ikke bevist. Det største kendte Mersenneprimtal er i skrivende stund $M_{82.589.933}$, og det blev fundet i 2018.

Opgave 2.11.4. Lad p være et ulige primtal. Vis at hvis q er primfaktor i Mersennetallet $M_p = 2^p - 1$, da er q på formen $q = 2pk + 1$ for et positivt heltal k.
Hint: 86

Opgave 2.11.5. Lad $a > 1$ og n være positive heltal. Vis at hvis p er en ulige primfaktor i $a^{2^n} + 1$, da er $p - 1$ delelig med 2^{n+1}. *Hint*: 122

Eksempel 2.11.3. Lad n være et ulige tal større end 1. For at vise at n ikke går op i 3^n+1, antager vi det modsatte og søger at opnå en modstrid.

Antag derfor at der findes et ulige tal n større end 1 så n går op i 3^n+1. Lad p være den mindste primfaktor i n. Det smarte ved at vælge den mindste primfaktor i n er at da har n og $\phi(p)=p-1$ ingen fælles primfaktorer, dvs. $\gcd(n,p-1)=1$. Dette kan vi nemlig udnytte når vi ser på ordenen af 3 modulo p på følgende måde.

Da $p \mid 3^n+1$, er $3^n \equiv -1 \pmod{p}$, og $p \neq 3$. Dette kan fortælle os noget om ordenen af 3 modulo p. Vi har nemlig nu at

$$3^{2n} \equiv (3^n)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{p},$$

og altså at $\mathrm{ord}_p(3)$ går op i $2n$ ifølge sætning 2.11.1. Da $\mathrm{ord}_p(3)$ også går op i $\phi(p) = p-1$, må $\mathrm{ord}_p(3)$ gå op i $\gcd(2n, p-1)$. Fordi p er ulige, og $\gcd(n, p-1) = 1$, må $\gcd(2n, p-1) = 2$. Men da er $\mathrm{ord}_p(3) = 1$ eller $\mathrm{ord}_p(3) = 2$, og altså $3 \equiv 1 \pmod{p}$ eller $3^2 \equiv 1 \pmod{p}$, hvilket ikke er sandt for noget ulige primtal. Vi har derfor opnået en modstrid og vist at n ikke går op i 3^n+1 for noget ulige tal n større end 1.

Bemærkning. I eksemplet valgte vi den mindste primfaktor p i n fordi vi så ved at $\phi(p)=p-1$ er primisk med n, og det er et trick der er værd at skrive sig bag øret da det er anvendeligt i en del sammenhænge.

Opgave 2.11.6. Vis at 2^n-1 ikke er delelig med n for noget positivt heltal n, $n>1$.

Opgave 2.11.7. Lad p være et ulige primtal, og lad q og r være primtal således at p går op i q^r+1. Vis at enten går $2r$ op i $p-1$, eller også går p op i q^2-1. *Hint*: 118

Opgave 2.11.8. Bestem alle primtal p og q så pq går op i $(5^p-2^p)(5^q-2^q)$.

Definition af Fermattal

Fermattallene er $f_n = 2^{2^n}+1$ for $n=0,1,2,\ldots$. Fermat studerede disse tal og opdagede at f_0, f_1, f_2, f_3 og f_4 var primtal. Han kom derfor med den forkerte påstand i 1650 at alle Fermattal er primtal. Der er p.t. ikke fundet nogen primtal for $n \geq 5$, og man ved i dag at Fermattallene $f_5, f_6, f_7, \ldots, f_{33}$ ikke er primtal.

Fermattallene vokser dog så stærkt at det absolut ikke er simpelt at undersøge om et Fermattal er et primtal, og det har taget mange år og en stor indsats fra mange matematikere at nå frem til det man ved om Fermattal i dag. Selv om man ved at Fermattallene $f_5, f_6, f_7, \ldots, f_{33}$ ikke er primtal, kender man ikke primfaktoriseringen af dem alle, fx kender man for f_{20} og f_{24} ikke en eneste faktor i dem, men har blot vist at de må være sammensatte tal.

Du kan læse mere om Fermattal i kapitel 2.17.

Opgave 2.11.9. Betragt Fermattallet $f_n = 2^{2^n}+1$. Vis at hvis f_n går op i $3^{(f_n-1)/2}+1$, da er f_n et primtal. *Hint*: 142

Opgave 2.11.10. Bestem alle par (x,p) af positive heltal så p er et primtal, $x \leq 2p$, og x^{p-1} går op i $(p-1)^x+1$. (IMO shortlist 1999) *Hint*: 152

2.12 Følger

En del opgaver til internationale matematikkonkurrencer handler om følger af heltal som man typisk skal vise har en bestemt egenskab, fx at de er periodiske fra et vist trin, ikke indeholder kvadrattal, ….

Definition af periodiske følger

En følge $a_1, a_2, a_3 \dots$ kaldes *periodisk* hvis der findes et positivt helt tal m så $a_{n+m} = a_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Periodens længde er det mindste positive hele tal m med denne egenskab.

Følgen $a_1, a_2, a_3, \dots$ kaldes *periodisk fra et vist trin* hvis der findes positive hele tal m og k så $a_{n+m} = a_n$ for alle $n \geq k$.

Eksempel 2.12.1. Betragt følgen modulo et smart tal

I følgen

$$1, 9, 7, 7, 4, 7, 5, 3, 9, 4, 1, \dots$$

er hvert ciffer fra og med det femte summen af de fire foregående modulo 10. I dette eksempel skal vi undersøge hvilken af disse talkombinationer der kan indgå i følgen: a) 1,2,3,4, b) 3,2,6,9, c) 0,1,9,7.

Da der kun findes et endeligt antal kombinationer med fire cifre, og det næste ciffer i følgen er entydigt bestemt af de fire foregående, vil følgen være periodisk fra et vist trin. Men da man ud fra fire cifre i følgen også entydigt kan bestemme det foregående ciffer, kan man fortsætte den uendeligt i begge retninger med en fast periode. Derfor er den periodisk helt fra starten.

I mange opgaver med følger kan man netop konkludere at følgen må være periodisk fra et vist trin da der kun er endeligt mange muligheder. Herefter skal man så overveje om det først er fra et vist trin at den er periodisk, eller om den som i dette eksempel er periodisk fra starten.

At følgen er periodisk betyder at 1,9,7,7 optræder igen længere fremme i følgen, og cifferet lige inden kan man regne ud, må være 0. Dermed optræder kombinationen $0, 1, 9, 7$ i følgen.

Vi mangler stadigt at finde ud af om 1,2,3,4 og 3,2,6,9 indgår i følgen. Da den er periodisk, kan man jo i princippet blive ved til man har fundet hele perioden, og så se om de indgår. Dette er dog ikke altid en god strategi da længden af perioden kan være temmelig stor. Det kan som regel betale sig at lede efter et andet system i følgen med en kortere periode. Reducerer vi i dette eksempel følgens cifre modulo 2, får vi $1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, \dots$. Her ud fra kan vi se at følgen har $1, 1, 1, 1, 0$ som periode når vi regner modulo 2, og dette udelukker a) og b).

I dette eksempel blev følgens tal konstrueret modulo tallet 10, men det viste sig smart at reducere følgen yderligere modulo 2. At følgen er konstrueret modulo 10, og næste tal i følgen er entydigt bestemt ud fra de fire foregående, giver ifølge skuffeprincippet at den er periodisk, og det er et standardtrick der kan benyttes i mange sammenhænge. Dette brugte vi til at vise at en kombination faktisk fandtes. Da vi regnede modulo 2 var til gengæld for at vise at noget ikke fandtes, så teknikken kan benyttes til begge dele.

Opgave 2.12.1. Følgen $a_1, a_2, \dots$ er givet ved $a_1 = a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$ for $n \geq 1$. Vis at der ikke findes noget n, $n > 2$, så a_n er et kvadrattal.

Opgave 2.12.2. Fibonaccitallene er defineret ved $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ og $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ for $n \geq 2$. Vis at for ethvert helt tal k findes et positivt helt tal m så k går op i F_m.

Opgave 2.12.3. En følge af positive hele tal $a_0, a_1, a_2, \dots$ er givet ved

$$a_0 = m \quad \text{og} \quad a_{n+1} = a_n^5 + 487, \quad n \geq 0.$$

Bestem de værdier af m for hvilke følgen indeholder flest muligt kvadrattal. (NMC 2006)

Opgave 2.12.4. Lad $a_1, a_2, \dots$ være en følge af heltal med uendeligt mange positive og uendeligt mange negative tal. Antag at der for ethvert positivt heltal n fås n forskellige rester når tallene $a_1, a_2, \dots, a_n$ deles med n. Vis at ethvert helt tal optræder netop én gang i talfølgen. (IMO 2005)

Eksempel 2.12.2. Omskrivning af følge til ny følge

Når man skal arbejde med nogle følger, er det nemmere at omskrive til en anden følge og arbejde med den.

Om en følge af heltal $a_0, a_1, a_2, \ldots$ oplyses at $a_0 < a_1$ og

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ for } n > 1.$$

Vi ønsker at vise at $a_m \equiv a_{m+1} \pmod{2^m}$ for alle positive heltal m.

Følgen er ikke periodisk, og da det tal vi er interesserede i at regne modulo, afhænger af indekset, kan vi heller ikke betragte følgen modulo et fast tal. I stedet udnytter vi rekursionsformlen $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ og omskriver på følgende måde:

$$a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}),$$

Vi kan nu betragte en ny følge $b_n = a_n - a_{n-1}$ hvis rekursionsformel er meget simplere, nemlig $b_n = 2b_{n-1}$. Dermed fås rekursivt at

$$b_{n+1} = 2b_n = \ldots = 2^n b_1.$$

Altså er $a_{m+1} - a_m = 2^m b_1$, og derfor må $a_m \equiv a_{m+1} \pmod{2^m}$ for alle positive heltal m.

Opgave 2.12.5. En følge $x_0, x_1, x_2, \ldots$ er givet ved $x_0 = a$, $x_1 = 2$ og

$$x_n = 2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1, \; n > 1.$$

Find alle hele tal a så $2x_{3n} - 1$ er et kvadrattal for alle $n \geq 1$.

Opgave 2.12.6. Lad a være et helt tal. Følgen $x_0, x_1, \ldots$ er defineret ved $x_0 = a$, $x_1 = 3$ og

$$x_n = 2x_{n-1} - 4x_{n-2} + 3$$

for alle $n > 1$. Bestem det største hele tal k_a for hvilket der findes et primtal p så p^{k_a} går op i $x_{2011} - 1$. (BW 2011) *Hint*: 9

Opgave 2.12.7. Lad a_1 og a_2 være to positive hele tal. En følge af positive hele tal $a_0, a_1, a_2, \ldots$ er givet ved

$$a_{k+1} = \frac{a_k + a_{k-1}}{2015^i}, k > 0,$$

hvor i for hvert k er den maksimale potens af 2015 som går op i $a_k + a_{k-1}$. Vis at hvis følgen er periodisk fra et vist trin, da er længden af perioden delelig med 3. (BW 2014) *Hint*: 30

Opgave 2.12.8. En følge af positive heltal $a_1, a_2, a_3, \ldots$ opfylder at hvis $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ og m går op i n, da vil a_m gå op i a_n, og $a_m < a_n$. Bestem den mindst mulige værdi af a_{2000}. (Baltic Way 2000)

2.13 Den kinesiske restklassesætning

I nogle opgaver har man brug for at undersøge om der findes løsninger x til kongruenssystemer af typen

$$x \equiv a_1 \pmod{n_1}, \quad x \equiv a_2 \pmod{n_2}, \quad \ldots, \quad x \equiv a_m \pmod{n_m}.$$

Dette handler den kinesiske restklassesætning om.

Sætning 2.13.1. Den kinesiske restklassesætning

Lad n være et positivt heltal og $n = n_1 n_2 \ldots n_m$, hvor $\gcd(n_i, n_j) = 1$ når $i \neq j$. Da findes uendeligt mange heltallige løsninger x til kongruenssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_m \pmod{n_m}. \end{aligned}$$

Samtlige løsninger udgør netop en restklasse modulo n.

Bevis. Sætningen vises ved induktion efter m. Den er oplagt sand for $m = 1$. Betragt nu tilfældet $m = 2$. Vi ønsker at bestemme en løsning x til

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2}. \end{aligned}$$

En sådan løsning må være på formen $x = a_1 + qn_1$, hvor $q \in \mathbb{Z}$ opfylder at $a_1 + qn_1 \equiv a_2 \pmod{n_2}$. Da $\gcd(n_1, n_2) = 1$, findes en invers n_1^{-1} til n_1 modulo n_2. Dermed må $q \equiv (a_2 - a_1)n_1^{-1} \pmod{n_2}$ opfylde det ønskede, dvs. at $x = a_1 + (a_2 - a_1)n_1^{-1} n_1$ løser kongruenssystemet. Altså har kongruenssystemet løsninger.

Vi viser nu at samtlige løsninger netop udgør en restklasse modulo n. Det er klart at hvis $y \equiv x \pmod{n}$, da er y også en løsning. Antag nu at x og y er løsninger. Da vil både n_1 og n_2 gå op i $x - y$, og da $\gcd(n_1, n_2) = 1$, vil også n gå op i $x - y$. Dermed udgør løsningerne netop en restklasse modulo n.

Vi skal nu til selve induktionsskridtet, men har faktisk lavet alt arbejdet i tilfældet $m = 2$. Antag nu at sætningen gælder for m. Vi ønsker nu at vise at sætningen også gælder for $m + 1$. Lad $n = n_1 n_2 \ldots n_{m+1}$, hvor $\gcd(n_i, n_j) = 1$ når $i \neq j$. Betragt kongruenssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_{m+1} \pmod{n_{m+1}}. \end{aligned}$$

Ifølge induktionsantagelsen udgør samtlige løsninger til de m første kongruenser netop en restklasse modulo $n' = n_1 n_2 \ldots n_m$. Lad a' være en repræsentant for denne restklasse. Løsningerne til kongruenssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv a' \pmod{n'} \\ x &\equiv a_{m+1} \pmod{n_{m+1}} \end{aligned}$$

er identiske med løsningerne til det oprindelige kongruenssystem, og de udgør ifølge induktionsantagelsen én restklasse modulo $n' n_{m+1} = n$ da $\gcd(n', n_{m+1}) = 1$. Dermed er sætningen bevist. □

Eksempel 2.13.1. Vi ønsker ved hjælp af den kinesiske restklassesætning at bestemme samtlige løsninger til kongruenssystemet

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod{7} \\ x &\equiv 2 \pmod{17}. \end{aligned}$$

Den første ligning viser at $x = 3 + q \cdot 7$. For at den anden ligning også er opfyldt, må $3 + q \cdot 7 \equiv 2 \pmod{17}$. Ved at prøve os lidt frem ses at 5 er invers til 7 modulo 17 da $5 \cdot 7 \equiv 1 \pmod{17}$. Dermed er $x = 3 + (2-3)5 \cdot 7 = -32$ en løsning til kongruenssystemet, og vi ved fra den kinesiske restklassesætning at samtlige løsninger er $x = -32 + k \cdot 7 \cdot 17$, $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2.13.1. Bestem samtlige heltallige løsninger til kongruenssystemet

$$x \equiv 3 \pmod{6}$$
$$x \equiv 6 \pmod{19}.$$

Eksempel 2.13.2. I det foregående eksempel så vi hvordan man kan benytte den kinesiske restklassesætning til at bestemme samtlige løsninger til et kongruenssystem, men i nogle opgaver har man blot behov for at vide at der findes en løsning.

I dette eksempel vil vi vise at der findes 1000 (eller så mange det skal være) på hinanden følgende hele tal som alle er delelige med et kubiktal større end 1. Først vælger vi 1000 forskellige primtal $p_1, p_2, \dots, p_{1000}$. Ifølge den kinesiske restklassesætning har følgende kongruenssystem en løsning:

$$\begin{aligned} x+1 &\equiv 0 \pmod{p_1^3} \\ x+2 &\equiv 0 \pmod{p_2^3} \\ &\vdots \\ x+1000 &\equiv 0 \pmod{p_{1000}^3}. \end{aligned}$$

Hvis x er en løsning, da er $x+1, x+2, \dots, x+1000$ tusind på hinanden følgende hele tal som alle er delelige med et kubiktal.

Opgave 2.13.2. Vis at for alle positive heltal n findes der n på hinanden følgende hele tal, så tal nummer i er delelig med en i'te potens af et helt tal større end 1.

Opgave 2.13.3. Vis at for alle positive heltal n og m findes n på hinanden følgende positive heltal, så hvert af disse er deleligt med mindst m forskellige primtal.

Opgave 2.13.4. Vis at der eksisterer en følge af positive heltal $a_1, a_2, \dots$, så summen af vilkårlige n på hinanden følgende elementer er delelig med n^2. (Baltic Way 2006).

2.14 Mere om divisorer

Eksempel 2.14.1. I dette eksempel vil vi vise at hvis a, b, c og d er positive heltal, hvor $ab = cd$, da er

$$a^n + b^n + c^n + d^n$$

et sammensat tal for alle positive heltal n.

Når vi skal vise at $a^n+b^n+c^n+d^n$ er sammensat, skal vi gerne kunne faktorisere udtrykket, og derfor ønsker vi at se på hvilke fælles faktorer a, b, c og d har. Da $ab = cd$, kan vi se at en primfaktor i a også er divisor i c eller d. Dermed findes hele tal r og u så $a = ru$, hvor $r \mid c$ og $u \mid d$. Dette udnytter vi til at indse at der findes positive heltal r, s, u og v så $a = ru$, $b = sv$, $c = rs$ og $d = uv$. Nu har vi klarlagt sammenhængen mellem de fire tal og kan derfor faktorisere:

$$a^n + b^n + c^n + d^n = r^n u^n + s^n v^n + r^n s^n + u^n v^n = (r^n + v^n)(s^n + u^n).$$

Da begge faktorer er større end 1 for alle positive heltal n, er

$$a^n + b^n + c^n + d^n$$

et sammensat tal.

Opgave 2.14.1. Om tre positive heltal a, b og c gælder at a er ulige, og at der ikke findes et positivt heltal d større end 1 som går op i alle tre tal a, b og c. Desuden er

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}.$$

Bevis at abc er et kvadrattal. *Hint*: 124

Opgave 2.14.2. Bestem alle positive heltallige løsninger x, y og z til ligningen

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1999}{y^2} = \frac{z}{1997}.$$

Eksempel 2.14.2. Når divisorerne er potenser af heltal, kan man udnytte dette. Hvis vi ser på ligningen

$$x(x+1) = y^n,$$

kan vi se at hvis der findes en heltallig løsning, da må både x og $x+1$ være n'te potenser af et helt tal da to på hinanden følgende hele tal ikke har nogen fælles divisorer. Men da må $1 = x+1-x = b^n - a^n$ hvilket ikke kan lade sig gøre når $n > 1$.

Vi udnytter altså her at to på hinanden følgende tal ikke har nogen fælles divisorer, til at indse at ligningen ikke har nogen heltallige løsninger når $n > 1$. I det hele taget kan man udnytte at fælles divisorer for n og $n+a$ også er divisorer i a.

Bemærkning. Ovenstående eksempel er et specialtilfælde af den tidligere omtalte sætning af Erdös og Selfridge der siger at produktet af to eller flere på hinanden følgende positive heltal aldrig er en potens af et helt tal.

Opgave 2.14.3. Vis at ligningen

$$x^3 + 3 = 4y(y+1)$$

ikke har nogen heltallige løsninger.

Opgave 2.14.4. For hvilke positive heltal m og n, hvor m er ulige, er $m^n + 1$ et kvadrattal?

Opgave 2.14.5. Vis at der ikke findes positive heltal x, y og n, $n > 1$, for hvilke

$$x(x+1)(x+2) = y^n.$$

Du må ikke bruge sætningen af Erdös og Selfridge!

Opgave 2.14.6. Bestem alle positive heltal n så $n2^{n-1} + 1$ er et kvadrattal.

Opgave 2.14.7. Bestem alle par x og y af hele tal for hvilke

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(IMO 2006) *Hint*: 89

Eksempel 2.14.3. Nu skal vi se et eksempel på hvordan man kan bestemme den største fælles divisor vha. moduloregning.

Lad a, m og n være positive heltal, hvor m er ulige og $a > 1$. Vi vil nu bestemme $\gcd(a^m - 1, a^n + 1)$. Sæt $\gcd(a^m - 1, a^n + 1) = d$. I stedet for at forsøge at reducere dette udtryk regner vi a^{nm} modulo d på to forskellige måder da det kan give os informationer om d.

$$a^{nm} = (a^m)^n \equiv 1^n \equiv 1 \pmod d$$

Desuden er

$$a^{nm} = (a^n)^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod d$$

Dermed er $1 \equiv -1 \pmod d$, og altså $d = 1$ eller $d = 2$. Det er nemt at se at $d = 2$ når a er ulige, og $d = 1$ når a er lige.

I dette eksempel kombinerede vi den viden vi havde om en fælles divisor d, til at bestemme d vha. moduloregning, og det kan ofte være en god strategi.

Opgave 2.14.8. Bestem samtlige positive heltal $n, m > 2$ for hvilke $2^n - 1$ går op i $2^m + 1$.

Sætning 2.14.1. Lad a, n og m være positive heltal, hvor $a > 1$. Sæt $d = \gcd(n, m)$, $n = dn'$ og $m = dm'$. Da gælder

$$\gcd(a^m + 1, a^n + 1) = \begin{cases} a^d + 1 & \text{hvis både } n' \text{ og } m' \text{ er ulige,} \\ 2 & \text{hvis enten } n' \text{ eller } m' \text{ er lige, og } a \text{ er ulige,} \\ 1 & \text{hvis enten } n' \text{ eller } m' \text{ er lige, og } a \text{ er lige.} \end{cases}$$

$$\gcd(a^m - 1, a^n + 1) = \begin{cases} a^d + 1 & \text{hvis } m' \text{ er lige,} \\ 2 & \text{hvis } m' \text{ er ulige, og } a \text{ er ulige,} \\ 1 & \text{hvis } m' \text{ er ulige, og } a \text{ er lige.} \end{cases}$$

Bevis. I foregående eksempel har vi vist en del af sætningen, nemlig at

$$\gcd\left((a^d)^{m'}-1,(a^d)^{n'}+1\right)=\begin{cases} 2 & \text{hvis } m' \text{ er ulige, og } a \text{ er ulige,}\\ 1 & \text{hvis } m' \text{ er ulige, og } a \text{ er lige.}\end{cases}$$

Resten af beviset overlades til læseren i en opgave. □

For at bevise resten af sætningen er det nyttigt med følgende lemma, men det kan også gøres på måder hvor man ikke får brug for lemmaet.

Lemma 2.14.2. Lad x være et positivt heltal. For to positive heltal s og t, hvor $\gcd(s,t)=1$, gælder at

$$\gcd\left(\sum_{i=0}^{s-1}(-1)^i x^i, \sum_{i=0}^{t-1}(-1)^i x^i\right)=1.$$

Opgave 2.14.9. Vis lemma 2.14.2. *Hint*: 119

Opgave 2.14.10. Vis sætning 2.14.1.

Opgave 2.14.11. Vis at to forskellige Fermattal er indbyrdes primiske. (Husk at Fermattallene er tal på formen $f_n=2^{2^n}+1$ for $n=0,1,2,\ldots$).

Opgave 2.14.12. Vis at Fermattallet f_n går op i $2^{f_n}-2$ for alle ikke-negative heltal n.

2.15 Den p-adiske valuation

Vi starter med de mest grundlæggende regneregler for den p-adiske valuation, hvor vi allerede tidligere har nævnt den første i sætning 2.7.3.

Sætning 2.15.1. Regneregler for den p-adiske valuation

Lad p være et primtal, og lad a og b være hele tal. Da er

1. $v_p(ab)=v_p(a)+v_p(b)$.
2. $v_p\left(\gcd(a,b)\right)=\min\left(v_p(a),v_p(b)\right)$.
3. $v_p\left(\operatorname{lcm}(a,b)\right)=\max\left(v_p(a),v_p(b)\right)$.
4. $v_p(a+b)\geq\min\left(v_p(a),v_p(b)\right)$.
5. Hvis $v_p(a)\neq v_p(b)$, da er $v_p(a+b)=\min\left(v_p(a),v_p(b)\right)$.

Opgave 2.15.1. Bevis sætning 2.15.1.

Opgave 2.15.2. Lad b og n være positive heltal med $n>1$. Antag at der for ethvert positivt heltal k findes et heltal a_k så k går op i $b-a_k^n$. Vis at da må $b=A^n$ for et helt tal A. (IMO shortlist 2007)

En anden grundlæggende sætning om den p-adiske valuation er Legendres formel, der viser hvordan man beregner $v_p(n!)$.

Sætning 2.15.2. Legendres formel

For et primtal p og et positivt helt tal n gælder at

$$v_p(n!)=\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor+\cdots=\frac{n-s_p(n)}{p-1},$$

hvor $s_p(n)$ er summen af cifrene når n skrives i p-talssystemet.

Bevis. Bemærk først at ifølge sætning 2.15.1, 1), er

$$v_p(n!) = v_p(1) + v_p(2) + \cdots + v_p(n).$$

Vi tæller hvor mange gange p går op i $n!$ på følgende måde: Tallet p går op i netop $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ blandt tallene $1, 2, \ldots, n$. Tallet p^2 går op i netop $\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$ blandt tallene $1, 2, \ldots, n$, osv. Hvis der for et $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gælder at $v_p(k) = \alpha$, da går $p, p^2, \ldots, p^\alpha$ op i k, mens $p^{\alpha+1}, p^{\alpha+2}, \ldots$ ikke går op i k. Det betyder at k bidrager med 1 til hver af $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{p^\alpha} \right\rfloor$, men ikke til nogen af $\left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+1}} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{p^{\alpha+2}} \right\rfloor, \ldots$. Dermed må

$$v_p(n!) = v_p(1) + v_p(2) + \cdots + v_p(n) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

som ønsket.

Betragt nu n skrevet i p-talssystemet $n = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i$, hvor a_i'erne er hele tal som opfylder at $0 \leq a_i < p$ for alle $i = 1, 2, \ldots, k$. Nu er $s_p(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i$, og vi har

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^j} \right\rfloor = \sum_{j=1}^{k} \left\lfloor \frac{a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \cdots + a_0 p^0}{p^j} \right\rfloor \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(a_k p^{k-j} + a_{k-1} p^{k-1-j} + \cdots + a_j p^{j-j} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \left(p^{i-1} + p^{i-2} + \cdots + p^0 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \frac{p^i - 1}{p - 1} = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot \frac{p^i - 1}{p - 1} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i p^i - \sum_{i=0}^{k} a_i}{p - 1} = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}. \square
\end{aligned}$$

Opgave 2.15.3. Bestem alle positive heltal n så 2^{n-1} går op i $n!$.

Sætning 2.15.3. Lifting the exponent lemma (LTE)

Lad p være et primtal, og lad a og b være to hele tal som er primiske med p.

Når p er ulige, gælder

1) $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$, hvis $p \mid a - b$.
2) $v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n)$, hvis $p \mid a + b$, og n er ulige.

Når $p = 2$, gælder

3) $v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b)$, hvis n er ulige.
4) $v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(a + b) + v_2(n) - 1$, hvis n er lige.

Bevis. Vi viser 1), mens resten overlades til læseren i en opgave. Beviset føres ved induktion efter $v_p(n)$. Lad p være et ulige primtal, og lad a og b være to hele tal som er primiske med p, og hvor p går op i $a - b$.

For induktionsstarten betragter vi både tilfældet hvor $v_p(n) = 0$, og hvor $v_p(n) = 1$. Antag først at $v_p(n) = 0$. Ifølge sætning 2.15.1, 1), er

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1}).$$

Da $a \equiv b \pmod{p}$, og a og b er primiske med p, er

$$a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1} \equiv n a^{n-1} \pmod{p},$$

og $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) = v_p(a - b) + v_p(n)$.

Antag nu at $v_p(n) = 1$, og at $n = p n'$. Dermed er $v_p(n') = 0$, og det følger af det vi netop har vist, at

$$v_p(a^n - b^n) = v_p\left((a^p)^{n'} - (b^p)^{n'} \right) = v_p(a^p - b^p).$$

Sæt nu $a = b + kp$. Ifølge binomialformlen 2.7.4, sætning 2.15.1, 1) og 5), og fordi p går op i $\binom{p}{i}$ for alle $i = 1, 2, 3, \dots, p-1$, må

$$\begin{aligned}
v_p(a^p - b^p) &= v_p\left((b+kp)^p - b^p\right) \\
&= v_p\left(\binom{p}{1}b^{p-1}kp + \binom{p}{2}b^{p-2}(kp)^2 + \cdots + \binom{p}{p}(kp)^p\right) \\
&= v_p\left(\binom{p}{1}b^{p-1}kp\right) = v_p(p^2b^{p-1}k) = v_p(p^2) + v_p(b^{p-1}) + v_p(k) \\
&= 2 + v_p(k) = 2 + v_p(a-b) - 1 = v_p(a-b) + v_p(n)
\end{aligned}$$

da $k = \frac{a-b}{p}$, og b er primisk med p. Dermed er induktionsstarten på plads.

Nu er vi nået til induktionsskridtet. Antag at 1) er sand for alle n, hvor $v_p(n) = N$ for et givet positivt heltal N. Se nu på et n med $v_p(n) = N+1$, og sæt $n = p^{N+1}n'$. Da er

$$\begin{aligned}
v_p(a-b) &= v_p\left(\left(a^{p^N}\right)^{pn'} - \left(b^{p^N}\right)^{pn'}\right) \\
&= v_p\left(a^{p^N} - b^{p^N}\right) + 1 = v_p(a-b) + N + 1 = v_p(a-b) + v_p(n).
\end{aligned}$$

Hermed er induktionen fuldført. □

Opgave 2.15.4. Bevis resten af LTE (sætning 2.15.3).

Opgave 2.15.5. Bestem alle positive hele tal n så der for ethvert ulige tal a gælder at 2^{2017} går op i $a^n - 1$. (China Girls Math Olympiad 2017)

Opgave 2.15.6. Lad $p > 2025$ være et primtal. Lad desuden a og b være to positive heltal hvor $v_p(a+b) = 1$ og $v_p(a^{2025} + b^{2025}) > 1$. Vis at $v_p(a^{2025} + b^{2025}) \geq 2025$.

Opgave 2.15.7. Bestem det mindste positive hele tal n så 2^{1000} går op i $2025^n - 1$. *Hint*: 143

Opgave 2.15.8. Bestem alle positive hele tal n så n^2 går op $2^n + 1$. (IMO 1990) *Hint*: 179

Opgave 2.15.9. Findes der et positivt helt tal n så n har præcis 2000 forskellige primdivisorer, og så n går op i $2^n + 1$? (IMO 2000) *Hint*: 137

2.16 Summer af to kvadrattal

Primtal på formen $p = 4m + 1$ og primtal på formen $p = 4m + 3$ har forskellige egenskaber. Fx har vi tidligere vist at -1 er kvadratisk rest modulo et ulige primtal p netop når p er på formen $p = 4m + 1$.

I dette kapitel vil vi vise at et ulige primtal p kan skrives som en sum af to kvadrattal netop når p er på formen $p = 4m + 1$. Og endnu mere generelt: Et positivt heltal n kan skrives som sum af to kvadrattal netop når alle primfaktorer i n på formen $4m + 3$ indgår i en lige potens i primfaktoropløsningen af n. Inden vi er klar til det, har vi brug for nogle hjælpesætninger.

Sætning 2.16.1. Lad p være et primtal på formen $p = 4m + 3$. Hvis p går op i summen af to kvadrattal $a^2 + b^2$, da går p op i både a og b.

Bevis. Antag at $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$, og at a ikke er delelig med p. Da findes en invers a^{-1} til a modulo p, og dermed har vi

$$a^2(a^{-1})^2 + b^2(a^{-1})^2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Altså er

$$1 + (ba^{-1})^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

hvilket er en modstrid da -1 ikke er kvadratisk rest modulo p ifølge sætning 2.10.4. Derfor må p gå op i a og dermed også i b. □

Korollar 2.16.2. Primtal p på formen $p = 4m + 3$ kan ikke skrives som sum af to kvadrattal.

Bevis. Det følger umiddelbart af sætning 2.16.1. □

Primtal på formen $p = 4m + 1$ kan derimod altid skrives som sum af to kvadrattal, og det skal vi se nærmere på om lidt.

Definition af kvadratfrit

Et positivt helt tal kaldes *kvadratfrit* hvis alle primtal i primfaktoropløsningen af tallet kun indgår i 1. potens.

Opgave 2.16.1. Om et helt tal n oplyses at n er kvadratfrit, og at samtlige primfaktorer i n er på formen $4m+3$. Vis at n ikke kan skrives som sum af to kvadrattal.

Opgave 2.16.2. Vis at n^2+3 ikke er et kubiktal for noget positivt heltal n. *Hint*: 184

For at bevise at primtal på formen $p=4m+1$ kan skrives som sum af to kvadrater, har vi brug for følgende sætning.

Sætning 2.16.3. Thues sætning

Lad n være et helt tal større end 1, og lad k være det hele tal som opfylder at $k-1 \le \sqrt{n} < k$. Antag at $a \in \mathbb{Z}$ er primisk med n. Da findes $x, y \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, så

$$a y \equiv x \pmod{n} \quad \text{eller} \quad a y \equiv -x \pmod{n}.$$

Bevis. Betragt alle tal på formen $a y' + x'$, hvor $x', y' \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Da der er $k^2 > n$ par (x', y'), findes ifølge skuffeprincippet mindst to par så $a y' + x'$ har samme rest modulo n. Der findes altså $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, så $a(y_1 - y_2) \equiv x_2 - x_1 \pmod{n}$, hvor $x_1 \ne x_2$ eller $y_1 \ne y_2$.

Antag at $x_1 = x_2$. Da vil n gå op i $a(y_1 - y_2)$, og da $\gcd(a, n) = 1$, vil n gå op i $y_1 - y_2$, dvs. $y_1 = y_2$ da $y_1, y_2 \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Hvis vi antager at $y_1 = y_2$, får vi tilsvarende at $x_1 = x_2$, hvilket er en modstrid.

Dermed er

$$0 < |x_1 - x_2| \le k-1 \quad \text{og} \quad 0 < |y_1 - y_2| \le k-1.$$

Sæt nu $y = |y_1 - y_2|$ og $x = |x_1 - x_2|$. Da er

$$a y \equiv x \pmod{n} \quad \text{eller} \quad a y \equiv -x \pmod{n}. \qquad \square$$

Sætning 2.16.4. Et ulige primtal p kan skrives som sum af to kvadrater netop når p er på formen $p = 4m+1$.

Opgave 2.16.3. Bevis sætning 2.16.4. *Hint*: 261

Sætning 2.16.5. Sum af to kvadrattal

Et positivt heltal n kan skrives som sum af to kvadrattal, netop når alle primfaktorer i n på formen $4m+3$ indgår i en lige potens i primfaktoropløsningen af n.

Opgave 2.16.4. Bevis sætningen.

2.17 Primtallenes forunderlige verden

Vi har allerede set at der er uendelig mange primtal, og dette resultat har været kendt i hvert fald siden Euklid skrev sine elementer ca. 300 f.v.t. Primtallene er fascinerende og uforudsigelige, og der er stadig mange formodninger om primtal som venter på at blive bevist.

Her skal vi se på både formodninger og resultater om primtal som det ligger uden for disse noters rækkevidde at komme med et bevis for.

Formodning 2.17.1. Tvillingeprimtal

Tvillingeprimtal er to på hinanden følgende ulige tal som begge er primtal, fx er 5 og 7, 11 og 13 samt 17 og 19 tvillingeprimtal. Det formodes at der findes uendeligt mange tvillingeprimtal, men det er endnu ikke lykkes nogen at bevise det. Det er stadig et af de helt store uløste spørgsmål i talteori.

Opgave 2.17.1. Trillingeprimtal er tre på hinanden følgende ulige tal som alle er primtal. Hvor mange primtalstrillinger findes der?

Formodning 2.17.2. Goldbachs formodning

Goldbachs formodning fra 1742 siger at alle positive lige tal større end 2 kan skrives som en sum af to primtal. Fx $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, osv.

Det er indtil videre vist at dette er sandt for alle lige tal mindre end $4 \cdot 10^{18}$, men at vise det generelt er stadig et stort uløst problem, som mange i tidens løb uden held har kæmpet med.

Der er ikke noget (kendt) system i den måde primtallene fordeler sig på, og det er nok en del af årsagen til at primtallene er så fascinerende. Man ved alligevel ca. hvor mange primtal der er op til et helt tal n for meget store værdier af n.

Sætning 2.17.1. Primtalssætningen

Lad $\pi(n)$ betegne antallet af primtal mindre end n. Da er

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1,$$

Der findes også endnu bedre tilnærmelser til $\pi(n)$ end $\frac{n}{\ln n}$.

Sætning 2.17.2. Bertrands postulat

Bertrands postulat siger at for et positivt heltal n, $n > 3$, findes mindst ét primtal p så

$$n < p < 2n-2.$$

Bertrand kom med dette postulat i 1845, og påstanden blev allerede vist af Chebyshev i 1850, men navnet Bertrands *postulat* har alligevel hængt ved.

Opgave 2.17.2. Vis at $\binom{2n}{n}$ ikke er et kvadrattal for noget positivt heltal n.

Opgave 2.17.3. Lad n være et positivt heltal. Vis at de $2n$ tal $1, 2, 3, \ldots, 2n$ kan parres til n par så summen af hvert par er et primtal. *Hint*: 47

Sætning 2.17.3. Dirichlets sætning

Lad a og b være to indbyrdes primiske positive heltal. Da indeholder den aritmetiske progression

$$b, a+b, 2a+b, 3a+b, 4a+b, \ldots$$

uendeligt mange primtal. Eller sagt med andre ord: Der er uendeligt mange primtal på formen $an+b$.

Denne sætning blev først vist af Dirichlet i 1837.

Der findes ikke noget elementært bevis for sætningen, men man kan vise specialtilfælde af den som fx at der findes uendeligt mange primtal på formen $3n+2$, $4n+1$, $4n+3$ og $6n+5$.

Eksempel 2.17.1. For at vise at der findes uendelig mange primtal på formen $3n+2$, antager vi, som i Euklids bevis for at der findes uendeligt mange primtal, at der kun findes endeligt mange. Kald disse $p_1, p_2, \dots, p_r$, og betragt tallet

$$N = 3p_1p_2p_3\cdots p_r + 2$$

Da $N \equiv 2 \pmod 3$, kan N ikke kun have primfaktorer på formen $3n+1$, og N har derfor en primfaktor på formen $q = 3n+2$, men dette er en modstrid da ingen af primtallene $p_1, p_2, \dots, p_r$ går op i N.

Hvis man skal vise at der er uendeligt mange primtal på formen $4n+1$, kræver det en smule mere snilde og teori. Her er det ikke nok at betragte primfaktorer i $4p_1p_2\cdots p_r+1$, da produktet af primtal på formen $4n+3$ godt kan have rest 1 modulo 4, og vi får derfor brug for teori om forskellige egenskaber ved primtal på formen $4n+1$ og på formen $4n+3$. Fx ved vi at -1 kun er kvadratisk rest modulo ulige primtal på formen $4n+1$. Dette kan udnyttes på følgende måde: Antag igen at der kun findes endeligt mange primtal på formen $4n+1$, og lad disse være $p_1, p_2, p_3 \dots, p_r$. Betragt tallet

$$N = (2p_1p_2\cdots p_r)^2 + 1.$$

Læg mærke til at vi på denne måde har konstrueret et tal N så -1 er kvadratisk rest modulo alle divisorer q i N da

$$(2p_1p_2\cdots p_r)^2 \equiv -1 \pmod q.$$

En primfaktor q i N er derfor på formen $4n+1$, men dette er en modstrid da ingen af primtallene $p_1, p_2, \dots, p_r$ går op i N. Dermed findes der uendeligt mange primtal på formen $4n+1$.

Opgave 2.17.4. Vis at der findes uendeligt mange primtal på formen $4n+3$, på formen $6n+5$ og på formen $2^k n+1$, hvor k er et positivt heltal. Du må selvfølgelig ikke benytte Dirichlets sætning. *Hint*: 21, 165, 64

2.18 Den kvadratiske reciprocitetssætning

Den kvadratiske reciprocitetssætning viser en meget smuk sammenhæng mellem kvadratiske rester, og den er et godt værktøj til at tjekke om et tal er kvadratisk rest modulo et andet tal. Men før vi når til den, skal vi se på Legendresymbolet og Eulers kriterium.

Definition af Legendresymbolet

Lad p være et ulige primtal, og lad $a \in \mathbb{Z}$ være primisk med p. *Legendresymbolet*

$$\left(\frac{a}{p}\right)$$

er da 1 hvis a er kvadratisk rest modulo p, og -1 hvis a ikke er.

Opgave 2.18.1. Lad p være et ulige primtal. Vis at

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \cdots + \left(\frac{p-1}{p}\right) = 0.$$

Sætning 2.18.1. Eulers kriterium

Lad p være et ulige primtal, og lad $a \in \mathbb{Z}$ være primisk med p. Da er

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Bevis. Hvis a er kvadratisk rest modulo p, har kongruensligningen $x^2 \equiv a \pmod p$ en løsning x. Altså er

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

ifølge Fermats lille sætning.

Hvis a ikke er kvadratisk rest modulo p, da ved vi ifølge sætning 2.8.4 at for hver primisk rest $x \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ findes en unik primisk rest $y = x^{-1}a$ så $xy \equiv a \pmod p$, hvor $x \neq y$. Dermed kan alle resterne $1, 2, \dots, p-1$ parres to

og to så produktet af hvert par er a. Altså er

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

ifølge Wilsons sætning. □

Korollar 2.18.2. Lad p være et ulige primtal, og lad $a, b \in \mathbb{Z}$ være primiske med p. Da er

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right).$$

Bevis. Korollaret følger umiddelbart af Eulers kriterium. □

Korollar 2.18.3. Lad p være et ulige primtal. Da er

$$1)\quad \left(\frac{-1}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{hvis } p \equiv -1 \pmod{4} \end{cases}$$

$$2)\quad \left(\frac{2}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } p \equiv 1 \text{ eller } p \equiv 7 \pmod{8} \\ -1 & \text{hvis } p \equiv 3 \text{ eller } p \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

Del 1) er allerede vist tidligere, men tages alligevel med her.

Bevis. Del 1) følger umiddelbart af Eulers kriterium, men vi har også bevist det tidligere i sætning 2.10.4.

I del 2) viser vi kun tilfældet hvor $p \equiv 1 \pmod{4}$, og overlader tilfældet $p \equiv 3 \pmod{4}$ til læseren i en opgave. Hvis $p \equiv 1 \pmod{4}$ er

$$\begin{aligned} 2^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv (2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdots\left(2\cdot\frac{p-1}{2}\right) \equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdots(p-1) \\ &\equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdots\left(\frac{p-1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{p-3}{2}\right)\cdots(-5)\cdot(-3)\cdot(-1) \\ &\equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p} \end{aligned}$$

Ifølge Eulers kriterium gælder nu at

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{4}} \pmod{p}.$$

Dermed er $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ når $p \equiv 1 \pmod{8}$, og $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ når $p \equiv 5 \pmod{8}$. □

Opgave 2.18.2. Vis korollar 2.18.3, 2), for $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Sætning 2.18.4. Lad a være et helt tal og b et positivt helt tal større end 1 med primfaktoropløsning

$$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}.$$

Da er a kvadratisk rest modulo b hvis og kun hvis a er kvadratisk rest modulo $p_i^{\alpha_i}$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Opgave 2.18.3. Bevis sætning 2.18.4.

Opgave 2.18.4. Lad n være et ulige positivt heltal og p en primdivisor i $2^n - 1$. Vis at $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

Opgave 2.18.5. Lad x og y være indbyrdes primiske hele tal. Vis at hvis p er en ulige primdiviser i $x^2 + 2y^2$, da er $p \equiv 1$ eller $p \equiv 3 \pmod{8}$. *Hint*: 130

Definition af Sophie Germain-primtal

Et *Sophie Germain-primtal* er et primtal p så $2p + 1$ også er et primtal. Disse primtal er bl.a. interessante da $\phi(2p+1)$ er det dobbelte af primtallet p og $\phi(2p+1)$ derfor kun har to ikke-trivielle positive divisorer.

Opgave 2.18.6. Vis at hvis p er et primtal, og $p \equiv 3 \pmod{4}$, da er $2p+1$ divisor i Mersennetallet $M_p = 2^p - 1$ netop hvis p er et Sophie Germain-primtal. *Hint*: 221

Bemærkning. Kriteriet i opgave 2.18.6 viser fx at Mersennetallet $M_{11} = 2^{11}-1$ ikke er et primtal da 11 er et Sophie Germain-primtal fordi $2\cdot 11+1=23$ også er et primtal, og 23 dermed er divisor i $M_{11}=2047$.

Opgave 2.18.7. Find mindst ét primtal $p > 11$ for hvilket $M_p = 2^p - 1$ ikke er et primtal.

Opgave 2.18.8. Vis at ligningen $16 = x^8 \pmod p$ har en heltallig løsning for alle ulige primtal p.

Opgave 2.18.9. Fermattallene er som tidligere nævnt $f_n = 2^{2^n}+1$, for $n=1,2,3,\ldots$. Vis at hvis p er en primdivisor i f_n, $n>2$, da er $p\equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$. *Hint*: 63

Bemærkning. Det var vha. kriteriet i opgave 2.18.9 at Euler gættede at $641 = 5\cdot 2^{5+2}+1$ var primfaktor i $f_5 = 2^{2^5}+1$.

Sætning 2.18.5. Lad x og y være to indbyrdes primiske heltal og a, b, c hele tal. Hvis p er en primdivisor i $ax^2+bxy+cy^2$ som ikke går op i abc, da er

$$D = b^2 - 4ac$$

kvadratisk rest modulo p.

Opgave 2.18.10. Bevis sætning 2.18.5.

Sætning 2.18.6. Den kvadratiske reciprocitetssætning

Lad p og q være to forskellige ulige primtal. Da er

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Bemærkning. Euler formulerede den kvadratiske reciprocitetssætning i 1783, men uden bevis. Det blev Gauss der i 1801 fik udgivet det første korrekte bevis for sætningen efter fejlslagne forsøg fra bl.a. Legendre. Den kvadratiske reciprocitetssætning kaldes af mange *Aritmetikkens perle*, og det var Gauss' favoritsætning inden for talteori. Der findes nu mange helt forskellige beviser for sætningen, men de er alle for omfangsrige til disse noter.

Opgave 2.18.11. Undersøg om 37 og 143 er kvadratiske rester modulo 2003. (2003 er et primtal).

Opgave 2.18.12. Lad p være et ulige primtal. Vis at

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } p\equiv \pm 1 \pmod{12} \\ -1 & \text{hvis } p \equiv \pm 5 \pmod{12} \end{cases}$$
$$\left(\frac{5}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } p\equiv \pm 1 \pmod{5} \\ -1 & \text{hvis } p \equiv \pm 2 \pmod{5} \end{cases}$$

Opgave 2.18.13. Bestem samtlige par af hele tal (x, y) som opfylder ligningen $162x^2 = 7+151y^2$.

Opgave 2.18.14. Lad a, b og c være positive heltal som er parvis indbyrdes primiske. Vis at hvis $a^2-ab+b^2=c^2$, da er enhver primdivisor i c på formen $6k+1$.

Opgave 2.18.15. Vis at hvis $p=2^n+1$, $n>1$, er et primtal, da går p op i $3^{\frac{p-1}{2}}+1$.

Opgave 2.18.16. Bestem alle positive heltal k for hvilke der findes et heltal a så 2007 går op i $(a+k)^3-a^3$.

Opgave 2.18.17. Vis at hvis et positivt heltal a er kvadratisk rest modulo alle primtal, da er a et kvadrattal.

Opgave 2.18.18. Lad n være et positivt heltal større end 2. Vis at Fermattallet f_n har en primfaktor større end $2^{n+4}(n+2)$. *Hint*: 101

3 Algebra

Dette kapitel handler grundlæggende om relationer mellem reelle tal. I afsnit 3.1-3.3 får du en introduktion til at omskrive udtryk, faktorisere og løse ligningssystemer. De kan betragtes som en slags opvarmning til algebra og har fokus på grundlæggende metoder som giver et godt grundlag for mere udfordrende opgaver. De fleste af opgaverne i disse afsnit er standardopgaver der træner teorien, men der er også et par mere udfordrende opgaver i afsnit 3.3.

I afsnit 3.4 introduceres rationale og irrationale tal og centrale sætninger om disse, og afsnit 3.5 og 3.6 har fokus på summer og følger. Her ser vi både på differensrækker, kvotientrækker, teleskopsummer og rekursive følger. Til slut er der introduktion til funktionalligninger og uligheder, som også er centrale emner i algebra.

Afsnit 3.7 kræver kendskab til grundlæggende viden om monotoniforhold for funktioner, og afsnit 3.12 kræver yderligere kendskab til differentialregning.

Indhold

3.1 Kvadratsætninger og omskrivning til kvadrat

Kvadratsætningerne kan bruges i rigtig mange sammenhænge, og i dette afsnit skal vi se på hvordan de kan bruges til at løse andengradsligninger og andengradsuligheder, bevise uligheder og faktorisere.

Sætning 3.1.1. Kvadratsætningerne

$$\begin{aligned}
&1) \quad (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab,\\
&2) \quad (a-b)^2 = a^2+b^2-2ab,\\
&3) \quad (a+b)(a-b) = a^2-b^2.
\end{aligned}$$

Eksempel 3.1.1. Andengradsligninger og omskrivning til kvadrat

For at løse andengradsligningen $4x^2+12x-7=0$ omskriver vi til kvadrat på følgende måde:

$$0 = 4x^2+12x-7 = (4x^2+12x+9)-9-7 = (2x+3)^2-16.$$

Læg mærke til hvordan vi udnytter første kvadratsætning til at finde ud af hvilket tal vi skal lægge til eller trække fra for at få et kvadrat hvor $4x^2+12x$ indgår. Nu er der ikke langt til en løsning:

$$\begin{aligned}
(2x+3)^2 = 16 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x+3 = \pm 4\\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{-3\pm 4}{2}\\
&\Leftrightarrow \quad x = -\frac{7}{2} \ \vee \ x = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Omskrivningen svarer helt til hvordan man udleder diskriminantformlen til at løse andengradsligninger, men når man bliver fortrolig med at omskrive på denne måde, kan man bruge denne metode i mange andre sammenhænge også.

Vi ser på endnu et eksempel, men denne gang er koefficienten til x^2 ikke et kvadrattal. For at løse andengradsligningen $3x^2+5x-2=0$ ganger vi med 3 så koefficienten til x^2 bliver et kvadrattal. Løsningen ser nu sådan ud:

$$\begin{aligned} 3x^2+5x-2=0 &\iff 9x^2+15x-6=0 \\ &\iff \left(3x+\frac{5}{2}\right)^2=6+\frac{25}{4}=\frac{49}{4} \\ &\iff 3x+\frac{5}{2}=\pm\frac{7}{2} \\ &\iff x=\frac{1}{3} \vee x=-2. \end{aligned}$$

Opgave 3.1.1. Løs ligningen $x^2-6x+8=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 3.1.2. Løs ligningen $5x^2-6x+1=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 3.1.3. Løs ligningen $a^2-a+\frac{1}{4}=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 3.1.4. Løs ligningen $3x^2+4x+2=0$ ved at omskrive til kvadrat.

Andengradsuligheder kan også løses ved at omskrive til kvadrat. Her får vi brug for følgende helt grundlæggende iagttagelser om uligheder:

Sætning 3.1.2. Grundlæggende regneregler for uligheder

Man må lægge samme tal til og trække samme tal fra på begge sider af et ulighedstegn:

$$x \geq y \iff x+a \geq y+a.$$

Tilsvarende må man gange og dividere med et positivt tal på begge sider af en ulighed, mens man skal vende ulighedstegnet om hvis man ganger eller dividerer med et negativt tal:

$$\begin{aligned} x \geq y &\iff a\cdot x \geq a\cdot y, \quad \text{hvis } a>0. \\ x \geq y &\iff a\cdot x \leq a\cdot y, \quad \text{hvis } a<0. \end{aligned}$$

Når man arbejder med kvadrater, gælder

$$\begin{aligned} x^2 \geq a &\iff x \leq -\sqrt{a} \vee \sqrt{a} \leq x, \\ x^2 \leq a &\iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}. \end{aligned}$$

Eksempel 3.1.2. Andengradsuligheder

Hvis vi ønsker at bestemme for hvilke reelle tal x følgende ulighed gælder

$$x^2+6x+5 \geq 0,$$

kan vi også benytte metoden med at omskrive til kvadrat kombineret med de grundlæggende regneregler for uligheder:

$$\begin{aligned} x^2+6x+5 \geq 0 &\iff (x+3)^2 \geq 4 \\ &\iff x+3 \leq -2 \vee 2 \leq x+3 \\ &\iff x \leq -5 \vee -1 \leq x. \end{aligned}$$

Endnu et eksempel:

$$\begin{aligned} 3x^2-x<2 &\iff 9x^2-3x<6 \\ &\iff \left(3x-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{25}{4} \\ &\iff -\frac{5}{2}<3x-\frac{1}{2}<\frac{5}{2} \\ &\iff -2<3x<3 \\ &\iff -\frac{2}{3}<x<1. \end{aligned}$$

Opgave 3.1.5. Løs uligheden $x^2+2x>3$ ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 3.1.6. Løs uligheden $3y^2+7y+2 \leq 0$ ved at omskrive til kvadrat.

Eksempel 3.1.3. Bevis for uligheder

Nogle uligheder kan man bevise er sande ved at udnytte at et kvadrat altid er større end lig med nul. Fx er

$$x^2+y^2 \geq 2xy$$

for alle reelle tal x og y fordi uligheden kan omskrives til $(x-y)^2 \geq 0$, som er sand da et kvadrat aldrig er negativt.

Uligheden

$$x^2+9y^2+\frac{37}{9} \geq 4x+2y$$

ser umiddelbart temmelig kompliceret ud, men ved at omskrive til kvadrat kan vi som før nemt vise at den er sand for alle reelle tal x og y:

$$\begin{aligned} x^2+9y^2+\frac{37}{9} \geq 4x+2y \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2-4x+4)+\left(9y^2-2y+\frac{1}{9}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-2)^2+\left(3y-\frac{1}{3}\right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Da et kvadrat altid er større end lig med nul, gælder det samme for summen af to kvadrater.

Opgave 3.1.7. Bevis at $a^2+1 \geq 2a$ for alle reelle tal a ved at omskrive til kvadrat.

Opgave 3.1.8. Bevis at $x+\frac{1}{x} \geq 2$ for alle positive reelle tal x.

Opgave 3.1.9. Bevis at $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ for alle positive reelle tal a of b.

Opgave 3.1.10. Bevis at hvis $x+y=1$ for to positive reelle tal x og y, da er $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq 4$. *Hint*: 102

Opgave 3.1.11. Bevis at $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx$ for alle reelle tal x, y og z.

Opgave 3.1.12. Bevis at $8x^2+2y^2+y+\frac{5}{8} \geq 4x$ for alle reelle tal x og y.

Eksempel 3.1.4. Faktorisering

Indtil videre har vi kun brugt de to første kvadratsætninger. Nu skal vi også bruge den tredje kvadratsætning til at faktorisere udtryk da det ofte er en god ide at omskrive til et produkt.

Udtrykket x^2-y^2+x+y kan faktoriseres til

$$x^2-y^2+x+y=(x+y)(x-y)+x+y=(x+y)(x-y+1).$$

Her brugte vi først den tredje kvadratsætning og satte derefter $(x+y)$ uden for parentes.

Betragt nu udtrykket $4x^2y^2+x^2+4x^2y-y^2$. Først lægger vi mærke til at de tre første led kan omskrives til et kvadrat, og derefter bruger vi tredje kvadratsætning:

$$4x^2y^2+x^2+4x^2y-y^2=(2xy+x)^2-y^2=(2xy+x+y)(2xy+x-y).$$

I næste eksempel får vi brug for at lægge et ekstra led til og trække det fra igen undervejs i omskrivningen:

$$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+a+1)(a^2-a+1).$$

Her er tricket at se at det der står, næsten er et kvadrat, lægge det til der mangler, og trække det fra igen for at omskrive til kvadrat.

Opgave 3.1.13. Faktoriser $9x^2-3x+\frac{1}{4}$.

Opgave 3.1.14. Faktoriser $2n^2+8m^2+8nm$.

Opgave 3.1.15. Faktoriser $9a^2-b^2+6a+2b$.

Opgave 3.1.16. Faktoriser a^2-b^2+6a+9.

Opgave 3.1.17. Faktoriser $a^2+2b^2+3ab+b-1$.

Opgave 3.1.18. Faktoriser n^4+4.

3.2 Andengradsligninger og skjulte andengradsligninger

Hvis en andengradsligning har heltallige løsninger, kan man forholdsvis nemt gætte dem, og det er ofte hurtige end at bestemme dem på anden vis. Først minder vi om følgende standardsætning til løsning af andengradsligninger:

Sætning 3.2.1. Diskriminantformlen

Betragt andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, med diskriminant $d=b^2-4ac$.

Hvis $d>0$, har ligningen to reelle løsninger $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$.

Hvis $d=0$, har ligningen én reel løsning $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Hvis $d<0$, har ligningen ingen reelle løsninger.

Opgave 3.2.1. Bevis sætningen ved at omskrive til kvadrat.

Sætning 3.2.2. Løsningernes sum og produkt

Hvis andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, har løsningerne x_1 og x_2, da er

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2,$$

og $b=-a(x_1+x_2)$ og $c=ax_1x_2$.

Hvis $a=1$, ses specielt at $b=-(x_1+x_2)$ og $c=x_1x_2$.

Bemærk at hvis andengradsligningen kun har én reel løsning x_1, da gælder sætningen også, vi sætter blot $x_1=x_2$.

Bevis. Først ses at

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1\cdot x_2)=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2.$$

For at vise sætningen skal vi altså vise at $b=-a(x_1+x_2)$ og $c=ax_1x_2$.

Summen af løsningerne er

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{d})+(-b+\sqrt{d})}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

hvilket viser at $b=-a(x_1+x_2)$.

Produktet af løsningerne er

$$\begin{aligned}x_1\cdot x_2&=\frac{-b-\sqrt{d}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{d}}{2a}=\frac{(-b-\sqrt{d})\cdot(-b+\sqrt{d})}{(2a)^2}\\&=\frac{(-b)^2-(\sqrt{d})^2}{4a^2}=\frac{b^2-d}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a},\end{aligned}$$

hvilket viser at $c=ax_1x_2$.

Hvis andengradsligningen kun har én løsning, da er $d=0$, hvilket svarer til at $x_1=x_2$, dvs. sætningen gælder også i dette tilfælde. □

Eksempel 3.2.1. Gæt løsningerne til en andengradsligning

Det er nemt at gætte løsninger til andengradsligninger hvis de er heltallige. Hvis $a=1$ i andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$ med løsningerne x_1 og x_2, ved vi fra sætning 3.2.2 at

$$b=-(x_1+x_2)\quad\text{og}\quad c=x_1x_2,$$

dvs. hvis vi skal gætte løsningerne til ligningen $x^2-5x+6=0$, skal vi gætte to tal x_1 og x_2 så $x_1+x_2=5$ og $x_1x_2=6$. Det er nemt at se at $x_1=2$ og $x_2=3$ løser begge ligninger, og de er derfor løsningerne til $x^2-5x+6=0$, som kan faktoriseres $(x-2)(x-3)=0$.

Løsningerne til andengradsligningen $3x^2-9x-12=0$ kan gættes ved først at faktorisere $3(x^2-3x-4)=0$ og derefter finde løsningerne x_1 og x_2 som opfylder at $x_1+x_2=3$ og $x_1x_2=-4$. Her er $x_1=-1$ og $x_2=4$ løsningerne, og ligningen kan faktoriseres $3(x+1)(x-4)=0$.

Man kan selvfølgelig på helt samme måde gætte løsninger hvis de ikke er heltallige; det er bare sværere.

Opgave 3.2.2. Gæt løsningerne til $x^2 - 6x + 8 = 0$, og faktoriser.

Opgave 3.2.3. Gæt løsningerne til $2x^2 + 8x - 10 = 0$, og faktoriser.

Opgave 3.2.4. Gæt løsningerne til $-4x^2 + 24x + 28 = 0$, og faktoriser.

Ligninger der ikke umiddelbart ligner andengradsligninger, kan være skjulte andengradsligninger hvor den variable fx er x^2, x^3, $\sqrt{x}$ eller andet.

Eksempel 3.2.2. Skjulte andengradsligninger

Ligninger som $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ og $a^6 - 9a^3 + 8 = 0$ kan betragtes som andengradsligninger hvor den variable er henholdsvis x^2 og a^3, da de kan omskrives til $(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0$ og $(a^3)^2 - 9a^3 + 8 = 0$. Vi kan derfor løse dem på samme måde som andengradsligninger fx ved at gætte løsninger:

$$(x^2)^2 - 3x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4$$

da x^2 ikke kan være negativ. Samtlige løsninger er altså $x = \pm 2$.

Den anden ligning løses tilsvarende:

$$(a^3)^2 - 9a^3 + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a^3 - 1)(a^3 - 8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^3 = 1 \vee a^3 = 8.$$

Samtlige løsninger er derfor $a = 1$ og $a = 2$.

I de to første eksempler skulle vi blot finde en variabel der gjorde ligningerne til andengradsligninger. Nu ser vi på et eksempel der også kræver at vi skriver om på ligningen:

$$y^2 + \frac{14}{y^2} = 9$$

Her bemærker vi først at $y^2 \neq 0$ da der divideres med y^2. Derfor kan vi gange med y^2 på begge sider af ligningstegnet og få en ligning med præcis de samme løsninger:

$$(y^2)^2 - 9y^2 + 14 = 0 \Leftrightarrow (y^2 - 2)(y^2 - 7) = 0.$$

Dermed er samtlige løsninger $y = \pm\sqrt{2}$ og $y = \pm\sqrt{7}$.

Opgave 3.2.5. Løs ligningen $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$.

Opgave 3.2.6. Løs ligningen $u^{10} + 1 = 2u^5$.

Opgave 3.2.7. Løs ligningen $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

Opgave 3.2.8. Løs ligningen $a^4 = 15 + \frac{16}{a^4}$.

Opgave 3.2.9. Løs ligningen $4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$.

Opgave 3.2.10. Et A4-papir er rektangulært og ligedannet med A5-papir der fremkommer ved halvering af den lange side af et stykke A4-papir. Bevis at forholdet mellem siderne af et A4-papir er $\sqrt{2}$. *Hint*: 117

Opgave 3.2.11. Et punkt P på et linjestykke AB deler AB i det gyldne snit hvis

$$\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|},$$

og dette forhold kaldes *det gyldne snit*. Bevis at det gyldne snit er lig med $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Hint: 73

3.3 Ligningssystemer

Lineære ligningssystemer kan løses ved standardmetoder, men mange ligningssystemer er mere udfordrende. Her vises hvordan lineære ligningssystemer kan løses ved substitution og ved lige store koefficienters metode. Desuden ser vi på ikke-lineære ligningssystemer og kommer med idéer til hvordan man løser disse.

Eksempel 3.3.1. Lineære ligningssystemer

$$\begin{aligned}3x+y-2z&=6,\\-x+2y+3z&=-9,\\5x-3y+z&=6.\end{aligned}$$

Ligningssystemet består af tre ligninger med tre ubekendte, og det kaldes lineært fordi alle ligningerne er på formen $ax+by+cz=d$, hvor a,b,c,d er konstanter. Den slags ligninger kan løses uden problemer med standardmetoder. Her præsenterer vi to af disse standardmetoder, nemlig *substitution* og *lige store koefficienters metode*.

Substitution
Ligningssystemet kan løses ved at isolere fx y i første ligning så y er udtrykt ved x og z, og indsætte det i de to andre ligninger. På den måde reduceres ligningssystemet til to ligninger med to ubekendte. Dette kaldes substitutionsmetoden da y substitueres med noget andet. Ifølge den første ligning er $y=6-3x+2z$. Ved at indsætte dette i de to andre ligninger fås:

$$\begin{aligned}-x+2(6-3x+2z)+3z&=-9,\\5x-3(6-3x+2z)+z&=6,\end{aligned}$$

og altså

$$\begin{aligned}-x+z&=-3,\\14x-5z&=24.\end{aligned}$$

Nu har vi reduceret til to ligninger med to ubekendte.

Ved at isolere x i den første ligning og indsætte i den sidste fås

$$14\cdot(z+3)-5z=24 \quad\Leftrightarrow\quad 9z=-18 \quad\Leftrightarrow\quad z=-2.$$

Altså er $z=-2$, $x=3+z=3+(-2)=1$ og $y=6-3x+2z=6-3\cdot1+2\cdot(-2)=-1$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $(x,y,z)=(1,-1,-2)$ faktisk løser ligningssystemet.

Lige store koefficienters metode
Vi kan også løse ligningssystemet ved at benytte lige store koefficienters metode. Hvis vi ganger første ligning med 3 og anden ligning med 2 fås:

$$\begin{aligned}9x+3y-6z&=18,\\-2x+4y+6z&=-18.\end{aligned}$$

Vi har nu to ligninger hvor koefficienten til z er den samme pånær fortegn, og når vi lægger dem sammen fås en ligning i x og y: $7x+7y=0$ og altså $x+y=0$. På den måde har vi elimineret z ved at kombinere de to første ligninger. Nu gør vi det samme med de to sidste ligninger:

$$\begin{aligned}-x+2y+3z&=-9,\\15x-9y+3z&=18.\end{aligned}$$

Når vi trækker den nederste ligning fra den øverste fås $-16x+11y=-27$. Nu har vi reduceret til to ligninger med to ubekendte. Vi kan igen få lige store koefficienter til fx x ved at gange første ligning med 16:

$$\begin{aligned}16x+16y&=0,\\-16x+11y&=-27\end{aligned}$$

Summen af ligningerne er $27y=-27$ og altså $y=-1$ Nu kan vi udnytte de tidligere ligninger til at bestemme x og z og som før få $(x,y,z)=(1,-1,-2)$.

Opgave 3.3.1. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 1, \\ 3x + 4y &= -5. \end{aligned}$$

Opgave 3.3.2. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5z &= 5, \\ 2x + y + 7z &= -6, \\ x + 4y - 10z &= 0. \end{aligned}$$

Eksempel 3.3.2. Ikke-lineære ligningssystemer

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+y} + x &= 3, \\ \frac{x}{x+y} &= 2. \end{aligned}$$

Disse ligninger er ikke lineære, så vi kan ikke gøre helt som i eksemplet før. Man kan sagtens bruge substitutionsmetoden her, men det er lidt mere besværligt. Vi ser i stedet på ligningerne og overvejer om der ikke er noget smartere vi kan gøre. Hvis vi ganger den første ligning igennem med x, så bliver brøken i denne ligning lig med brøken i den anden ligning, og så kan vi trække dem fra hinanden og få en ligning i x.

Inden vi ganger igennem med x, skal vi sikre os at $x = 0$ ikke er en løsning til ligningssystemet. Hvis vi ser på ligning nummer to, er det klart at der ikke findes løsninger hvor $x = 0$. Derfor kan vi antage at $x \neq 0$, og få:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+y} + x^2 &= 3x, \\ \frac{x}{x+y} &= 2. \end{aligned}$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås $x^2 - 3x + 2 = 0$. Dette er en andengradsligning som fx kan løses ved at faktorisere:

$(x-1)(x-2) = 0$. Dermed er $x = 1$ eller $x = 2$. Hvis $x = 1$, fås ved at indsætte i anden ligning at $\frac{1}{1+y} = 2$, og altså $y = -\frac{1}{2}$. Hvis vi indsætter $x = 1$ og $y = -\frac{1}{2}$ i første ligning, ses at $(x, y) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ er en løsning til ligningssystemet. Hvis $x = 2$, er $\frac{2}{2+y} = 2$, og altså $y = -1$. Ved indsættelse ses at $(x, y) = (2, -1)$ også løser ligningssystemet.

Bemærk at vi ved at omskrive ligningssystemet først finder alle mulige løsninger, men at vi skal indsætte i begge ligninger til slut for at se om de faktisk er løsninger.

Advarsel: Pas på ikke at gange eller dividere med nul når du omskriver i de følgende opgaver!

Opgave 3.3.3. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} y + 2x &= x^2 - 10, \\ 2y - 2x &= -20. \end{aligned}$$

Opgave 3.3.4. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} &= 1, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} &= 7. \end{aligned}$$

Opgave 3.3.5. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} \frac{12}{x^2+y} + y &= 4, \\ \frac{3y}{x^2+y} + 2y &= 5. \end{aligned}$$

Opgave 3.3.6. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ \frac{x}{x^2+y^2} &= 2x. \end{aligned}$$

Hint: 71

Opgave 3.3.7. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} xy &= 3, \\ yz &= 1, \\ zx &= 12. \end{aligned}$$

Definition af heltalsdel og brøkdel

Heltalsdelen af x betegnes $\lfloor x \rfloor$ og er det største hele tal mindre end lig med x.

Brøkdelen af x betegnes $\{x\}$ og er $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Fx er $\lfloor 5{,}39 \rfloor = 5$ og $\{5{,}39\} = 0{,}39$.

Opgave 3.3.8. Bestem samtlige reelle løsninger til ligningssystemet.

$$\begin{aligned} x + \lfloor y \rfloor + \{z\} &= 1{,}1 \\ z + \lfloor x \rfloor + \{y\} &= 2{,}2 \\ y + \lfloor z \rfloor + \{x\} &= 3{,}3. \end{aligned}$$

Hint: 115

3.4 Rationale og irrationale tal

Definition af rationale tal

Et *rationalt tal* er et tal der kan skrives som en brøk $\frac{a}{b}$ med et helt tal i tæller og nævner (og selvfølgelig $b \neq 0$). Fx er 3, $\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{7}$ og 0 rationale tal.

Mængden af de rationale tal betegnes $\mathbb{Q}$.

Sætning 3.4.1. Summen, differensen, produktet og kvotienten af to rationale tal er et rationalt tal.

Bevis. Vi beviser kun at summen af to rationale tal er rational. Resten overlades til læseren i næste opgave.
Summen af de to rationale tal $\frac{a}{b}$ og $\frac{c}{d}$, hvor $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ og $d \neq 0$, er

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

og altså et rationalt tal da $ad + bc$ og bd er hele tal, og $bd \neq 0$. □

Opgave 3.4.1. Bevis sætning 3.4.1.

Definition af irrationale tal

Et *irrationalt tal* er et reelt tal der ikke er rationalt, dvs. et reelt tal som ikke kan skrives som en brøk med et helt tal i tæller og nævner. Man kan bevise at fx $\sqrt{2}$ og π er irrationale tal.

Sætning 3.4.2. Summen, differensen, produktet og kvotienten af et rationalt og et irrationalt tal er irrationalt, med undtagelse af produkt og kvotient hvor det rationale tal er 0.

Summen, differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal kan derimod både være et rationalt og irrationalt tal.

Bevis. Vi viser kun den del af sætningen der handler om sum. Resten overlades til læseren i en opgave.

Summen af et rationalt tal og et irrationalt tal er et irrationalt tal, for hvis den var rational, ville det irrationale tal være differensen mellem to rationale tal og altså selv et rationalt tal, hvilket er en modstrid. Dermed er summen af et rationalt og et irrationalt tal irrationalt.

Hvis vi ser på summen af to irrationale tal, bemærker vi først at $3-\sqrt{2}$ og $2\sqrt{2}$ er irrationale tal da både differens og produkt af et rationalt og et irrationalt tal er irrationale. Summen $\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})=3$ er rational, mens summen $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ er irrational. Dette illustrerer at summen af to irrationale tal både kan være et rationalt og et irrationalt tal. □

Sætning 3.4.3. Lad n være et positivt heltal.

Da er $\sqrt{n}$ et rationalt tal netop hvis n er et kvadrattal.

Bevis. Det er oplagt at hvis n er et kvadrattal, da er $\sqrt{n}$ et helt tal og altså rational. Antag at n ikke er et kvadrattal. Vi viser indirekte at $\sqrt{n}$ er irrational ved at antage det modsatte og nå frem til en modstrid. Antag derfor at $\sqrt{n}=\frac{a}{b}$, hvor a og b er hele tal. Dermed er

$$b^2 n = a^2$$

Betragt nu primfaktoropløsningen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Fordi n ikke er et kvadrattal, er mindst en af eksponenterne, lad os sige α_i, ulige da kvadrattallene netop er de positive hele tal hvor alle eksponenterne i primfaktoropløsningen er lige. Eksponenten til p_i på venstresiden $b^2 n$ er derfor ulige da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af kvadrattallet b^2 er lige, og lige plus ulige giver ulige. Eksponenten til p_i på højresiden a^2 er lige da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af kvadrattallet a^2 er lige. Dette er en modstrid da primfaktoropløsningen er entydig, og dermed er $\sqrt{n}$ et irrationalt tal. □

Opgave 3.4.2. Bevis sætning 3.4.2. *Hint*: 253

Sætning 3.4.4. Lad n og m være positive heltal.

Da er $\sqrt[m]{n}$ et rationalt tal netop hvis n er en m'te potens af et positivt heltal, dvs. netop hvis $n = a^m$ for et positivt heltal a.

Opgave 3.4.3. Bevis sætning 3.4.4.

Sætning 3.4.5. Lad a og b være to forskellige reelle tal.

Der er uendeligt mange rationale og uendeligt mange irrationale tal mellem a og b.

Bevis. Vi viser kun at der er et rationalt tal mellem a og b. Resten overlades til læseren i en opgave. Antag uden tab af generalitet at $a < b$. Lad n være et helt tal så $\frac{1}{n} < b-a$. Lad m være det mindste hele tal så $a < \frac{m}{n}$. Dermed er $\frac{m-1}{n} \leq a$. Nu må det rationale tal $\frac{m}{n}$ ligge mellem a og b da

$$a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b. \quad \square$$

Opgave 3.4.4. Bevis sætning 3.4.5.

Opgave 3.4.5. Lad a og b være rationale tal. Bevis at hvis $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ er et rationalt tal, eller $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ er et rationalt tal, da er $\sqrt{a}$ og $\sqrt{b}$ også rationale tal.

Opgave 3.4.6. For hvilke positive hele tal n og m gælder at $\sqrt{\frac{n}{m}}$ er et rationalt tal?

Opgave 3.4.7. Bestem alle ikke-negative hele tal a, b og c så

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{2014}.$$

(NMC 2014 opgave 2). *Hint*: 135

3.5 Summer

Definition af sumtegn

Når man skal angive en sum med mange led, som fx $1+2+3+\cdots+100$ eller $x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{57}$, bruger man ofte sumtegn $\sum$ og et indeks, fx i. Under sumtegnet skrives fra hvilket indeks summen starter, fx $i=1$, og over sumtegnet skrives sidste indeks. Her er nogle eksempler:

$$\sum_{n=1}^{100} n = 1+2+3+\cdots+100.$$

$$\sum_{i=1}^{57} x_i = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{57}.$$

$$\sum_{n=0}^{50}(2n+1) = 1+3+5+\cdots+101.$$

$$\sum_{k=11}^{35}\frac{1}{2k} = \frac{1}{22}+\frac{1}{24}+\frac{1}{26}+\cdots+\frac{1}{70}.$$

$$\sum_{n=1}^{99}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}.$$

$$\sum_{i=10}^{n} 10i = 100+110+120+\cdots+10n.$$

Sørg for at blive fortrolig med sumtegnet da du får brug for det i mange sammenhænge. I starten er det en god idé hver gang du ser et sumtegn, at skrive summen op som ovenfor.

Opgave 3.5.1. For hver af nedenstående summer skal du skrive summen op uden sumtegn for at få godt styr på sumtegnet.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{200} n^2$, b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{20}(6+3n)$, c) $\displaystyle\sum_{k=5}^{105}\frac{k+1}{k}$, d) $\displaystyle\sum_{a=10}^{199}\frac{1}{5a(5a+5)}$.

Opgave 3.5.2. For hver af nedenstående summer skal du skrive summen op med sumtegn for at få godt styr på sumtegnet.

a) $1+2+2^2+\cdots+2^{400}$.

b) $\displaystyle\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{101\cdot 104}$.

c) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4999}+\sqrt{5001}}$.

Definition af differensrække (aritmetisk progression)

En *differensrække* (også kaldet en *aritmetisk progression*) er en talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med den egenskab at differensen $a_{n+1}-a_n$ mellem ethvert af følgens tal og det foregående er en konstant d kaldet *differensen*.

Fx er $7, 10, 13, 16, 19, \ldots$ en differensrække med differens $d=3$.

Sætning 3.5.1. Summen af de første n led i differensrækken $a_1, a_2, a_3\ldots$ med differens d er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = na_1 + d\frac{(n-1)n}{2}.$$

Opgave 3.5.3. Bevis sætning 3.5.1, og udregn summen af de 333 første led i differensrækken $2, 5, 8, \ldots$

Definition af kvotientrække (geometrisk progression)

En *kvotientrække* (også kaldet en *geometrisk progression*) er en talfølge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med den egenskab at kvotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mellem ethvert af rækkens tal og det foregående er et fast tal q kaldet *kvotienten*.

Fx er $16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ en kvotientrække med kvotient $q=\frac{1}{2}$.

Sætning 3.5.2. Summen af de første n led i kvotientrækken $a_1, a_2, a_3\ldots$ med kvotient q er

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Opgave 3.5.4. Bevis sætning 3.5.2, og udregn summen af de første 11 led i kvotientrækken $1, 2, 4, 8, \ldots$. *Hint*: 126

Eksempel 3.5.1. Teleskopsummer

Det kan umiddelbart se svært ud at beregne summen

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

Ved en simpel omskrivning bliver det helt ligetil fordi vi kan få næsten alle led til at gå ud med hinanden. Bemærk først at for reelle tal n og m som ikke er nul, og hvor $n \neq m$, er

$$\frac{1}{nm} = \frac{1}{m-n} \cdot \frac{m-n}{nm} = \frac{1}{m-n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Specielt er

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Vores sum fra før kan nu omskrives til

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}.$$

Dette kaldes en *teleskopsum* fordi summen kan *foldes sammen* ligesom et teleskop.

Opgave 3.5.5. Udregn følgende summer

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{2k(2k+2)}$.

b) $\displaystyle\sum_{a=10}^{199} \frac{1}{5a(5a+5)}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{50} \frac{3}{n^2-1}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{1000} \frac{3}{n^2+3n+2}$.

Opgave 3.5.6. Lad $a_1, a_2, a_3\ldots$ være en differensrække med differens d. Udregn summen

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i \cdot a_{i+1}}$$

udtrykt ved a_1, d og n.

Bemærkning. Det er et standardtrick der virkelig er værd at huske, at hvis der står $\sqrt{n} \pm \sqrt{m}$ i nævneren hvor $n \neq m$, så forlænges brøken med $\sqrt{n} \mp \sqrt{m}$ fordi det giver $n - m$ i nævneren ifølge tredje kvadratsætning:

$$\frac{1}{\sqrt{n} \pm \sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{n} \pm \sqrt{m}} \cdot \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{m}}{\sqrt{n} \mp \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{m}}{n-m}.$$

Læg mærke til hvordan det benyttes i næste eksempel, og skriv det bag øret til de næste opgaver.

Eksempel 3.5.2. Flere teleskopsummer

For at udregne summen

$$\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$$

bruger vi tricket med at forlænge brøken med $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, fordi der står $\sqrt{k+1}+\sqrt{k}$ i nævneren:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}\\ &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(k+1)-k} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}.\end{aligned}$$

Nu kan vi nemt omskrive summen

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} &= \sum_{i=1}^{80}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{81}-\sqrt{80})\\ &= -\sqrt{1}+\sqrt{81} = 8.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.7. Vis at

$$\sum_{k=1}^{132} \frac{1}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}} = 6.$$

Opgave 3.5.8. Vis at

$$\sum_{k=1}^{5000} \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} > 49.$$

Opgave 3.5.9. Vis at

$$\sum_{k=0}^{43} \frac{1}{\sqrt{10k+1}+\sqrt{10k+6}} > 2.$$

Hint: 28

I de næste opgaver skal du omskrive til en teleskopsum ved at lave nogle smarte omskrivninger. De er lidt mere udfordrende end de tidligere. Husk at for et positivt helt tal n er $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$.

Opgave 3.5.10. Vis at

$$\sum_{n=1}^{100} n!\cdot n = 101!-1.$$

Hint: 159

Opgave 3.5.11. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Hint: 164

Opgave 3.5.12. Vis (uden brug af induktion) at

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

Hint: 203

Opgave 3.5.13. Vis at

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}} < \sqrt{2}$$

for alle positive hele tal $n \geq 2$.

3.6 Rekursive følger

En *rekursiv følge* er en følge af tal hvor det næste tal i følgen er bestemt ud fra de foregående. En af de mest berømte rekursive følger er følgen af *Fibonaccital* $1,1,2,3,5,8,13,21,\dots$ hvor det næste i tal i følgen er summen af de to foregående. Nogle gange er det muligt at finde en lukket formel for det n'te tal i følgen, dvs. en formel hvor man kan udregne tallet udelukkende ved at vide at det er det n'te tal. Det kan man fx med Fibonaccitallene.

Her skal vi se på rekursive følger hvor det ofte er en god idé at lave en ny rekursiv følge som det er nemmere at håndtere, og nogle gange kan vi også finde en lukket formel for det n'te tal i rækken.

Eksempel 3.6.1. Omskriv til en anden følge

Lad a_0 være et positivt reelt tal, og lad

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\sqrt{1+2020a_{n-1}^2}} \quad \text{for } n = 1,2,\dots,2020.$$

Vis at $a_{2020} < \dfrac{1}{2020}$. (Baltic Way 2020)

Rekursionsformlen indeholder kvadratrødder, og for at få en uden ser vi i første omgang i stedet på følgen $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2020}$ givet ved $b_n = a_n^2$. For denne følge er $b_0 = a_0^2$ og

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1+2020b_{n-1}} \quad \text{for } n = 1,2,\dots,2020.$$

Nu kan vi yderligere se at følgen bliver endnu simplere at beskrive hvis vi i stedet betragter følgen $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2020}$ hvor $c_n = \dfrac{1}{b_n}$, dvs. $c_0 = \dfrac{1}{b_0} = \dfrac{1}{a_0^2}$ og

$$c_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1+2020b_{n-1}}{b_{n-1}} = 2020 + c_{n-1} \quad \text{for } n = 1,2,\dots,2020.$$

Følgen er altså en differenrække, og her er det nemt at bestemme en lukket formel for c_n og dermed specielt bestemme $c_{2020} = 2020^2 + c_0$.

Nu kan vi vurdere a_{2020}:

$$a_{2020} = \frac{1}{\sqrt{c_{2020}}} = \frac{1}{\sqrt{2020^2 + \frac{1}{a_0^2}}} < \frac{1}{2020}$$

som ønsket.

Opgave 3.6.1. Følgen af reelle tal $a_1, a_2, a_3, \dots$ konstrueres ud fra et givent a_1 på følgende måde: $a_{n+1} = a_n(a_n+2)$ for alle positive heltal n. Bestem samtlige reelle tal som a_{1001} kan antage når du frit må vælge a_1.

Opgave 3.6.2. En følge $a_1, a_2, a_3, \dots$ af reelle tal er bestemt ved $a_1 = 1$ og

$$a_{n+1} = \frac{1}{2019 + \frac{1}{a_n}}, \quad n \geq 1.$$

Udregn summen $S = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots a_{2019}a_{2020}$. *Hint*: 134

Opgave 3.6.3. Lad $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ og $b_0, b_1 \dots, b_{2019}$ være reelle tal forskellige fra 0 som opfylder at $b_n = \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) b_{n-1}$ for $n = 1, \dots, 2019$. Antag at summen

$$S = \frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}b_{2019}}$$

er et irrationalt tal. Vis at b_0 og b_{2019} ikke begge kan være rationale tal. *Hint*: 150

Opgave 3.6.4. En følge $a_1, a_2, a_3, \dots$ er bestemt ved $a_1 = 10^6$ og

$$a_{n+1} = n\left\lfloor \frac{a_n}{n} \right\rfloor + n \quad \text{for } n \geq 1.$$

Vis at der findes en delfølge $b_1, b_2, b_3, \dots$ af $a_1, a_2, a_3, \dots$ så $b_1, b_2, b_3, \dots$ er en differensrække. (At $b_1, b_2, b_3, \dots$ er en *delfølge* af $a_1, a_2, a_3, \dots$ betyder at følgen består af udvalgte tal fra følgen $a_1, a_2, a_3, \dots$ placeret i samme rækkefølge som i $a_1, a_2, a_3, \dots$.) *Hint*: 238

Opgave 3.6.5. En følge $x_1, x_2, x_3, \dots$ af reelle tal som ikke er nul, opfylder at

$$x_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2} - x_{n-1}}, \quad n \geq 3.$$

a) Bestem alle de værdier af x_1 og x_2 for hvilke uendeligt mange af tallene i følgen er hele tal. *Hint*: 39

b) Vis at det for alle positive hele tal n er muligt at vælge x_1 og x_2 så følgen indeholder n *forskellige* hele tal. *Hint*: 178

3.7 Ligninger - monotoni og vurderinger af de variable

Vi har allerede set på flere metoder man kan bruge når man løser ligninger og ligningssystemer, nemlig omskrivning til kvadrat, omskrivning til andengradsligning og substitution. Her vil vi se på mere komplicerede ligninger og ligningssystemer der kræver at man kombinerer disse metoder med viden om funktioners monotoniforhold.

Vi går ikke her ind i teorien om monotoniforhold, men bygger på at man allerede kan vurdere om forholdsvis simple funktioner er voksende eller aftagende i et interval.

Eksempel 3.7.1. Vurdering af antallet af løsninger

Vi ønsker at bestemme alle reelle tal x der opfylder

$$\sqrt{3-\sqrt{x+3}}=x$$

Ligningen har oplagt løsningen $x=1$.

For at undersøge om der findes andre løsninger, er det en god ide at se på monotoniforhold for funktionerne

$$f(x)=\sqrt{3-\sqrt{x+3}} \quad \text{og} \quad g(x)=x.$$

Det er oplagt at g er en voksende funktion af x. Funktionen f er en aftagende funktion af x da $\sqrt{x+3}$ er voksende, hvilket betyder at $3-\sqrt{x+3}$ er aftagende, og dermed at $\sqrt{3-\sqrt{x+3}}$ er aftagende.

Da f er aftagende, og g er voksende, har ligningen maksimalt en løsning, og den har vi allerede fundet. Den eneste løsning til ligningen er altså $x=1$.

Opgave 3.7.1. Bestem alle reelle tal x så

$$5=\sqrt{x+\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+7}.$$

Eksempel 3.7.2. Skjult andengradsligning og monotoni

Som vi tidligere har set, kan nogle ligninger omskrives til en andengradsligning i en ny variabel og derefter løses. I dette eksempel vil vi bestemme alle reelle tal x som opfylder at

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+\left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x=14.$$

Dette er ikke en andengradsligning i x, men hvis vi omskriver, kan vi opnå en andengradsligning i en anden variabel. Bemærk først at

$$\sqrt{7+\sqrt{48}}\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{49-48}=1.$$

Ved at gange på begge sider med $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x$ får vi andengradsligningen

$$\left(\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x\right)^2-14\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x+1=0.$$

Løsningsformlen for andengradsligningen fra sætning 3.2.1 giver

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x=\frac{14\pm\sqrt{192}}{2}=7\pm\sqrt{48}.$$

Nu kan vi som i eksemplet før vurdere antallet af løsninger. Da $f(x)=\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x$ er en aftagende funktion, fordi $0<7-\sqrt{48}<1$, er der samlet højst to løsninger. Det er let at se at $x=\pm 2$ løser ligningen, fordi $\left(7-\sqrt{48}\right)^{-1}=7+\sqrt{48}$. Dermed er $x=\pm 2$ de eneste løsninger til ligningen.

Opgave 3.7.2. Bestem alle reelle tal x så

$$3^{2+x}+3^{2-x}=82.$$

Opgave 3.7.3. Bestem alle reelle tal x så

$$8(4^x+4^{-x})-54(2^x+2^{-x})+101=0.$$

Eksempel 3.7.3. Vurdering af de ubekendte

Når man skal vise at et ligningssystemet *ikke* har nogen reelle løsninger, er det ofte en god idé at antage at der er en løsning, og vise at det leder til en modstrid. Modstriden kan i en del tilfælde opnås ved at vurdere de ubekendte.

Antag at ligningssystemet

$$y = \sqrt{x + \sqrt{1-x}} \quad \text{og} \quad x = \sqrt{y - \sqrt{1+y}}$$

har mindst én reel løsning x og y. Da må $0 \le y$ og $0 \le x \le 1$. Ved at udnytte at $0 \le x \le 1$, får vi

$$y = \sqrt{x + \sqrt{1-x}} \le \sqrt{x+1} \le \sqrt{2}.$$

Da vi ikke kan have lighedstegn i begge uligheder samtidig, må $y < \sqrt{2}$. Af ligningen

$$x = \sqrt{y - \sqrt{1+y}}$$

ses at $y \ge \sqrt{y+1}$, hvilket betyder at $y \ge 1$, og dermed at

$$y \ge \sqrt{y+1} \ge \sqrt{2},$$

hvilket er en modstrid. Altså har ligningssystemet ingen reelle løsninger.

Metoden med at vurdere størrelsen af de ubekendte kan også benyttes til ligninger og ligningssystemer der *har* løsninger. Her kan man fx indskrænke de intervaller løsningerne kan ligge i, og udnytte det til at bestemme samtlige løsninger.

Eksempel 3.7.4. Substitution og vurdering af antal løsninger

Nu ser vi på et ligningssystem hvor der er tre ubekendte og tre udtryk som er lig hinanden. Vi ønsker at bestemme alle tripler (x, y, z) af forskellige reelle tal som opfylder

$$x(y+1) = y(z+1) = z(x+1).$$

Bemærk først at hvis en af de tre ubekendte er 0, da må de to andre også være 0. Det samme er tilfældet med -1, og dermed findes ingen løsninger hvor 0 eller -1 indgår, da x, y og z skal være forskellige.

Da vi i denne ligning har tre ubekendte og tre udtryk som er lig hinanden, ønsker vi at reducere antallet af ligninger og ubekendte som vi skal arbejde med. Først indfører vi alligevel en ny størrelse k:

$$k = x(y+1) = y(z+1) = z(x+1).$$

Vi vil nu reducere til en ligning hvor kun k og x indgår vha. substitution. Da $z = \frac{k}{x+1}$ og $y = \frac{k}{x} - 1 = \frac{k-x}{x}$, substituerer vi z og y med de fundne udtryk i ligningen $k = y(z+1)$ for at få en ligning der kun indeholder x og k.

$$k = y(z+1) = \left(\frac{k-x}{x}\right)\left(\frac{k+x+1}{x+1}\right).$$

En omskrivning af ligningen giver

$$k(x^2+x) = k^2 - x^2 + k - x = k(k+1) - (x^2+x) \Leftrightarrow (k+1)(x^2+x-k) = 0,$$

dvs. at $k = -1$ eller $x^2 + x = k$. Antag at $k = -1$. Dette giver triplerne

$$\left(x, \frac{-1-x}{x}, \frac{-1}{x+1}\right),$$

hvor $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Disse er alle løsninger og består af tre forskellige tal.

Antag i stedet at $k \ne -1$, dvs. at $x^2 + x = k$. Af symmetrigrunde må y og z også opfylde denne ligning, men da den højst har to løsninger, kan de ikke alle tre være forskellige. Dermed er samtlige løsninger

$$\left(x, \frac{-1}{x} - 1, \frac{-1}{x+1}\right), \quad \text{hvor } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}.$$

Opgave 3.7.4. Bestem alle reelle tal x, y og z som opfylder ligningssystemet

$$\frac{4x^2}{1+4x^2}=y, \quad \frac{4y^2}{1+4y^2}=z, \quad \frac{4z^2}{1+4z^2}=x.$$

Hint: 154

Opgave 3.7.5. Bestem alle tripler (x, y, z) af ikke-negative reelle tal som opfylder følgende ligningssystem:

$$x^2-y=(z-1)^2, \quad y^2-z=(x-1)^2, \quad z^2-x=(y-1)^2.$$

Hint: 187

Opgave 3.7.6. Løs for alle reelle x, y og z ligningssystemet

$$x^2+x-1=y, \qquad y^2+y-1=z, \qquad z^2+z-1=x.$$

Hint: 66

Opgave 3.7.7. Bestem antallet af reelle løsninger til ligningen

$$0=x^8-x^7+2x^6-2x^5+3x^4-3x^3+4x^2-4x+\frac{5}{2}.$$

(NMC 2001) *Hint*: 202

Opgave 3.7.8. De reelle tal x, y og z er ikke alle ens, og de opfylder at

$$x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k.$$

Bestem samtlige mulige værdier af k. (NMC 2006) *Hint*: 188

3.8 Introduktion til funktionalligninger

En funktionalligning er en ligning hvor den ubekendte er en funktion. Man løser en funktionalligning ved at bestemme samtlige funktioner der løser ligningen.

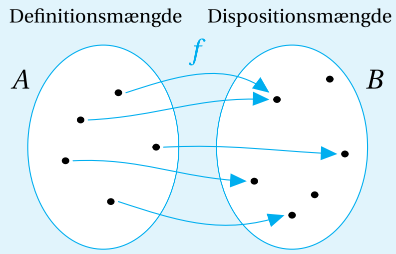
Inden vi ser på funktionalligninger, skal vi lige have lidt bedre styr på funktioner og de begreber vi benytter om funktioner.

Definition af funktion, definitionsmængde, dispositionsmængde og værdimængde

En *funktion* fra *definitionsmængden* A til *dispositionsmængden* B er en regel der til hvert eneste element i definitionsmængden A knytter netop ét element i dispositionsmængden B. Med symboler skriver vi:

$$f: A \to B.$$

Vi kan også illustrere det grafisk:



Værdimængden er alle de elementer i dispositionsmængden som bliver ramt.

Ofte angiver vi funktioner ved en forskrift, fx funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med forskriften $f(x)=x^2$. Dette angiver at definitionsmængden og dispositionsmængden begge er de reelle tal, og at vi for hvert eneste x i definitionsmængden knytter tallet x^2 i dispositionsmængden. Dette tal kaldes også *funktionsværdien* af x. I dette eksempel er værdimængden alle ikke-negative reelle tal da det netop er dem der bliver ramt.

Nu er vi klar til at se på funktionalligninger. For at give et billede af hvordan man kan bestemme løsningerne til en funktionalligning, ser vi på et eksempel.

Eksempel 3.8.1. Løsning af funktionalligning
Vi ønsker at bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(x+yf(x)\big)=f\big(xf(y)\big)-x+f\big(y+f(x)\big)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}$.

For at få information om de funktioner der er løsning til ligningen, prøver vi at indsætte forskellige værdier af x og y.

Først indsætter vi $x=y=0$:

$$f(0)=f(0)+f\big(f(0)\big).$$

Vi kan altså konkludere at $f\big(f(0)\big)=0$.

Så indsætter vi $x=y=1$:

$$f\big(1+f(1)\big)=f\big(f(1)\big)-1+f\big(1+f(1)\big).$$

Altså er $f\big(f(1)\big)=1$. På den måde fortsætter vi med at samle oplysninger om f og kombinerer dem også med tidligere oplysninger.

Hvis vi indsætter $x=1$ og $y=0$, får vi

$$f(1)=f\big(f(0)\big)-1+f\big(f(1)\big)=0-1+1=0.$$

Altså er $f(1)=0$. Da $f(1)=0$ og $f\big(f(1)\big)=1$, er $f(0)=f\big(f(1)\big)=1$. Nu har vi fundet to funktionsværdier.

Da vi ikke kun vil finde én funktionsværdi ad gangen, indsætter vi nu kun én værdi for en af de to variable for på den måde at nå frem til noget mere generelt.

Indsæt $x=1$:

$$\begin{aligned}f\big(1+yf(1)\big)&=f\big(f(y)\big)-1+f\big(y-f(1)\big)\\ 0&=f\big(f(y)\big)-1+f(y).\end{aligned}$$

Altså er $f\big(f(x)\big)=1-f(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

Nu indsætter vi $y=0$:

$$\begin{aligned}f(x)&=f\big(xf(0)\big)-x+\big(f(x)\big)\\ f(x)&=f(x)-x+f\big(f(x)\big).\end{aligned}$$

Altså er $f\big(f(x)\big)=x$ for alle $x\in\mathbb{R}$. Sammen med $f\big(f(x)\big)=1-f(x)$ giver det at $f(x)=1-x$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

Det vi nu har vist, er at hvis der er en løsning, så er den $f(x)=1-x$. Der er altså højst én løsning til funktionalligningen. For at tjekke om $f(x)=1-x$ faktisk løser ligningen, indsætter vi først funktionsudtrykket på venstresiden:

$$f\big(x+yf(x)\big)=f\big(x+y(1-x)\big)=1-x-y+xy.$$

Derefter på højresiden:

$$\begin{aligned}f\big(xf(y)\big)-x+f\big(y+f(x)\big)&=f\big(x(1-y)\big)-x+f(y+1-x)\\ &=(1-x+xy)-x+(1-y-1+x)\\ &=1-x-y+xy.\end{aligned}$$

Dette viser at $f(x)=1-x$ løser ligningen, og vi ved at det er eneste løsning.

Nogle funktionalligninger har flere løsninger, fx uendeligt mange, mens andre ikke har løsninger.

Bemærkning. Løsning af opgaver om funktionalligninger falder altid i to dele:

Vise at der ikke findes andre løsninger end .... Dette er den svære del!

Undersøge om de mulige løsninger du har fundet, faktisk er løsninger. Dette er ofte nemt, eller i værste fald lidt bøvlet, men det er en vigtig del af løsningen.

Opgave 3.8.1. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+y)=yf(x)+f(x)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Opgave 3.8.2. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ så

$$f(x)f(y)-f(xy)=x+y$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 3.8.3. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(xy+f(xy)\big)=2xf(y)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}$. *Hint*: 26

Det er ikke altid at man bliver bedt om at løse funktionalligninger. Nogle gange skal man blot finde bestemte egenskaber ved funktionen.

Opgave 3.8.4. Lad $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ være en funktion så

$$f\big(f(x)\big)=x^2-x+1$$

for alle reelle tal x. Bestem $f(0)$. (Baltic Way 2011) *Hint*: 78

Opgave 3.8.5. Vis at der ikke findes nogen funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(f(x)\big)=xf(x)+2x$$

for alle $x\in\mathbb{R}$, sådan at der findes et reelt tal a med $f(a)=-2$. *Hint*: 123

3.9 Funktionalligninger med funktioner defineret på de hele tal

Når funktionerne er defineret på de hele tal eller en delmængde af de hele tal, har man ofte mulighed for at bruge induktion, hvilket vi skal se nærmere på.

Eksempel 3.9.1. Induktion

Hvis vi skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ som opfylder at

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

for alle $x,y\in\mathbb{Z}$, er det en god idé først at prøve sig lidt frem ved at indsætte forskellige værdier for x og y som vi gjorde før. Først indsætter vi $x=y=0$ i funktionalligningen og får

$$f(0)+f(0)=2f(0)+2f(0).$$

Altså er $f(0)=0$. Herefter prøver vi at indsætte $x=y=1$ og får

$$f(2)+f(0)=2f(1)+2f(1),$$

dvs. $f(2)=4f(1)$. Hvis man fortsat prøver sig lidt frem med at indsætte små værdier af x og y, ser man hurtigt at $f(3)=9f(1)$, $f(4)=16f(1)$ og $f(5)=25f(1)$. Det ligner et mønster hvor $f(n)=n^2f(1)$ for alle positive heltal n. Vi prøver ved induktion at teste om denne formodning er rigtig.

Sæt $f(1)=a$. Påstanden om at f(n) $=n^2a$ for alle positive heltal n er sand for $n=1$ og $n=2$. Antag at påstanden er sand for alle $1\le n\le N$. Ved at indsætte $x=N$ og $y=1$ fås

$$f(N+1)=2f(N)+2f(1)-f(N-1)=\big(2N^2+2-(N-1)^2\big)a=(N+1)^2a,$$

hvilket fuldfører induktionsskridtet. Vi har nu vist at $f(n)=n^2a$ for alle $n\in\mathbb{N}$, dvs. vi har fundet funktionsværdierne for alle de positive tal udtrykt ved $f(1)$. Nu mangler vi kun at finde funktionsværdierne af alle de negative tal. Ved at indsætte $x=0$ fås $f(y)=f(-y)$. Altså er $f(n)=n^2a$ for alle $n\in\mathbb{Z}$.

Det vi har vist indtil nu, er kun at hvis der er løsninger til funktionalligningen, da er de på formen $f(n) = n^2 a$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Nu tester vi om disse funktioner rent faktisk er løsninger:

$$f(x+y)+f(x-y)=(x+y)^2a+(x-y)^2a=2x^2a+2y^2a \quad \text{og}$$
$$2f(x)+2f(y)=2x^2a+2y^2a.$$

Altså er løsningerne alle funktioner $f(n)=n^2a$, $a\in\mathbb{Z}$.

Eksempel 3.9.2. Smart indsættelse

I dette eksempel skal vi se på en funktionalligning hvor der viser sig ikke at være nogen løsninger. Vi ønsker at bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder

$$f\big(f(n)\big)=n+1 \qquad \text{for alle } n\in\mathbb{N}.$$

For at udnytte at funktionalligningen indeholder $f\big(f(n)\big)$, er det ofte en god idé at erstatte n med $f(n)$. Det giver nemlig:

$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big)=f(n)+1.$$

Det ser umiddelbart mere grimt ud, men det smarte er at $f\Big(f\big(f(n)\big)\Big)$ også fremkommer hvis vi tager f på begge sider i den oprindelige ligning:

$$f\Big(f\big(f(n)\big)\Big)=f(n+1).$$

Samlet giver det at $f(n+1)=f(n)+1$ for alle $n>1$. Funktionsværdierne vokser altså med 1 når n vokser med 1, dvs. at $f(n)=n-1+f(1)$ for alle $n\in\mathbb{N}$. Vi tjekker nu for hvilke værdier af $f(1)$ at dette er en løsning:

$$n+1=f\big(f(n)\big)=f\big(n-1+f(1)\big)=n-1+f(1)-1+f(1),$$

og altså $3=2f(1)$. Dette er umuligt da $f(1)\in\mathbb{N}$. Der er derfor ingen løsninger til ligningen.

Opgave 3.9.1. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ hvor $f(1)=2$, og som opfylder at

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+1$$

for alle $x\in\mathbb{N}$.

Opgave 3.9.2. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ hvor $f(1)=2$ og $f(3)=5$, og som opfylder at

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+2$$

for alle $x\in\mathbb{N}$.

Opgave 3.9.3. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ hvor $f(2011)=1$, og som opfylder at

$$f(x)f(y)=f(x-y)$$

for alle $x,y\in\mathbb{Z}$.

Opgave 3.9.4. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder at

$$f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2+2$$

for alle $x,y\in\mathbb{N}$ hvor $x>y$.

Opgave 3.9.5. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$ hvor $f(1)=0$, og hvor der for alle $x\in\mathbb{N}$ gælder at

$$f(2x)=2f(x)+1 \quad \text{og} \quad f(2x+1)=2f(x).$$

3.10 Funktionalligninger

I forrige afsnit så vi på funktionalligninger hvor funktionerne var defineret på de hele tal, og det gav mulighed for induktion. Nu udvider vi og ser igen på funktionalligninger med funktioner defineret på de reelle tal eller en delmængde af de reelle tal. Denne delmængde kan selvfølgelig godt bare indeholde hele tal.

Det er stadig en god idé at sætte forskellige værdier af de variable ind, men vi skal udvide vores repertoire af løsningsstrategier.

Eksempel 3.10.1. Substitution

Når man skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x)+xf(1-x)=x^2+1 \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R},$$

er det interessant at man ved at substituere x med $1-x$ får endnu en ligning

$$f(1-x)+(1-x)f(x)=(1-x)^2+1=x^2-2x+2$$

hvor funktionsværdierne $f(x)$ og $f(1-x)$ indgår. Hvis vi ganger denne ligning med x og trækker den fra den oprindelige ligning, får vi

$$f(x)-x(1-x)f(x)=-x^3+3x^2-2x+1$$

og dermed

$$f(x)(x^2-x+1)=-x^3+3x^2-2x+1.$$

Da $x^2-x+1>0$ for alle x, er

$$f(x)=\frac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1} \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R}$$

eneste mulige løsning.

Ved indsættelse ses at denne funktion opfylder betingelserne:

$$\begin{aligned} f(x)+xf(1-x)&=\frac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1}+x\frac{-(1-x)^3+3(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^2-(1-x)+1}\\ &=\frac{-x^3+3x^2-2x+1+x(x^3-x+1)}{x^2-x+1}\\ &=\frac{x^4-x^3+2x^2-x+1}{x^2-x+1}=x^2+1. \end{aligned}$$

Opgave 3.10.1. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(3-x)+2f(x)=x \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R}.$$

Opgave 3.10.2. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\backslash\{0,1\}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R}.$$

Eksempel 3.10.2. Symmetri

I nogle funktionalligninger er det interessant at se om der er en form for symmetri. Hvis man fx skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+y)-f(y)=x^2+2xy \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R},$$

er det vigtigt at lægge mærke til at $f(x+y)$ er symmetrisk i x og y. Dette giver nemligt at

$$x^2+2xy+f(y)=y^2+2xy+f(x),$$

og altså $f(x)-x^2=f(y)-y^2$ for alle $x,y\in\mathbb{R}$. Dette viser at $f(x)-x^2$ er konstant, og derfor at løsningerne skal findes blandt funktionerne $f(x)=x^2+a$. Ved indsættelse ses at $f(x)=x^2+a$ løser ligningen for alle reelle tal a.

Opgave 3.10.3. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ som opfylder at

$$f(xy)\cdot f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=f(x)+y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Opgave 3.10.4. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

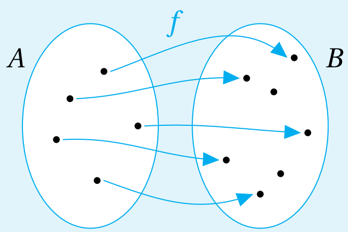
$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Inden vi ser på næste teknik, har vi brug for begreberne injektiv, surjektiv og bijektiv.

Definition af injektiv, surjektiv og bijektiv

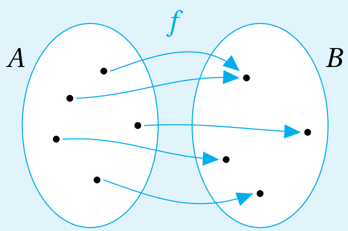
En funktion $f:A\to B$ er *injektiv* hvis det for alle $x,y\in A$ gælder at $f(x)=f(y)$ medfører at $x=y$. Det vil sige at to elementer i definitionsmængden ikke rammer det samme element i dispositionsmængden.

Injektiv:



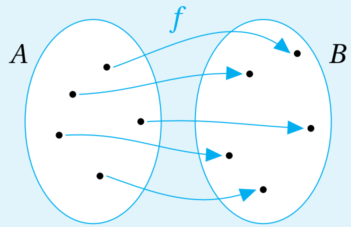
En funktion $f:A\to B$ er *surjektiv* hvis der for hvert $y\in B$ findes et $x\in A$ så $f(x)=y$. Det vil sige at alle elementer i dispositionsmængden rammes, og dermed at værdimængden er lig med dispositionsmængden.

Surjektiv:



En funktion kaldes *bijektiv* hvis den både er injektiv og surjektiv. Det vil sige at funktionen angiver en parring af elementerne i definitionsmængden og elementerne i dispositionsmængden.

Bijektiv:



Når man løser funktionalligninger, kan det være en god idé at overveje om en løsning er injektiv, surjektiv eller bijektiv. Hvis man fx ved at funktionsværdierne af to udtryk er identiske, da må selve udtrykkene også være identiske hvis funktionen er injektiv. Andre gange har man brug for at vide at der findes et x med en bestemt funktionsværdi, fordi det fx kan være interessant at indsætte sådan en værdi, dvs. man har brug for at funktionen er surjektiv. Nu skal vi se på et eksempel hvor man kan udnytte injektivitet.

Eksempel 3.10.3. Injektiv

Hvis vi skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(xy-f(x)\big)=x-y+f(y) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R},$$

kan man ret hurtigt se at en løsning må være injektiv: Hvis $f(x)=f(y)$, er nemlig

$$x-y=f\big(xy-f(x)\big)-f(y)=f\big(yx-f(y)\big)-f(x)=y-x,$$

og dermed $2x=2y$, dvs. $x=y$. For at kunne udnytte injektivitetsegenskaben vil vi gerne have to funktionsværdier som er identiske. Ved at sætte $x=y$ får vi $f\big(x^2-f(x)\big)=f(x)$, og dermed $x^2-f(x)=x$. Dvs. den eneste mulige løsning er $f(x)=x^2-x$. Ved indsættelse ses at denne funktion ikke løser ligningen; der er altså ingen løsninger.

Opgave 3.10.5. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$3x+f(2x+2y-f(x))=3y+f(y) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Hint: 208

Opgave 3.10.6. En funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ opfylder at

$$4f(f(x))=2f(x)+x$$

for alle reelle tal x. Vis at $f(x)=0$ netop når $x=0$. *Hint*: 94

Opgave 3.10.7. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ hvor $f(0)=1$, og som opfylder at

$$f\big(f(n)\big)=f\big(f(n+2)+2\big)=n$$

for alle $n\in\mathbb{Z}$. *Hint*: 260

Opgave 3.10.8. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ så

$$f(xf(y)+x)=xy+f(x) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Hint: 224

De resterende opgaver er blandede opgaver hvor man skal bruge en blanding af alt muligt.

Opgave 3.10.9. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f\big(x-f(y)\big)=1-x-y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Opgave 3.10.10. Bestem alle reelle tal a for hvilke der findes et reelt tal b og en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at $f(b)=0$ og

$$f\big(f(x)\big)=xf(x)+a$$

for alle $x\in\mathbb{R}$.

Opgave 3.10.11. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder

$$f(x)f(y)=f(xy+x)+3f(x+y)+y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Opgave 3.10.12. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Opgave 3.10.13. Lad $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ være en funktion som opfylder at $f(1)=1995$ og

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$$

for alle hele tal $n>1$. Bestem $f(1995)$.

Opgave 3.10.14. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ så

$$f\big(f(x)^2+f(y)\big)=xf(x)+y$$

for alle reelle tal x og y.

Opgave 3.10.15. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder

$$f(m+n)f(m-n)=f(m^2)$$

for alle $m,n\in\mathbb{N}$ hvor $m>n$. *Hint*: 132

Opgave 3.10.16. Bestem alle injektive funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ så

$$f(f(n))\le\frac{n+f(n)}{2} \quad \text{for alle } n\in\mathbb{N}.$$

Hint: 95

Opgave 3.10.17. Funktionen $f:[0;1]\to\mathbb{R}_+$ opfylder at $f(1)=1$ og at

$$f(x+y)\ge f(x)+f(y)$$

for alle $x,y\in[0;1]$. Vis at $f(x)\le 2x$ for alle $x\in[0;1]$. *Hint*: 214

Opgave 3.10.18. En funktion $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ opfylder at der findes mindst ét $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ så $f(x)=\frac{1}{2}$, og at

$$f(x)-f(y)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)f(y)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bestem $f(-1)$. *Hint*: 7

3.11 Grundlæggende uligheder

Nogle af de mest basale uligheder handler om forholdet mellem det *aritmetiske* gennemsnit, det *geometriske* gennemsnit, det *harmoniske* gennemsnit og det *kvadratiske* gennemsnit, derfor skal vi først have styr på disse gennemsnit.

Definition af det aritmetiske gennemsnit

Det *aritmetiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Definition af det geometriske gennemsnit

Det *geometriske gennemsnit* af n ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Definition af det harmoniske gennemsnit

Det *harmoniske gennemsnit* af n positive reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Definition af det kvadratiske gennemsnit

Det *kvadratiske gennemsnit* af n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}.$$

Sætning 3.11.1. For positive reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gælder at

$$Q \geq A \geq G \geq H$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Bemærk at $Q \geq A$ ikke kræver at $x_1, x_2, \ldots x_n$ er positive.

Bevis for ulighederne i tilfældet $n = 2$. Inden vi viser sætningerne generelt, ser vi på tilfældet $n = 2$. I dette tilfælde ser AG-uligheden sådan ud

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2},$$

hvor x_1 og x_2 er positive reelle tal. Den kan vi som tidligere vist bevises ved at omskrive til kvadrat. Dette giver

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 \geq 4 x_1 x_2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)^2 \geq 0,$$

med lighedstegn netop når $x_1 = x_2$. Vi overlader beviset for de to andre uligheder til læseren. □

Opgave 3.11.1. Bevis at $Q \geq A$ og $G \geq H$ for $n = 2$.

Nu beviser vi ulighederne generelt. Beviserne er tekniske, og man kan godt løse opgaver uden at have læst dem.

Bevis for *QA*-uligheden. Omskriv uligheden

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ved at først at kvadrere og derefter omskrive til

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \cdots x_n)^2.$$

Nu udregnes højresiden

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_i x_j,$$

dvs. vi har omformet QA-uligheden til

$$(n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_i x_j.$$

Når der under sumtegnet står $1 \leq i < j \leq n$, betyder det at vi summerer over alle hele tal i og j som opfylder at $1 \leq i < j \leq n$.

På venstresiden står nu en masse kvadrater og på højresiden en masse dobbelte produkter, og derfor ser vi om det er muligt at omskrive uligheden til en sum af kvadrater som er større end eller lig med 0:

$$\begin{aligned} Q \geq A \quad &\Leftrightarrow \quad (n-1)(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_i x_j \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i^2 + x_j^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n} 2x_i x_j \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dette viser at QA-uligheden er sand, og at der gælder lighedstegn netop når $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. □

Bevis for *AG*-uligheden. Man kan bevise AG-uligheden på flere forskellige måder, men her benytter vi et induktionsbevis. Det interessante i dette bevis er at induktionsskridtet udføres på utraditionel vis. Vi har allerede vist den i tilfældet $n = 2$. Hvis man forsøger at vise at hvis AG-uligheden er sand for n da er den også sand for $n+1$, bliver det meget kompliceret. Det er imidlertid væsentlig lettere at vise at hvis AG-uligheden er sand for n da er den også sand for $2n$ og for $n-1$, og med disse to induktionsskridt kan vi få alle dominobrikkerne til at vælte.

Vi har allerede vist AG-uligheden for $n = 2$. Antag at

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

for vilkårlige ikke-negative reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Først viser vi at denne antagelse medfører at uligheden er sand for $2n$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ være ikke-negative reelle tal. Ifølge antagelsen er

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}.$$

Ved at benytte AG-uligheden for $n = 2$ for de to tal på højresiden i ovenstående ulighed får vi

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} + \frac{x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{2n}}{n}}{2} &\geq \frac{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} + \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}{2} \\ &\geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}\, \sqrt[n]{x_{n+1} x_{n+2} \cdots x_{2n}}}, \end{aligned}$$

hvilket netop er

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1 x_2 \cdots x_{2n}}.$$

Nu viser vi at vores antagelse også medfører at uligheden er sand for $n-1$. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ være ikke-negative reelle tal, og sæt $x_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$. Ifølge antagelsen er

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{n} &\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}} && \Leftrightarrow \\ \frac{n(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})}{n(n-1)} &\geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}} && \Leftrightarrow \\ \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^n &\geq x_1 x_2 \cdots x_{n-1} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} && \Leftrightarrow \\ \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} &\geq x_1 x_2 \cdots x_{n-1} && \Leftrightarrow \\ \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} &\geq \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}. \end{aligned}$$

Bemærk at der i begge tilfælde gælder lighedstegn netop når alle $2n$ eller alle $n-1$ ikke-negative reelle tal er lig hinanden. Hermed er induktionen fuldført. □

Opgave 3.11.2. Vis GH-uligheden ved at udnytte at vi allerede har bevist AG-uligheden.

Nu har vi bevist vores centrale sætning og er klar til at benytte den til at løse uligheder. Overvej for hver ulighed hvilken af de tre uligheder du skal bruge, og hvordan du kan vælge $x_1, x_2, \dots, x_n$ hensigtsmæssigt.

Opgave 3.11.3. Vis at

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

for reelle tal a, b og c, hvor $abc \neq 0$.

Opgave 3.11.4. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n}$$

for positive reelle tal a og b.

Opgave 3.11.5. Vis at

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}$$

for positive reelle tal a, b og c.

Opgave 3.11.6. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Opgave 3.11.7. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\sqrt[3]{abc}+1 \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Hint: 112

Opgave 3.11.8. Lad a og b være to positive reelle tal med sum 1. Bevis at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Hvornår gælder der lighedstegn? *Hint*: 248

Opgave 3.11.9. Lad a, b og c være reelle tal der opfylder at $c > 0$, $a > c$ og $b > c$. Vis at

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}.$$

Hint: 60

Opgave 3.11.10. Lad x, y, z være positive reelle tal som opfylder at $xyz = 32$. Bestem den mindst mulige værdi af

$$x^2+4xy+4y^2+2z^2.$$

Hint: 213

3.12 Flere uligheder

Der findes et hav af forskellige uligheder man kan bruge i matematikkonkurrencer, men her ser vi kun på tre centrale uligheder, nemlig omarrangeringsuligheden, Cauchy-Schwarz og Jensens ulighed. Når vi når til Jensens ulighed, får vi brug for flere funktionsbegreber som hænger sammen med teori der ligger uden for disse noter, og derfor springer vi alle beviser over.

Sætning 3.12.1. Omarrangeringsuligheden

Lad $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ og $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$ være reelle tal, og lad $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ være en permutation af $x_1, x_2, \dots, x_n$. Da er

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \ge x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \cdots + x'_n y_n.$$

og

$$x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \cdots + x'_n y_n \ge x_n y_1 + x_{n-1} y_2 + \cdots + x_1 y_n.$$

Hvis $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$, er der lighedstegn i første ulighed netop når $x'_i = x_i$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$, og der er lighedstegn i anden ulighed netop når $x'_i = x_{n+1-i}$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$.

Bevis. Vi viser kun den første ulighed, da den anden følger af den første ved at ændre fortegn på alle y_i'erne. Betragt summen

$$x'_1 y_1 + x'_2 y_2 + \cdots + x'_n y_n$$

for alle permutationer af x_i'erne. Da der er endeligt mange permutationer, må der være en eller flere summer som er maksimale. Lad $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$ være en permutation som giver en maksimal sum.

Antag at der findes et i så $x''_i > x''_{i+1}$. Da er

$$(x''_i - x''_{i+1})(y_{i+1} - y_i) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x''_{i+1} y_i + x''_i y_{i+1} \ge x''_i y_i + x''_{i+1} y_{i+1},$$

med lighedstegn netop hvis $y_i = y_{i+1}$. Uligheden viser at summen bliver større når vi bytter om på x''_i og x''_{i+1}, hvis $y_i < y_{i+1}$, mens den forbliver uændret hvis $y_i = y_{i+1}$. Vi kan derfor altid bytte om på x''_i og x''_{i+1} hvis $x''_i > x''_{i+1}$, uden at gøre summen mindre. Vi kan blive ved med at bytte om på to naboer så længe der findes naboer med $x''_i > x''_{i+1}$, og da denne proces stopper på et tidspunkt, ender vi med en permutation hvor $x'_i = x_i$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$, uden at vi har gjort summen mindre. Dermed er summen maksimal når $x'_i = x_i$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. I tilfældet hvor $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$, viser ovenstående at der kun er lighedstegn netop når alle x_i'erne er identiske. □

Opgave 3.12.1. Lad $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ og $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$ være reelle tal, og lad $z_1, z_2, \dots, z_n$ være en permutation af $y_1, y_2, \dots, y_n$. Vis at

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2.$$

(IMO 1975)

Opgave 3.12.2. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Sætning 3.12.2. Cauchy-Schwarz

For vilkårlige $2n$ reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $y_1, y_2, \dots, y_n$ gælder at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Bemærk at uligheden også gælder hvis man kvadrerer på begge sider, da man jo kan indsætte lutter positive værdier.

Bemærkning. Cauchy-Schwarz formuleres ofte med vektorer: For vektorerne $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ og $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ gælder at

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) \le \left|(y_1, y_2, \dots, y_n)\right| \left|(y_1, y_2, \dots, y_n)\right|.$$

Venstresiden er prikproduktet, hvilken netop svarer til venstresiden i Cauchy-Schwarz, og højresiden er produktet af længderne af vektorerne, hvilket netop er det der står på højresiden i Cauchy-Schwarz.

Beviset overlades til læseren i opgave 3.12.14.

Opgave 3.12.3. Vis at der for positive reelle tal $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ gælder at

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i b_i}\right) \geq 4n^2.$$

Opgave 3.12.4. Benyt Cauchy-Schwarz til at bevise AH-uligheden.

Opgave 3.12.5. Vis at

$$a+b+c \leq \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}$$

for positive tal a, b og c.

Inden vi er klar til Jensens ulighed, skal vi have styr på begreberne konveks og konkav.

Definition af konveks og konkav

Lad $I \subseteq \mathbb{R}$ være et interval som evt. er hele $\mathbb{R}$.

En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ er *konveks* på intervallet I hvis der for alle $t \in [0;1]$ og alle $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$ gælder at

$$f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

Det kan se lidt kringlet ud, men den geometriske fortolkning af dette er blot at et vilkårligt linjestykke mellem to punkter på grafen ligger over grafen for f.

En funktion $f : I \to \mathbb{R}$ er *konkav* på intervallet I hvis der for alle $t \in [0;1]$ og alle $x_1, x_2 \in I$ med $x_1 < x_2$ gælder at

$$f(t \cdot x_1 + (1-t) \cdot x_2) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_2).$$

Tilsvarende er den geometriske fortolkning her at et vilkårligt linjestykke mellem to punkter på grafen ligger under grafen for f.

Det kan være besværligt at tjekke om definitionen for konveks og konkav er opfyldt, og derfor benytter vi ofte følgende sætning.

Sætning 3.12.3. Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en funktion der kan differentieres to gange.

Funktionen f er konveks på I hvis $f''(x) \geq 0$ for $x \in I$.

Tilsvarende er f konkav I hvis $f''(x) \leq 0$ for $x \in I$.

Sætning 3.12.4. Jensens ulighed

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en konveks funktion på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, og lad $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Da gælder

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

med lighedstegn netop hvis $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Lad $f : I \to \mathbb{R}$ være en konkav funktion på intervallet $I \subseteq \mathbb{R}$, og lad $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Da gælder

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

med lighedstegn netop hvis $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Opgave 3.12.6. Benyt Jensens ulighed til at bevise QA-uligheden.

Opgave 3.12.7. Lad a, b og c være reelle tal, hvor $a, b, c > -1$. Vis at

$$\sqrt[3]{\frac{a+b+c}{3}+1} \geq \frac{\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{b+1}+\sqrt[3]{c+1}}{3}.$$

Opgave 3.12.8. Vis at

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^2$$

for positive reelle tal a, b og c. *Hint*: 209

De næste opgaver er blandede opgaver hvor du selv må vurdere hvilken ulighed du kan benytte.

Opgave 3.12.9. Lad a, b og c være positive reelle tal med sum 1. Vis at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

Hint: 250

Opgave 3.12.10. Vis at for vilkårlige $2n$ reelle tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $y_1, y_2, \dots, y_n$ gælder at

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Hint: 204

Opgave 3.12.11. Lad $n>1$ være et helt tal, og lad $a_1, a_2, \dots, a_n$ være positive reelle tal med sum 1. Vis at

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}}+\frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Hint: 4

Opgave 3.12.12. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vis at

$$\frac{2a}{a^2+bc}+\frac{2b}{b^2+ca}+\frac{2c}{c^2+ab} \leq \frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}.$$

Opgave 3.12.13. Lad x, y, z være reelle tal med $x, y, z > 1$ og $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Vis at

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.$$

Opgave 3.12.14. Bevis Cauchy-Schwarz. Du kan fx bevise den ved at benytte omarrangeringsuligheden.

4 Geometri

I dette kapitel får du en grundig introduktion til klassisk geometri. Kapitlet forudsætter kendskab til grundlæggende viden om vinkler, retvinklede trekanter og ensvinklede trekanter, og fra afsnit 4.9 og frem kræves der også kendskab trigonometri.

Det første afsnit giver gode råd til hvordan man arbejder med geometriopgaver, mens afsnit 4.2-4.4 introducerer grundlæggende teori om trekanter og cirkler. Herefter bliver teorien mere avanceret og opgaverne sværere. Der angives engelske gloser til de centrale begreber.

Indhold

4.1 Kom i gang med geometri

Klassisk geometri tager tid at blive fortrolig med, og mange opgaver kræver tålmodighed. Ofte tager det tid blot at tegne en god figur. I dette afsnit præsenteres nogle tip til geometriopgaver, og nogle af tippene demonstreres med eksempler. Som titlen "Kom i gang med geometri" antyder, er det en slags opvarmning inden vi går mere i dybden med teori og opgaver. Her bygger vi på helt grundlæggende geometriske egenskaber som det forudsættes er kendte, men flere af dem nævner vi, og andre beviser vi ligefrem for at illustrere et tip til geometri.

Tip til geometri

Tegn. Tegn en god, stor og præcis tegning med passer og lineal. Hvis du skal tegne en vilkårlig trekant, så pas på den ikke bliver retvinklet eller ligebenet.

Markér på figuren. Se grundigt på figuren og de oplysninger du har, og markér rette vinkler, ens vinkler og lige lange linjestykker.

Gå på vinkeljagt. Overvej om du kan finde ens vinkler, og se fx om de giver ensvinklede trekanter.

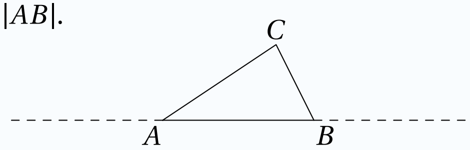
Tænk baglæns. Hvis du skal bevise noget, hvad har du så brug for at vise som medfører dette?

Udvid figuren. Tegn en ny linje, indfør et ekstra punkt, spejl eller drej dele af figuren, ... Geometriopgaver er altid svære når man skal udvide figuren, for man kan let komme til at lave en udvidelse der ikke hjælper, men blot forvirrer. Det handler om at overveje hvad man har brug for.

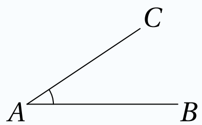
Få overblik. Hvis du er gået helt i stå, så vend tilbage til opgaveformuleringen, og overvej grundigt hvad de oplysninger du har, medfører. Gå derefter igennem dine argumenter igen, og få overblik over hvad du er nået frem til. Måske opdager du noget du før havde overset.

Notation

Den uendeligt lange linje gennem A og B betegnes *linjen* AB, mens linjestykket fra A til B betegnes *linjestykket* AB. Hvis linjestykket er en side i en trekant, kalder vi det også ofte blot *siden* AB. *Længden* af linjestykket AB betegnes $|AB|$.



Vinkel $\angle BAC$ betyder vinklen med vinkelspids i A og AB og AC som vinkelben.



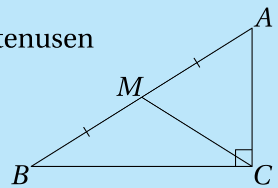
linjestykke *line segment*

I det næste eksempel illustrerer vi tippet "udvid figuren" ved at bevise to vigtige egenskaber ved retvinklede trekanter:

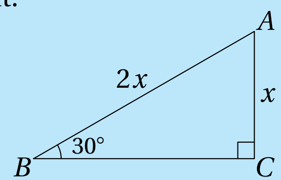
Sætning 4.1.1. Retvinklede trekanter

Lad ABC være en retvinklet trekant, hvor vinkel C er ret.

i) Linjen fra vinkel C til midtpunktet M af hypotenusen inddeler trekanten i to ligebenede trekanter.

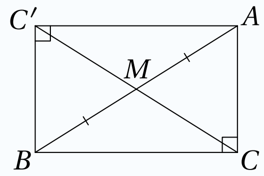


ii) En spids vinkel i trekant ABC er $30°$ netop når den modstående katete til vinklen er halvt så stor som hypotenusen. Vi kalder denne type trekant for en $30°$- $60°$- $90°$-trekant.



Eksempel 4.1.1. Udvid figuren

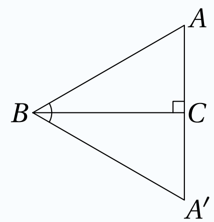
i) Drej trekanten $180°$ om punktet M. Firkant $AC'BC$ er et rektangel: Da M er midtpunket af AB, betyder det at vi ved en drejning på $180°$ om punktet M fører A i B og omvendt. Desuden bliver AC' parallel med BC da vi drejer $180°$, og vinklen ved C' har samme størrelse som C, dvs. den er ret. Dermed er $AC'BC$ et rektangel.



Da vi drejer $180°$ om M, betyder det også at C, M og C' ligger på en linje, og denne linje er diagonal i rektanglet. Diagonalerne i rektanglet skærer derfor hinanden i M. Af symmetrigrunde deler diagonalerne rektanglet i fire ligebenede trekanter. Dette viser at linjestykket CM deler trekant ABC i to ligebenede trekanter.

ii) Spejl den retvinklede trekant ABC i kateten BC.

Antag først at vinkel $\angle ABC = 30°$. Det følger af vinkelsummen i en trekant at $\angle CBA = 60°$. Desuden må $\angle ABA' = 2 \cdot \angle ABC = 2 \cdot 30° = 60°$. Altså er alle vinkler i trekant ABA' lig med $60°$, dvs. trekant ABC er ligesidet. Det betyder at kateten AC er halvt så stor som hypotenusen AB.



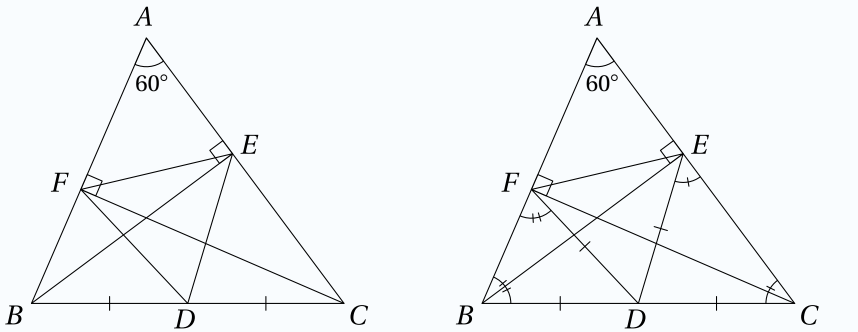
Antag omvendt at kateten AC er halvt så stor som hypotenusen. Det følger per konstruktion at $|AA'| = |AB| = |A'B|$, dvs. trekant ABA' er ligesidet. Dermed er alle vinkler $60°$. Da vi har spejlet trekant ABC i kateten BC, må $\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot \angle ABA' = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Opgave 4.1.1. Bevis sætning 4.1.1 ii) uden at udvide figuren, men ved i stedet at benytte i).

Eksempel 4.1.2. Illustration af de fire første tip

Lad ABC være en spidsvinklet trekant med $\angle BAC = 60°$, og lad D være midtpunktet af BC. Punkterne E og F er fodpunkterne for højderne fra henholdsvis B og C. Vis at trekant DEF er ligesidet.

For at løse denne opgave tegner vi først en god og præcis tegning. Derefter markerer vi de rette vinkler, størrelsen af vinkel $\angle BAC$, samt at BD og CD er lige lange. Se figuren til venstre.



Nu går vi på vinkeljagt. Punktet D er midtpunktet af hypotenusen i den retvinklede trekant BCF og den retvinklede trekant BCE, dvs. ifølge sætning 4.1.1 i) er trekanterne $\triangle BDF$ og $\triangle EDC$ ligebenede. Det giver at trekant DEF er ligebenet med $|DE| = |DF|$.

Til slut tænker vi baglæns. Hvis vi skal vise at trekant DEF er ligesidet, så er det nu nok at vise at $\angle FDE = 60°$. Vi skal altså se om vi ikke kan bestemme denne vinkel med den viden vi allerede har om vinklerne. Umiddelbart kan vi se at

$$\angle FDE = 180° - \angle BDF - \angle EDC,$$

så hvis vi kan bestemme de to sidste vinkler, så har vi også den første som vi er interesseret i.

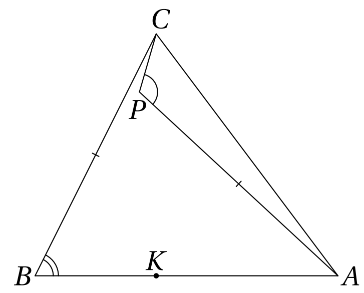
Kald vinkel $\angle ABC = \angle B$ og $\angle BCA = \angle C$. Ved at udnytte at $\angle B + \angle C = 120°$ fordi $\angle BAC = 60°$, og at $\triangle BDF$ og $\triangle EDC$ er ligebenede, får vi (se figuren til højre)

$$\begin{aligned}\angle FDE &= 180° - \angle BDF - \angle EDC\\ &= 180° - (180° - 2\angle B) - (180° - 2\angle C)\\ &= 2(\angle B + \angle C) - 180° = 2 \cdot 120° - 180° = 60°.\end{aligned}$$

Dermed er trekant DEF en ligesidet trekant.

Opgave 4.1.2. I en trekant ABC er D midtpunktet af siden BC, og E er fodpunktet for højden fra B. Desuden er $\angle ADB = 45°$ og $\angle ACB = 30°$. Vis at trekant BDE er en ligesidet trekant, og bestem $\angle BAD$.

Opgave 4.1.3. Punktet P ligger inden i trekant ABC så $|BC| = |AP|$ og $\angle APC + \angle ABC = 180°$. Desuden er K et punkt på siden AB så $|AK| = |KB| + |PC|$. Bevis at $\angle AKC$ er ret.



Hint: 133, 205

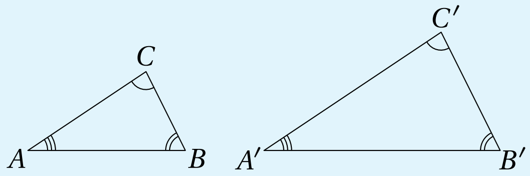
4.2 Trekantens linjer

De vigtigste linjer i en trekant udover siderne er medianerne, midtnormalerne, vinkelhalveringslinjerne og højderne. De har alle hver deres særlige egenskaber som vi skal se nærmere på i dette afsnit, men først skal vi se på ensvinklede trekanter og transversaler.

Vi starter med at definere ensvinklede trekanter og med denne kendte sætning om ensvinklede trekanter som vi ikke beviser.

Definition af ensvinklede og kongruente trekanter

To trekanter ABC og $A'B'C'$ er *ensvinklede* når deres vinkler er parvis lige store.



Vi skriver $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Læg mærke til at det betyder at $\angle A = \angle A'$, osv. Det er altså vigtigt i hvilken rækkefølge bogstaverne står.

To trekanter ABC og $A'B'C'$ er *kongruente* når de er ensvinklede, og når deres sider yderligere er parvis lige store.

ensvinklede trekanter *similar triangles*
kongruente trekanter *congruent triangles*

Sætning 4.2.1. Ensvinklede trekanter

To trekanter ABC og $A'B'C'$ er ensvinklede netop hvis

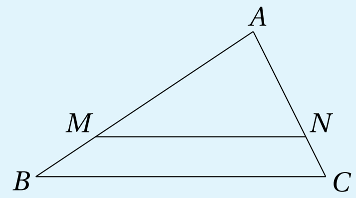
$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|},$$

eller netop hvis $\angle BAC = \angle B'A'C'$ og

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}.$$

Definition af transversal

En *transversal* i en trekant er et linjestykke der forbinder to punkter på to forskellige sider i trekanten. En transversal kaldes en *paralleltransversal* hvis den er parallel med en af siderne i trekanten, og en *midtpunktstransversal* hvis den forbinder midtpunkterne af to sider.



transversal *transversal*
midtpunktstransversal *mid-segment*

Sætning 4.2.2. En transversal fra punktet M på siden AB til punktet N på siden AC er en paralleltransversal netop hvis

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|} \quad \text{eller} \quad \frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|MB|}{|NC|}.$$

En midtpunktstransversal er også en paralleltransversal.

Bevis. Først viser vi at MN er parallel med BC netop hvis $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. At MN er parallel med BC, er ensbetydende med at $\triangle BAC$ er ensvinklet med $\triangle MAN$, hvilket igen ifølge sætning 4.2.1 er ensbetydende med at $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$ da de to trekanter har en fælles vinkel A.

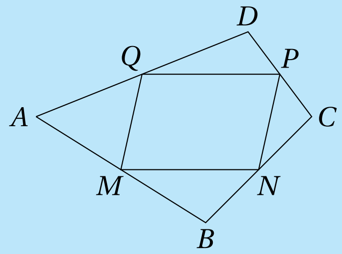
En midtpunktstransversal er derfor også en paralleltransversal da begge forhold er $\frac{1}{2}$.

At $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AB|}{|AC|}$, er ensbetydende med at $\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|MB|}{|NC|}$, da

$$\begin{aligned} |AM||AC| = |AB||AN| \quad &\Leftrightarrow \quad |AM||AC| - |AM||AN| = |AB||AN| - |AM||AN| \\ &\Leftrightarrow \quad |AM||NC| = |AN||MB|. \quad \square \end{aligned}$$

Sætning 4.2.3. Midtpunkterne af siderne i en firkant

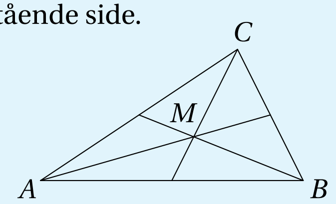
Lad $ABCD$ være en firkant og M, N, P og Q midtpunkterne af henholdsvis AB, BC, CD og DA. Da er $MNPQ$ et parallelogram.



Opgave 4.2.1. Vis sætning 4.2.3. *Hint*: 31

Definition af median

En *median* i en trekant er et linjestykke der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af modstående side.



median *median*

Sætning 4.2.4. Medianer

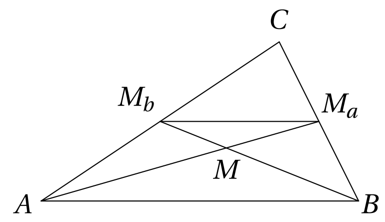
De tre medianer i en trekant går igennem samme punkt, og dette punkt deler medianerne i forholdet 1:2.

Medianernes skæringspunkt betegnes normalt M.

medianernes skæringspunkt *centroid*

Bevis. Lad ABC være en trekant, og kald medianerne for henholdsvis m_a, m_b og m_c og medianernes fodpunkter på siderne a, b og c for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Medianerne m_a og m_b skærer hinanden i et punkt vi kalder M.

Vi vil nu vise at de deler hinanden i forholdet $1:2$. Da M_a og M_b er midtpunkter på henholdsvis a og b, er M_aM_b midtpunktstransversal og dermed parallel med c. Dvs. at $\triangle ABC$ og $\triangle M_bM_aC$ er ensvinklede med forholdet $1:2$ og dermed specielt $2|M_aM_b| = |AB|$.



Desuden er trekanterne ABM og M_aM_bM ensvinklede da M_aM_b og AB er parallelle, og forholdet mellem trekanterne er netop forholdet mellem M_aM_b og AB, dvs. $1:2$. Her af ses at m_a og m_b deler hinanden i forholdet $1:2$.

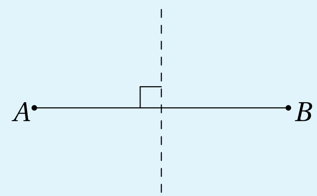
Da m_a og m_b var vilkårlige medianer, må m_a og m_c også dele hinanden i forholdet $1:2$, dvs. at alle tre medianer går gennem samme punkt M. □

Opgave 4.2.2. I trekant ABC er sidelængderne $a = 5$, $b = 6$ og $c = 5$. Lad M være medianernes skæringspunkt. Bestem længden $|BM|$. *Hint*: 57

Definition af midtnormal

En *midtnormal* til et linjestykke AB er den linje som går gennem midtpunktet af linjestykket AB og står vinkelret på AB.

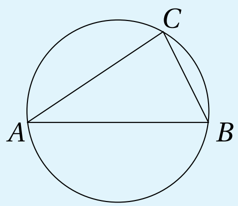
Midtnormalen er dermed det *geometriske sted* for de punkter P der har samme afstand til A og B, altså mængden af punkter P som opfylder at $|AP| = |BP|$, da det netop er disse punkter som opfylder betingelsen.



midtnormal *perpendicular bisector*

Definition af den omskrevne cirkel

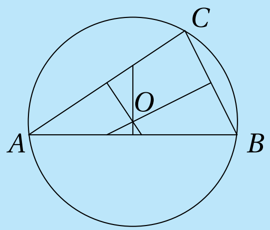
Den *omskrevne cirkel* til trekant ABC er cirklen der går gennem punkterne A, B og C.



den omskrevne cirkel *the circumcircle*
centrum for den omskrevne cirkel *the circumcenter*

Sætning 4.2.5. Midtnormaler

I en trekant går de tre midtnormaler gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for trekantens omskrevne cirkel.



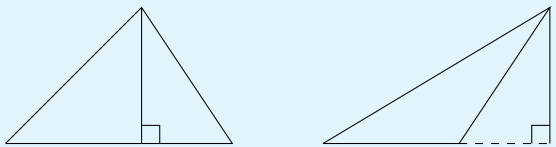
Midtnormalernes skæringspunkt betegnes normalt O.

Opgave 4.2.3. Bevis sætning 4.2.5. *Hint*: 191

Definition af højde

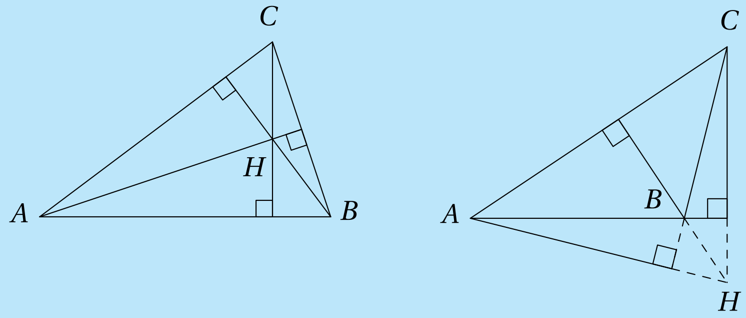
En *højde* i en trekant er en linje der går gennem en vinkelspids og står vinkelret på modstående side. Bemærk at en højde kan falde uden for trekanten!

højde *altitude*



Sætning 4.2.6. Højder

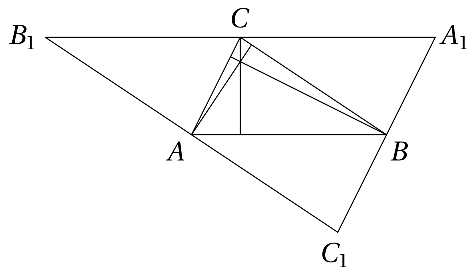
De tre højder i en trekant går gennem samme punkt.



Højdernes skæringspunkt betegnes normalt H.

højdernes skæringspunkt *orthocenter*

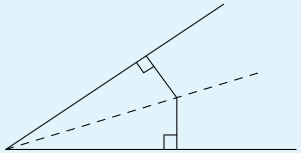
Bevis. Tegn linjer gennem henholdsvis A, B og C som er parallelle med modstående sider, og lad A_1, B_1 og C_1 være skæringspunkterne mellem disse linjer som vist på figuren.



Firkant $ACBC_1$ og firkant ACA_1B er parallelogrammer da siderne per konstruktion er parvis parallelle. Altså er $|C_1B| = |AC| = |BA_1|$. Tilsvarende ses at $|C_1A| = |AB_1|$ og $|B_1C| = |CA_1|$. Punkterne B, A og C er dermed midtpunkter af siderne i $\triangle A_1B_1C_1$. Højderne i $\triangle ABC$ er derfor midtnormaler i $\triangle A_1B_1C_1$, og de går ifølge sætning 4.2.5 om midtnormaler gennem samme punkt. □

Definition af vinkelhalveringslinje

En *vinkelhalveringslinje* til en vinkel er den linje som deler vinklen i to lige store vinkler.

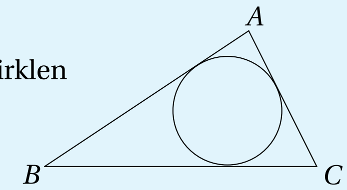


Vinkelhalveringslinjen er altså *geometriske sted* for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, da det netop er disse punkter som opfylder betingelsen.

vinkelhalveringslinje *angle bisector*

Definition af den indskrevne cirkel

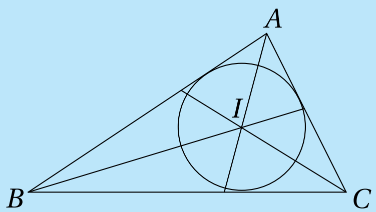
Den *indskrevne cirkel* til trekant ABC er cirklen der tangerer alle tre sider i trekanten.



den indskrevne cirkel *the incircle*
centrum for den indskrevne cirkel *the incenter*

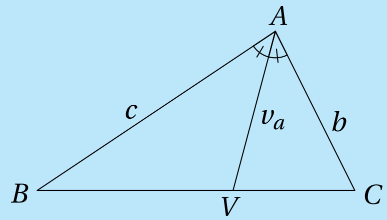
Sætning 4.2.7. Vinkelhalveringslinjer

I en trekant går de tre vinkelhalveringslinjer gennem samme punkt, og dette punkt er centrum for den indskrevne cirkel.



Vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt betegnes normalt I.

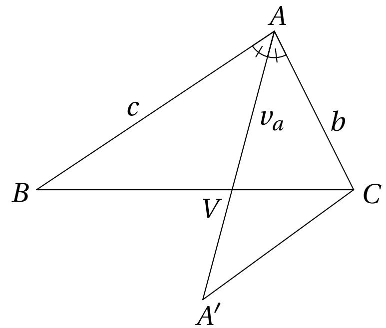
En vinkelhalveringslinje deler modstående side i trekanten i samme forhold som forholdet mellem vinklens to hosliggende sider.



Dvs. hvis fodpunktet for vinkelhalveringslinjen v_a fra A til siden BC betegnes V, så er

$$\frac{|CV|}{|BV|} = \frac{b}{c}.$$

Bevis. Vi beviser sidste del af sætningen og overlader første del til læseren i næste opgave. Lad A' være skæringspunktet mellem linjen gennem C parallel med AB og linjen AV.



Da AB og CA' er parallelle, og AV er vinkelhalveringslinje, er

$$\angle AA'C = \angle VA'C = \angle BAV = \angle VAC = \angle A'AC.$$

Altså er trekant $AA'C$ ligebenet med $|A'C| = b$. Trekanterne BAV og $CA'V$ er pr. konstruktion ligedannede, hvilket giver

$$\frac{|CV|}{|BV|} = \frac{|CA'|}{|BA|} = \frac{b}{c}$$

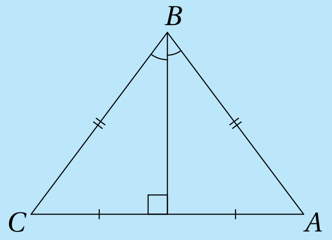
som ønsket. □

Opgave 4.2.4. Bevis første del af sætning 4.2.7. *Hint*: 46

Opgave 4.2.5. I en trekant ABC er sidelængderne $a = 8$, $b = 7$ og $c = 6$. Vinkelhalveringslinjen fra A skærer siden BC i punktet V. Bestem længden af BV.

Sætning 4.2.8. Ligebenede trekanter

Lad ABC være en ligebenet trekant hvor $a = c$. Da er højden fra B, medianen fra B, vinkelhalveringslinjen fra B og midtnormalen på siden AC sammenfaldende.



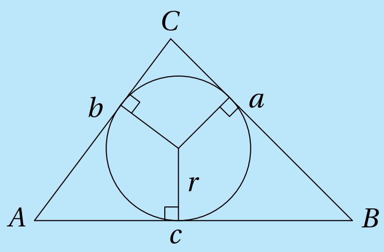
ligebenet trekant *isosceles triangle*

Opgave 4.2.6. Bevis sætning 4.2.8.

Sætning 4.2.9. Areal og radius i den indskrevne cirkel

I en trekant betegner r radius i den indskrevne cirkel, s trekantens halve omkreds og T trekantens areal.
Der gælder at

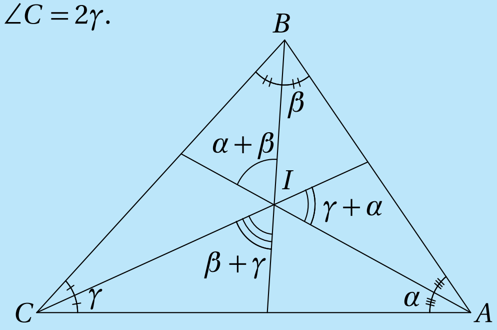
$$T = rs.$$



Opgave 4.2.7. Bevis sætningen 4.2.9.

Sætning 4.2.10. Den indskrevne cirkel og vinkler

I en trekant ABC betegner I centrum for den indskrevne cirkel, og $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$ og $\angle C = 2\gamma$.



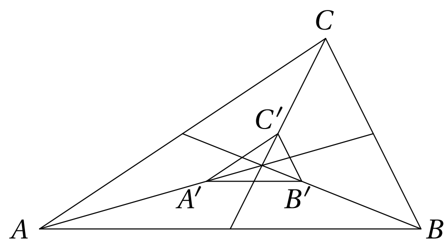
Vinklerne ved I er henholdsvis $\alpha + \beta$, $\beta + \gamma$ og $\gamma + \alpha$ som vist på figuren.

Opgave 4.2.8. Bevis sætning 4.2.10.

Opgave 4.2.9. Vis at medianerne i en trekant deler trekanten i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 4.2.10. Fra vinkelspidsen C i trekant ABC tegnes en ret linje der halverer medianen fra A. I hvilket forhold deler denne linje siden AB? (Georg Mohr-Konkurrencen 1995) *Hint*: 211

Opgave 4.2.11. I en trekant ABC med areal 1 indtegnes medianerne. Midtpunktet af medianen m_a kaldes for A', midtpunktet af medianen m_b kaldes for B', og midtpunktet af medianen m_c kaldes for C'. Bestem arealet af trekant $A'B'C'$. *Hint*: 127

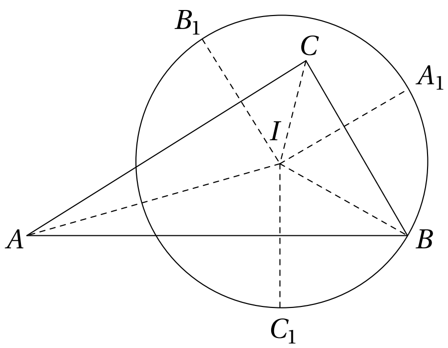


Opgave 4.2.12. Lad I være centrum i den indskrevne cirkel til trekant ABC, og lad yderligere A_1 og A_2 være to forskellige punkter på linjen BC så $|AI| = |A_1I| = |A_2I|$, B_1 og B_2 være to forskellige punkter på linjen AC så $|BI| = |B_1I| = |B_2I|$, og C_1 og C_2 være to forskellige punkter på linjen AB så $|CI| = |C_1I| = |C_2I|$. Vis at

$$|A_1A_2| + |B_1B_2| + |C_1C_2|$$

er trekantens omkreds. *Hint*: 110

Opgave 4.2.13. Lad I være vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt i en trekant ABC, og lad yderligere A_1, B_1 og C_1 være spejlingerne af I i henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem A_1, B_1 og C_1 går også gennem B. Bestem vinklen $\angle ABC$. *Hint*: 216

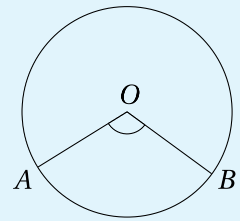


4.3 Cirkler og vinkler

I dette afsnit ser vi på centrale egenskaber for vinkler der spænder over cirkelbuer, dvs. vinkler i cirkler.

Definition af centervinkel

En *centervinkel* i en cirkel er en vinkel der har toppunkt i centrum og radier som vinkelben. En centervinkel måles ved den bue den spænder over.

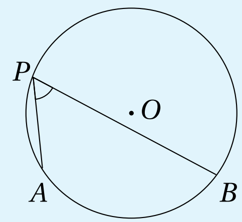


På figuren er $\angle AOB$ en centervinkel som spænder over buen AB, og vi skriver $\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$.

bue *arc*
centervinkel *central angle*

Definition af periferivinkel

En *periferivinkel* i en cirkel er en vinkel der har toppunkt på cirklen og korder som vinkelben.

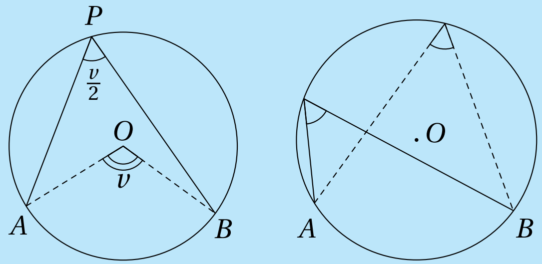


På figuren er $\angle APB$ en periferivinkel som spænder over buen AB.

korde *chord*
periferivinkel *inscribed angle*

Sætning 4.3.1. Periferivinkler

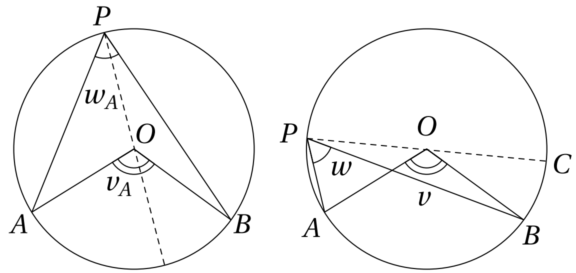
En periferivinkel er halvt så stor som den bue den spænder over.



To periferivinkler som spænder over samme bue, er lige store.

Bevis. Lad v være en centervinkel og w en periferivinkel der begge spænder over buen AB. Kald centrum for O og punktet hvor w rører periferien, for P.

Antag først at vinkelbenene for vinkel v kun skærer vinkelbenene for w i punkterne A og B. Da deler diameteren gennem P vinklerne v og w i to vinkler som vi kalder henholdsvis v_A og v_B og w_A og w_B. Trekant AOP er nu en ligebenet trekant med to lige store vinkler w_A, og den sidste vinkel er $180° - v_A$. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er $2w_A = v_A$. Tilsvarende fås $2w_B = v_B$, dvs. $2w = v$.



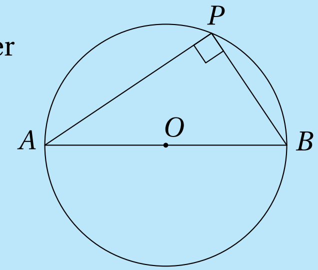
Antag nu at w's ene vinkelben PB skærer v's vinkelben OA. Diameteren gennem P skærer da yderligere periferien i et punkt vi kalder for C. Ifølge det vi lige har vist, er $2\angle BPC = \angle BOC$ og $2\angle APC = \angle AOC$, og dermed

$$2w = 2\angle APC - 2\angle BPC = \angle AOC - \angle BOC = v.$$

En periferivinkel er dermed halvt så stor som den bue den spænder over, og det betyder også at to periferivinkler der spænder over samme bue, er lige store. □

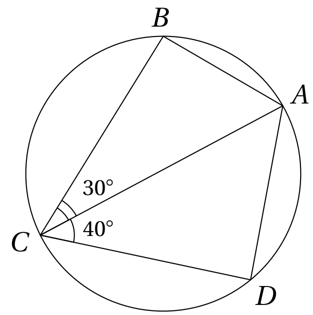
Korollar 4.3.2. Ret periferivinkel

En periferivinkel er ret netop når den spænder over en diameter.

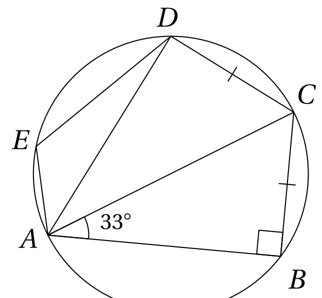


Opgave 4.3.1. Vis korollar 4.3.2.

Opgave 4.3.2. Punkterne A, B, C og D ligger på en cirkel i denne rækkefølge. Desuden er $\angle ACB = 30°$ og $\angle DCA = 40°$. Bestem $\angle BAD$.



Opgave 4.3.2



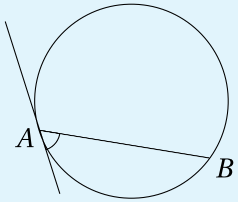
Opgave 4.3.3

Opgave 4.3.3. Punkterne A, B, C, D og E ligger på en cirkel i denne rækkefølge. Desuden er $\angle BAC = 33°$, $\angle ABC = 90°$ og $|BC| = |BD|$. Bestem $\angle DEA$.

Opgave 4.3.4. I en spidsvinklet trekant ABC kaldes centrum for den omskrevne cirkel O og højdernes skæringspunkt for H. Linjen BO skærer den omskrevne cirkel i et punkt Q forskelligt fra B. Vis at $AQCH$ er at parallelogram.
Hint: 35

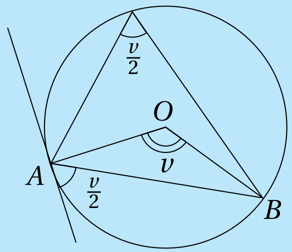
Definition af korde-tangent-vinkel

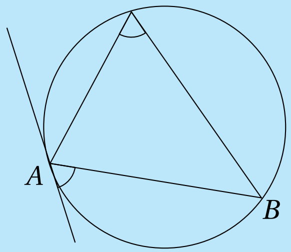
En *korde-tangent-vinkel* er en vinkel der har toppunkt på cirklen og en korde samt en tangent som vinkelben.



Sætning 4.3.3. Korde-tangent-vinkel

En korde-tangent-vinkel er halvt så stor som den bue korden spænder over, og dermed lige så stor som en periferivinkel der spænder over buen. Se figuren til venstre.





Den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler

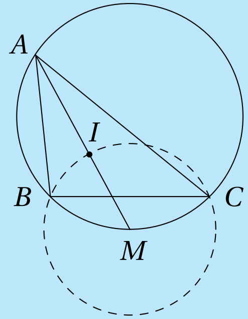
En linje gennem punktet A på cirkelperiferien er tangent til cirklen hvis den vinkel den danner med korden AB, er lige så stor som den periferivinkel der spænder over korden AB. Se figuren til højre.

Opgave 4.3.5. Bevis sætning 4.3.3. *Hint*: 244

Opgave 4.3.6. Lad to cirkler ω_1 og ω_2 skære hinanden i punkterne A og B. Tangenten til ω_1 gennem B skærer ω_2 i punktet C, og tangenten til ω_2 gennem B skærer ω_1 i punktet D. Desuden oplyses at $|AC| = 3$ og $|AD| = 4$. Bestem længden af AB. *Hint*: 27

Sætning 4.3.4. Superpunktet

I en trekant ABC betegner I centrum for den indskrevne cirkel. Lad M være skæringspunktet mellem AI og den omskrevne cirkel. Da er M centrum for cirklen gennem B, C og I.

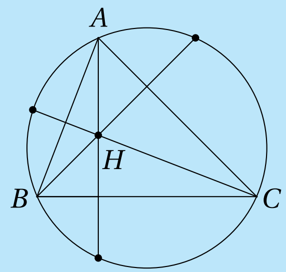


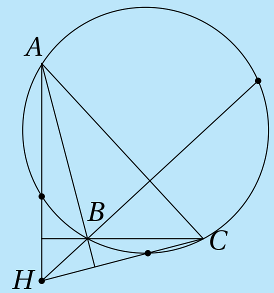
Punktet M kaldes *superpunktet* fordi det har mange interessante egenskaber.

Opgave 4.3.7. Bevis sætning 4.3.4. *Hint*: 171

Sætning 4.3.5. Højdernes skæringspunkt og den omskrevne cirkel

Spejlingen af H i en vilkårlig af trekantens sider ligger på trekantens omskrevne cirkel.



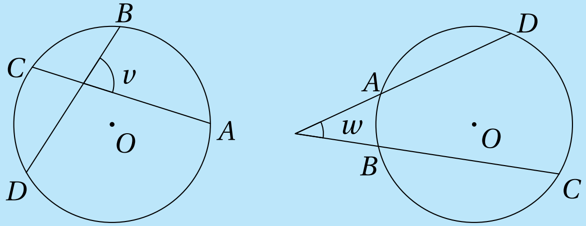


Opgave 4.3.8. Bevis sætning 4.3.5.

Sætning 4.3.6. Vinkler i cirkler

Om vinklerne v og w på figurerne gælder:

$$v = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2} \quad \text{og} \quad w = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

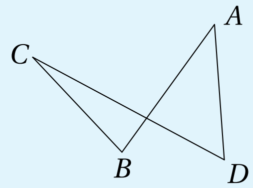


Opgave 4.3.9. Bevis sætning 4.3.6. *Hint*: v: 176, w: 212

4.4 Indskrivelige firkanter

Definition af simple firkanter

En firkant kaldes *simpel* hvis dens sider ikke skærer hinanden. I dette kapitel betegner ordet *firkant* fremover en simpel firkant.



Figuren viser et eksempel på en ikke-simpel firkant.

simpel firkant *simple quadrilateral*

Definition af konvekse firkanter

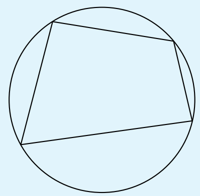
En firkant kaldes *konveks* hvis der for vilkårlige to indre punkter gælder at linjestykket mellem punkterne er indeholdt i firkanten. De konvekse firkanter er altså netop dem der ikke har en vinkel der overstiger 180°.

Generelt defineres en *konveks* figur på tilsvarende måde.

konveks firkant *convex quadrilateral*

Definition af indskrivelige firkanter

En firkant kaldes *indskrivelig* hvis den har en omskreven cirkel.



indskrivelig firkant *cyclic quadrilateral*

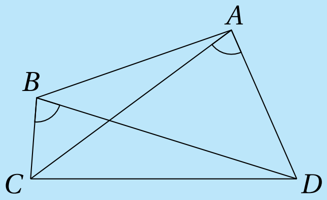
Sætning 4.4.1. Indskrivelige firkanter

Følgende udsagn om firkanten $ABCD$ er ækvivalente:

i) Firkant $ABCD$ er indskrivelig.

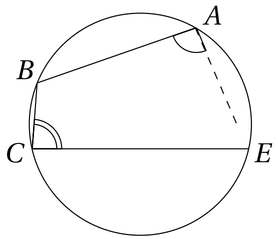
ii) Summen af modstående vinkler er 180°.

iii) Der gælder at $\angle CBD = \angle CAD$ eller tilsvarende.



Bevis. Først viser vi at i) medfører ii). Antag at en firkant er indskrivelig. To modstående vinkler spænder da tilsammen over hele cirkelperiferien, og summen er derfor 180°.

Derefter viser vi at ii) medfører i). Antag at det for en given firkant $ABCD$ gælder at summen af to modstående vinkler er 180°. Betragt nu den omskrevne cirkel til trekant ABC, og lad punktet E være skæringen mellem cirklen og linjen gennem C og D.



Firkant $ABCD$ er indskrivelig netop hvis D lig E, så det er det vi ønsker at vise. Da vi allerede har vist at i) medfører ii), og firkant $ABCE$ er indskrivelig, må

$$\angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle BCE = \angle BAE,$$

dvs. at punktet E ligger på linjen AD og derfor er identisk med D.

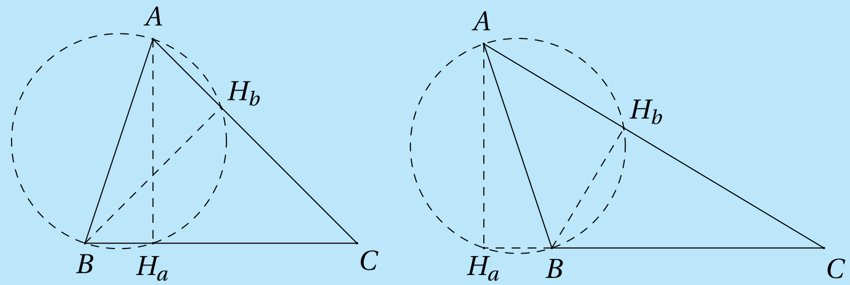
Vi har nu vist at de første to udsagn er ækvivalente. Resten af beviset overlades til læseren i følgende opgave. □

Opgave 4.4.1. Bevis resten af sætning 4.4.1.

Sætning 4.4.2. Højder og indskrivelige firkanter

I trekant ABC betegner H højdernes skæringspunkt og H_a og H_b fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A og B.

Firkant ABH_aH_b er indskrivelig (evt. AH_aBH_b hvis A eller B er stump), og $\triangle CAB$ og $\triangle CH_aH_b$ er ensvinklede.



Opgave 4.4.2. Bevis sætning 4.4.2.

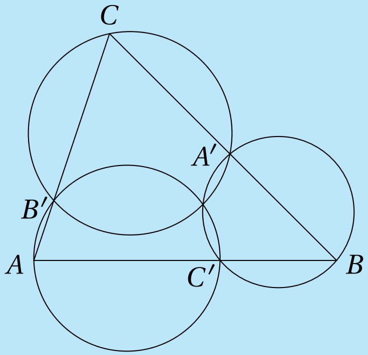
Opgave 4.4.3. Lad H_a, H_b opg H_c være fodpunkterne for højderne fra henholdsvis A, B og C i en spidsvinklet trekant ABC. Vis at AH_a er vinkelhalveringslinje i $\triangle H_aH_bH_c$.

Opgave 4.4.4. Lad ABC være en spidsvinklet trekant. Lad K være fodpunktet for højden fra A, lad L være fodpunktet for højden fra B, og lad M være midtpunktet af AB. Vis at linjen ML og linjen MK tangerer den omskrevne cirkel til trekant CKL. *Hint*: 3

Opgave 4.4.5. I rektanglet $ABCD$ er M midtpunktet af siden AB, og H er et punkt på linjestykket DM så CH står vinkelret på DM. Vis at trekant BCH er ligebenet. *Hint*: 160

Sætning 4.4.3. Miquels sætning

Lad ABC være en trekant, og lad punkterne A', B' og C' ligger på henholdsvis siden BC, siden AC og siden AB.



Da går de omskrevne cirkler til $\triangle AB'C'$, $\triangle BC'A'$ og $\triangle CA'B'$ gennem samme punkt.

Opgave 4.4.6. Bevis sætning 4.4.3.

Opgave 4.4.7. Lad ABC være en spidsvinklet trekant. Linjen l gennem A er tangent til den omskrevne cirkel til trekant ABC. Linjen gennem C vinkelret på CB skærer l i punktet D. Linjen gennem D parallel med AB skærer siden BC i punktet E. Vis at centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linjen AE. *Hint*: 219

Opgave 4.4.8. En firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med AB som diameter. Lad S være skæringspunktet mellem diagonalerne AC og BD, og lad T være projektionen af S på AB, dvs. det punkt T på AB der opfylder at ST står vinkelret på AB. Vis at linjen ST halverer vinkel $\angle CTD$. *Hint*: 19

Opgave 4.4.9. Lad $ABCD$ være en firkant hvor B og D ligger på cirklen Ω med AC som diameter. Lad L være et indre punkt på den korteste af cirkelbuerne CD. Lad yderligere K være skæringspunktet mellem linjerne AL og CD, M skæringspunktet mellem linjerne AD og CL, og N skæringspunktet mellem linjerne MK og BC. Vis at punkterne B, L, M og N ligger på en cirkel. *Hint*: 196, 251

Sætning 4.4.4. Ptolemæus' ulighed

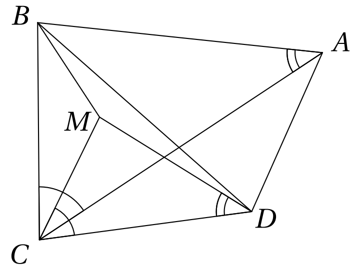
For alle firkanter $ABCD$ gælder Ptolemæus' ulighed

$$|AB||CD|+|BC||DA| \geq |AC||BD|.$$

Der gælder lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Ptolemæus' ulighed *Ptolemy's inequality*

Bevis. Betragt en firkant $ABCD$. Lad M være et punkt så trekant CDM og trekant CAB er ensvinklede og orienteret samme vej. Dermed er $|AB||CD| = |DM||AC|$.



Pga. konstruktionen er $\angle BCM = \angle ACD$. Da trekant CDM og trekant CAB er ensvinklede, er $|CB||CD| = |CM||CA|$. Altså er også trekant CAD og trekant CBM ensvinklede og dermed $|AD||BC| = |BM||AC|$. I alt giver dette ifølge trekantsuligheden at

$$|AB||CD|+|BC||DA| = |AC|(|DM|+|MB|) \geq |AC||BD|$$

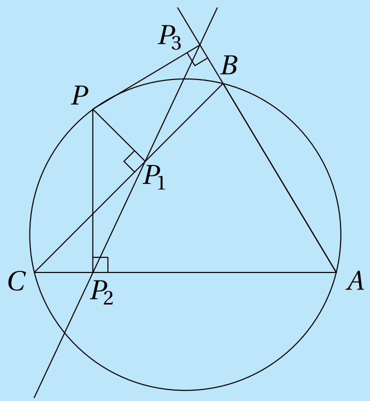
med lighedstegn netop når M ligger på BD. Punktet M ligger på BD netop når $\angle CDB = \angle CAB$, dvs. netop når firkant $ABCD$ er indskrivelig. $\square$

Opgave 4.4.10. En ligesidet trekant ABC er indskrevet i en cirkel. Lad M være et vilkårligt punkt på cirkelbuen BC. Vis at $|MA| = |MB| + |MC|$.

Opgave 4.4.11. En firkant $ABCD$ er indskrevet i en cirkel med radius 1, $|AB| = 1$, $|AC| = \sqrt{2}$ og $|AD| = 2$. Bestem $|BC|$.

Sætning 4.4.5. Simsonlinjen

Lad ABC være en trekant, P et punkt, P_1 projektionen af P på linjen BC, P_2 projektionen af P på linjen AC og P_3 projektionen af P på linjen AB.



Punktet P ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC netop hvis punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.

Denne linje kaldes *Simsonlinjen.*

Simsonlinje *Simson line*

Opgave 4.4.12. Bevis sætning 4.4.5. *Hint*: 68

Opgave 4.4.13. Lad ABC være en trekant hvor D, E og F er fodpunkterne for højderne på henholdsvis BC, AC og AB. Lad yderligere P, Q, M og N være projekterne af D på henholdsvis AB, AC, BE og CF. Vis at punkterne P, Q, M og N ligger på linje. *Hint*: 12

4.5 Et punkts potens

Definition af et punkts potens

I en cirkel ω betegnes centrum O og radius r. Et punkt P's *potens* mht. cirklen ω er tallet

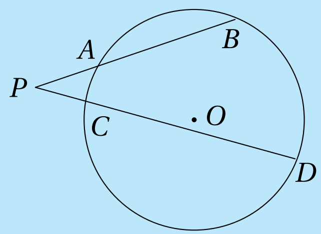
$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |PO|^2 - r^2.$$

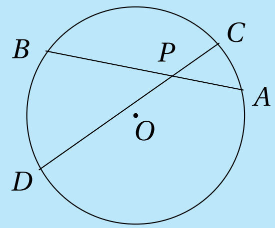
Hvis P ligger på cirkelperiferien, er $\mathrm{Pow}(P,\omega)$ derfor 0, mens den er positiv hvis P ligger uden for cirklen, og negativ hvis P ligger inden for cirklen.

et punkts potens *the power of a point*

Sætning 4.5.1. Et punkts potens

I en cirkel ω betegnes centrum O og radius r. Lad P være et punkt, og lad l og m være to linjer gennem P så l skærer cirklen i punkterne A og B, og m skærer cirklen i punkterne C og D. Hvis en af linjerne tangerer cirklen, er de to punkter sammenfaldende.





Da gælder at

$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$

Hvis P ligger uden for cirklen, er

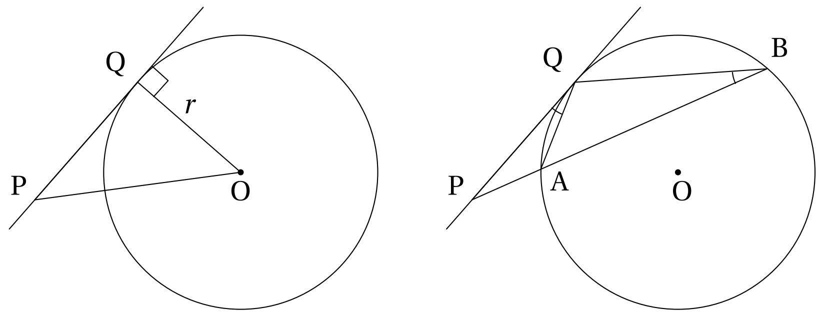
$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = |AP||BP|.$$

Hvis P ligger inden for cirklen, er

$$\mathrm{Pow}(P,\omega) = -|AP||BP|.$$

Bevis i tilfældet hvor punktet ligger uden for cirklen. Lad P være et punkt uden for cirklen, og lad l være en vilkårlig linje gennem P som skærer cirklen i to punkter A og B. Vi viser først at

$$|AP||BP| = \text{Pow}(P, \omega).$$



Tegn tangenten til cirklen gennem P som vist på figuren, og kald røringspunktet for Q. Ifølge Pythagoras' sætning er

$$|PQ|^2 = |PO|^2 - r^2 = \text{Pow}(P, \omega).$$

Betragt nu trekanterne $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$. Korde-tangent-vinklen $\angle AQP$ er lige så stor som periferivinklen $\angle QBP$ ifølge sætningerne om periferivinkler og korde-tangent-vinkler. Dermed er $\triangle AQP$ og $\triangle QBP$ ensvinklede, og dette giver

$$|PQ|^2 = |AP||BP|.$$

Samlet har vi at

$$|AP||BP| = \text{Pow}(P, \omega).$$

Lad nu m være endnu en linje gennem P som skærer cirklen i to punkter C og D. Ifølge det vi netop har vist, må også

$$|CP||DP| = \text{Pow}(P, \omega),$$

dvs. at

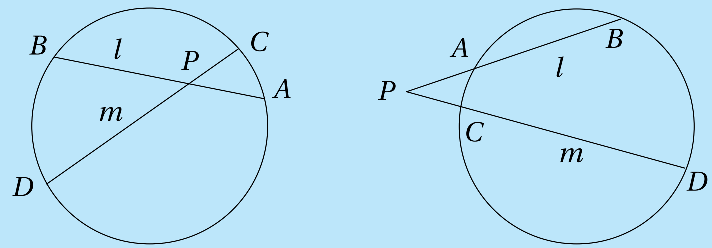
$$|AP||BP| = |CP||DP|.$$ □

Opgave 4.5.1. Bevis sætningen om et punkts potens i det tilfælde hvor punktet ligger inden i cirklen. (*Hint*: Tegn linjen gennem P og centrum, og vis at $|AP||PB| = (r - |PO|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2$.)

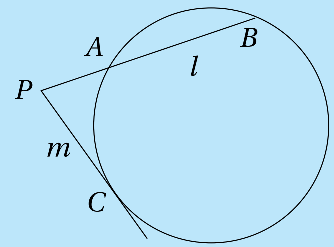
Sætning 4.5.2. Den omvendte sætning om et punkts potens

Lad l og m være to forskellige linjer med skæringspunkt P. Lad A og B være to punkter på l på hver sin side af P, og lad C og D være to punkter på m på hver sin side af P. Eller lad både A og B ligge på samme side af P og C og D ligge på samme side af P.

Hvis $|PA||PB| = |PC||PD|$, da ligger A, B, C og D på samme cirkel.



I det tilfælde hvor A og B ligger på samme side af P, og C og D er sammenfaldende, da ligger A, B og C på en cirkel med m som tangent.



Opgave 4.5.2. Bevis sætningen.

Opgave 4.5.3. To cirkler skærer hinanden i punkterne M og N, og den fælles tangent til de to cirkler nærmest N rører cirklerne i P og Q. Vis at trekant PMN og trekant QMN har samme areal. *Hint*: 206

Opgave 4.5.4. I den spidsvinklede trekant ABC skærer højden fra B cirklen med diameter AC i punkterne P og Q, og højden fra C skærer cirklen med diameter AB i punkterne S og T. Vis at P, Q, S og T ligger på samme cirkel. *Hint*: 82

Opgave 4.5.5. To linjer m og n er parallelle. En cirkel tangerer m i punktet A og skærer n i to forskellige punkter B og C. Lad T være et punkt på linjen m så linjestykkerne TC og TB skærer den korteste af cirkelbuerne AC i henholdsvis K og L. Vis at linjen KL halverer linjestykket TA. *Hint*: 106

Opgave 4.5.6. Lad ABC være en ligebenet trekant med $|AB| = |AC|$. Lad E og F være punkter på linjestykket BC så halvcirklen med diameter EF tangerer siderne AB og AC i henholdsvis M og N. Lad yderligere AF skærer halvcirklen i punktet P. Vis at linjen EP halverer linjestykket NM. *Hint*: 189

4.6 Radikalakse og radikalcentrum

Definitionen for punkts potens og sætningen om punkts potens er grundlaget for at indføre begrebet radikalakse:

Definition af radikalakse

Radikalaksen for to cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de to cirkler.

radikalakse *radical axis/power line*

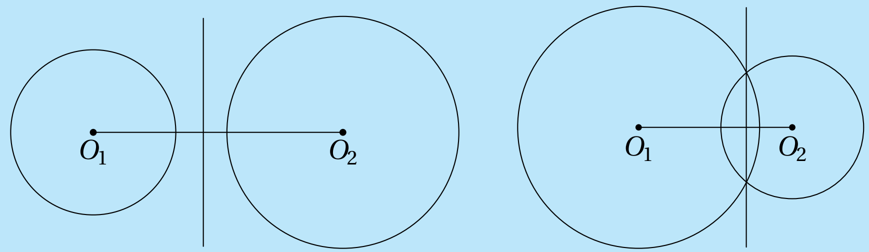
Sætning 4.6.1. Radikalakse

Kald centrum i de to cirkler for henholdsvis O_1 og O_2, cirklernes radier for henholdsvis r_1 og r_2, og lad d betegne afstanden mellem de to centre.

Da er radikalaksen en ret linje der står vinkelret på linjen O_1O_2.

Radikalaksens afstand til henholdsvis O_1 og O_2 er

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og} \quad \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$



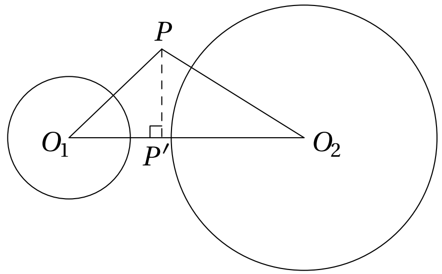
Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, er radikalaksen netop linjen gennem A og B.

Bevis. Antag at P er et punkt på radikalaksen, og lad P' være projektionen af P på O_1O_2. De to første dele af sætningen svarer til at bevise at dette er ensbetydende med at afstanden fra P' til henholdsvis O_1 og O_2 er

$$\frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og} \quad \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$

At P er et punkt på radikalaksen, er per definition ensbetydende med at

$$|PO_1|^2 - r_1^2 = |PO_2|^2 - r_2^2.$$



Dette er ensbetydende med at

$$|PP'|^2 + |O_1P'|^2 - r_1^2 = |PP'|^2 + (d - |O_1P'|)^2 - r_2^2,$$

og yderligere med at

$$|O_1P'| = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} \quad \text{og dermed} \quad |O_2P'| = d - \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d} = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d^2}{2d}.$$

Dermed har vi vist at radikalaksen er en ret linje med de angivne afstande til O_1 og O_2.

Hvis cirklerne skærer hinanden i to punkter A og B, har begge punkter potens nul mht. de to cirkler, dvs. A og B ligger på radikalaksen. Da radikalaksen er en linje, er den netop linjen gennem A og B. □

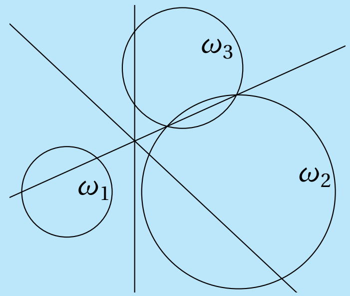
Definition af radikalcentrum

Radikalcentrum for tre cirkler med forskellige centre er det geometriske sted for de punkter der har samme potens mht. de tre cirkler.

radikalcentrum *radical center*

Sætning 4.6.2. Radikalcentrum

For tre cirkler ω_1, ω_2 og ω_3 med forskellige centre som ikke alle tre ligger på linje, gælder at radikalakserne for henholdsvis, ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 skærer hinanden i et punkt, og at dette punkt er deres radikalcentrum.



Hvis de tre centre ligger på linje, er radikalakserne for henholdsvis, ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 parallelle og evt. sammenfaldende, dvs. i dette tilfælde er deres radikalcentrum den tomme mængde eller en ret linje.

Bevis. Hvis de tre centre ikke ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 er parvis ikke-parallelle, samt at radikalcentrum for de tre cirkler pr. definition er fællesmængden af disse radikalakser. Lad P være skæringspunktet mellem radikalaksen for ω_1 og ω_2 og radikalaksen for ω_1 og ω_3. Dermed er potensen af P mht. ω_1 lig potensen af P mht. ω_2, og potensen af P mht. ω_1 er lig med potensen af P mht. ω_3. Altså er potensen af P mht. ω_2 også lig med potensen af P mht. ω_3, hvilket betyder at P ligger på radikalaksen for ω_2 og ω_3. Dermed går alle tre radikalakser gennem P, og P er dermed radikalcentrum for de tre cirkler.

Hvis de tre centre ligger på linje, ved vi fra sætningen om radikalakse at radikalakserne for henholdsvis ω_1 og ω_2, ω_1 og ω_3 samt ω_2 og ω_3 alle er parallelle. Hvis de ikke alle er sammenfaldende, er radikalcentrum for de tre cirkler den tomme mængde, og hvis de alle er sammenfaldende, er radikalcentrum identisk med den fælles radikalakse. □

Definition af degeneret cirkel

En *degenereret cirkel* er en cirkel med radius 0, altså et punkt, eller en cirkel med uendelig stor radius.

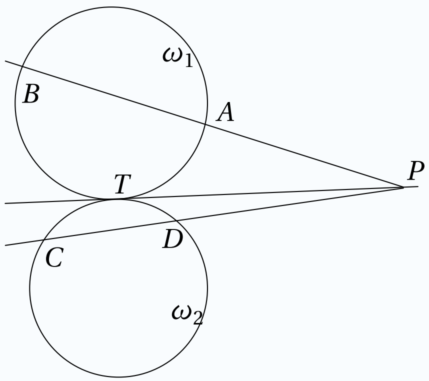
Både for radikalakse og radikalcentrum giver definitionen også mening hvis en eller flere af cirklerne er en degenereret cirkel med radius 0, og sætningerne holder også i dette tilfælde. Det samme gælder for definitionen af og sætningen om punkts potens.

degenereret cirkel *degenerate circle*

Eksempel 4.6.1. Radikalakse og punkter på en cirkel

To cirkler ω_1 og ω_2 tangerer hinanden udvendigt i punktet T. Lad P være et punkt på deres fælles tangent gennem T, lad A og B være to punkter på ω_1 så A, B og P ligger på linje, og lad C og D være to punkter på ω_2 så C, D og P ligger på linje.

Vi ønsker at vise at A, B, C og D ligger på en cirkel.

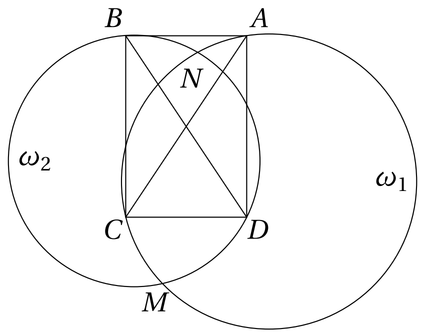


Kald cirklen gennem A, B og C for ω_3. Linjen TP er radikalakse for ω_1 og ω_2, og linjen AP er radikalakse for ω_1 og ω_3. Dermed må skæringspunktet P mellem AP og PT ligge på radikalaksen for ω_2 og ω_3, dvs. denne radikalakse er PC. Da radikalaksen yderligere skærer ω_2 i D, må dette punkt også ligge på ω_3. Dermed ligger A, B, C og D på en cirkel.

Bemærkning. I det foregående eksempel så vi at man kan anvende radikalakse til at vise at fire punkter ligger på en cirkel, men man kan også benytte radikalakser til meget andet. Fx kan man vise at to linjer står vinkelret på hinanden ved at vise at den ene er linjen gennem centrum af to cirkler, mens den anden er cirklernes radikalakse.

Radikalcentrum kan fx benyttes til at vise at tre linjer skærer hinanden i samme punkt, hvis man kan vise at de tre linjer er radikalakser for hvert par af tre cirkler.

Opgave 4.6.1. To cirkler ω_1 og ω_2 skærer hinanden i punkterne M og N. Vis at hvis rektanglet $ABCD$ er placeret så A og C ligger på ω_1, og B og D ligger på ω_2, så vil skæringspunktet mellem rektanglets diagonaler ligge på linjen MN.

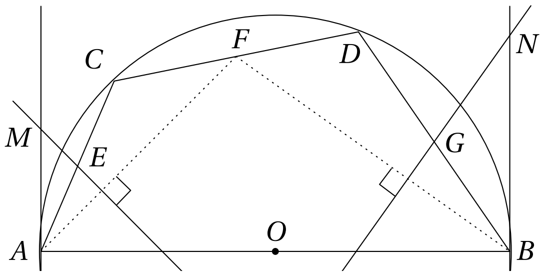


Opgave 4.6.2. Lad ABC være en trekant, og lad trekanterne $\triangle BCD$, $\triangle CAE$ og $\triangle ABF$ være ligebenede trekanter med henholdsvis BC, CA og AB som grundlinje, så disse tre trekanter ligger uden for trekant ABC. Vis at de tre linjer gennem henholdsvis A, B og C som står vinkelret på henholdsvis EF, FD og DE, skærer hinanden i samme punkt.

Opgave 4.6.3. Punkterne P, Q, R og S ligger på cirklen ω i denne rækkefølge så PQ og RS ikke er parallelle. Lad L være mængden af punkter I for hvilke der findes en cirkel ω_1 gennem P og Q samt en cirkel ω_2 gennem R og S så de to cirkler tangerer hinanden i I. Beskriv punktmængden L. *Hint*: 36

Opgave 4.6.4. Punkterne C, E, D og F ligger på en cirkel med centrum O i denne rækkefølge, og korderne CD og EF skærer hinanden i punktet N. Tangenterne til cirklen i C og D skærer hinanden i punktet A, og tangenterne til cirklen i E og F skærer hinanden i B. Vis at ON står vinkelret på AB.

Opgave 4.6.5. Lad AB være diameter i halvcirklen c med centrum O, og C og D to punkter på c så A, C, D og B er fire forskellige punkter der ligger på c i den nævnte rækkefølge. Midtpunkterne af henholdsvis AC, CD og DB betegnes E, F og G. Linjen gennem E vinkelret på AF skærer tangenten til c i A i punktet M, og linjen gennem G vinkelret på FB skærer tangenten til c i B i punktet N. Lad cirklerne ω_1, ω_2 og ω_3 have henholdsvis AO, BO og EG som diameter.



i) Bevis at radikalaksen for ω_1 og ω_3 er ME, samt at radikalaksen for ω_2 og ω_3 er NG. *Hint*: 262

ii) Find radikalcentrum for c, ω_1 og ω_3 samt radikalcentrum for c, ω_2 og ω_3. *Hint*: 200

iii) Vis at MN er parallel med CD.

4.7 Multiplikation omkring et punkt

I dette afsnit gives en kort introduktion til den affine afbildning *multiplikation omkring et punkt* samt eksempler på hvordan denne afbildning kan bruges i løsningen af geometriopgaver. Vi beviser ikke den centrale sætning 4.7.1 da det kræver en grundigere indføring i affine afbildninger. Samtidig præsenterer vi en del kendte geometriske resultater som forholdsvis nemt kan bevises ved multiplikation omkring et punkt.

Definition af multiplikation omkring et punkt

Multiplikation omkring punktet O med *multiplikationsfaktoren* k er en afbildning af planen i sig selv hvor et punkt P afbildes i punktet P' så

$$\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}.$$

I det følgende ser vi bort fra tilfældet $k = 0$.

Hvis $k = 1$ er det blot identitetsafbildningen, mens fx $k = -1$ giver en drejning på 180° om O.

multiplikation omkring et punkt *homothety*
multiplikation omkring O med multiplikationsfaktor k *homothety with center O and ratio k*

Sætning 4.7.1. Egenskaber ved en multiplikation omkring et punkt

i) Ved multiplikation omkring et punkt afbildes en linje i en linje parallel med linjen.

ii) Multiplikation omkring et punkt bevarer vinkler.

ii) Alle figurer afbildes i ligedannede figurer.

iv) For to cirkler med forskellige radier findes netop ét punkt og en multiplikation omkring dette med positiv multiplikationsfaktor som afbilder den ene cirkel i den anden.

v) For to cirkler findes netop ét punkt og en multiplikation med negativ multiplikationsfaktor som afbilder den ene cirkel i den anden.

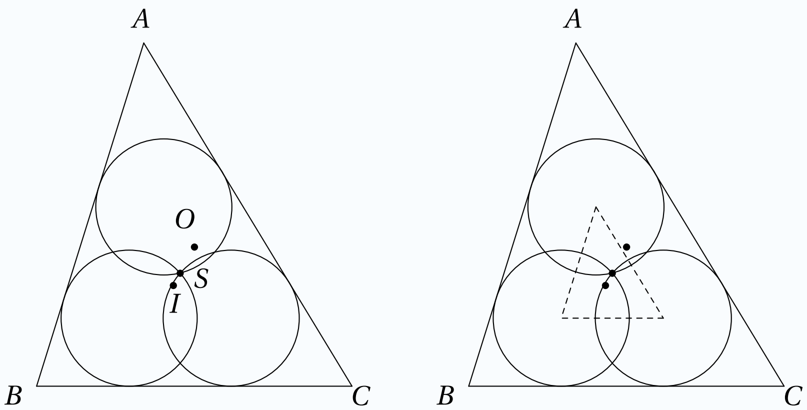
vi) For to ensvinklede trekanter som ikke er kongruente, og hvor ensliggende sider er parallelle, findes netop ét punkt og en multiplikation omkring dette som afbilder den ene trekant i den anden.

vii) Sammensætningen af to multiplikationer om to punkter hvor produktet af de to multiplikationsfaktorer ikke er 1, er igen en multiplikation omkring et punkt, og multiplikationsfaktoren er produktet af de to multiplikationsfaktorer.

Eksempel 4.7.1. Multiplikation og punkter på linje

Multiplikation omkring et punkt kan fx benyttes til at vise at tre punkter ligger på linje, ved at vise at en multiplikation omkring et af punkterne kan afbilde det andet punkt i det tredje.

Hvis vi fx betragter tre cirkler med samme radius som skærer hinanden i et fælles punkt S, og den trekant ABC der opstår ved at tegne tangenter som vist på figuren, kan vi vise at S, centrum I for den indskrevne cirkel og centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linje.



Trekanten som opstår når man forbinder centrene for de tre cirkler, har parvis parallelle sider med trekant ABC da de tre cirkler har samme radius.

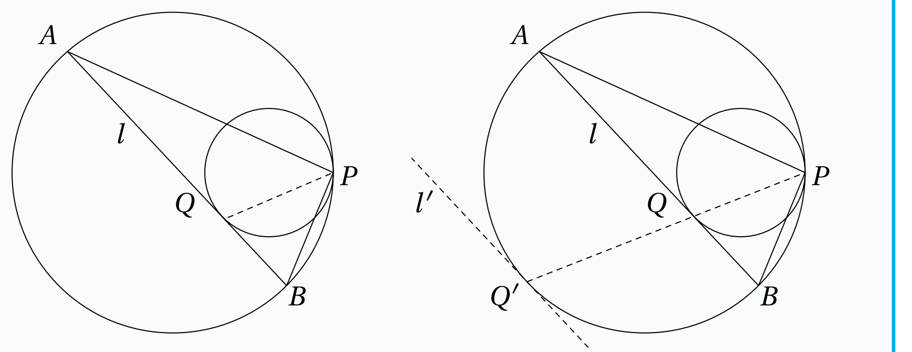
Da I er skæringspunktet mellem vinkelhalveringslinjerne i trekant ABC, og de tre centre ligger på disse vinkelhalveringslinjer, må I være centrum for den multiplikation som afbilder den lille trekant i trekant ABC. Punktet S er centrum for den omskrevne cirkel til den lille trekant da de tre cirkler har samme radius, og dermed afbildes S i O. Dette viser at I, S og O ligger på samme linje.

Eksempel 4.7.2. Multiplikation og vinkler

Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise noget om vinkler fx ved at udnytte sætningen om periferivinkler i en cirkel.

Betragt en cirkel C_1 som tangerer en cirkel C_2 indvendigt i punktet P. Lad l være en tangent til C_1 i et punkt Q forskelligt fra P. Linjen l skærer C_2 i henholdsvis A og B. Vi ønsker at vise at PQ er vinkelhalveringslinje i trekant APB.

Multiplikationen omkring punktet P som fører C_1 i C_2, fører Q i Q' og tangenten l til C_1 i en tangent l' til C_2 i punktet Q'.



Da l og l' er parallelle, og l' er tangent til C_2, er cirkelbuerne $\overset{\frown}{AQ'}$ og $\overset{\frown}{BQ'}$ lige store. Derfor er $\angle APQ' = \angle BPQ'$, og altså PQ vinkelhalveringslinje i trekant APB.

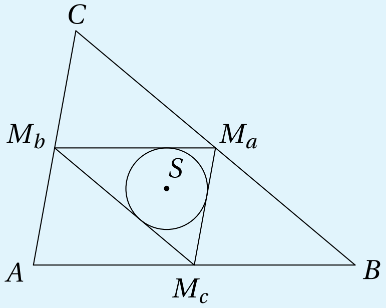
Bemærkning. Multiplikation omkring et punkt kan også benyttes til at vise at nogle punkter ligger på samme cirkel, fx ved at finde en multiplikation som afbilder punkterne i en allerede kendt cirkel. Man kan også vha. af multiplikation omkring et punkt vise at to linjer er parallelle, ved at finde en multiplikation der afbilder den ene i den anden, og man kan benytte multiplikation omkring et punkt til at bestemme forholdet mellem forskellige linjestykker ud fra multiplikationsfaktoren. I de følgende opgaver kan du selv prøve kræfter med dette.

Opgave 4.7.1. To cirkler ω_1 og ω_2 med samme radius tangerer en større cirkel ω indvendigt i henholdsvis A_1 og A_2. Lad M være et punkt på ω forskelligt fra A_1 og A_2, og lad B_1 og B_2 være skæringspunkterne mellem henholdsvis MA_1 og ω_1 og mellem MA_2 og ω_2. Vis at B_1B_2 er parallel med A_1A_2. *Hint*: 155

Opgave 4.7.2. En cirkel ω_1 tangerer en cirkel ω_2 indvendigt i punktet A. En linje l skærer de to cirkler i punkterne M, N, P og Q så punkterne ligger i nævnte rækkefølge på linjen. Vis at $\angle MAN = \angle PAQ$.

Definition af Spieker-cirkel og Spieker-centrum

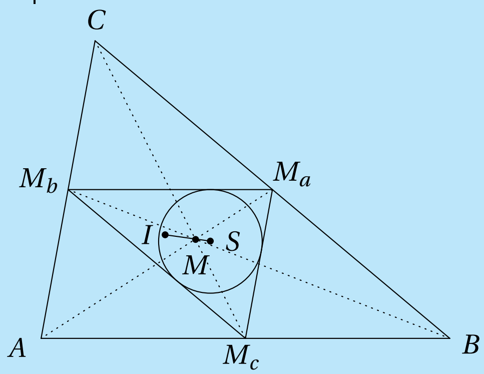
Lad ABC være en trekant, og kald midtpunkterne af siderne BC, AC og AB for henholdsvis M_a, M_b og M_c. Trekant ABC's *Spieker-cirkel* er den indskrevne cirkel til trekant $M_aM_bM_c$, og trekantens *Spieker-centrum* er centrum for dens Spieker-cirkel.



Spieker-cirkel *Spieker circle*
Spieker-centrum *Spieker centre*

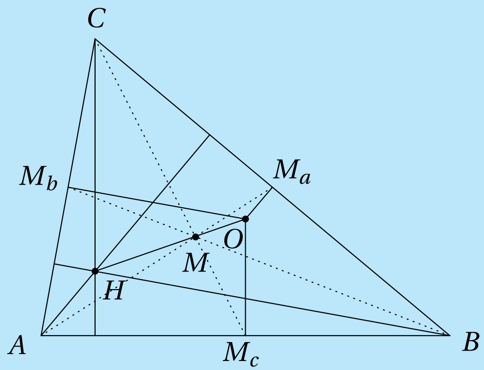
Sætning 4.7.2. Spieker-centrum

I en trekant ligger centrum I for trekantens indskrevne cirkel, medianernes skæringspunkt M og dens Spieker-centrum S på en linje, og M deler SI så $2|MS| = |MI|$.



Sætning 4.7.3. Eulerlinjen

I en trekant ligger højdernes skæringspunkt H, centrum for den omskrevne cirkel O og medianernes skæringspunkt M på en linje som kaldes *Eulerlinjen*, og M deler HO så $2|MO| = |MH|$.



Eulerlinjen *the Euler line*

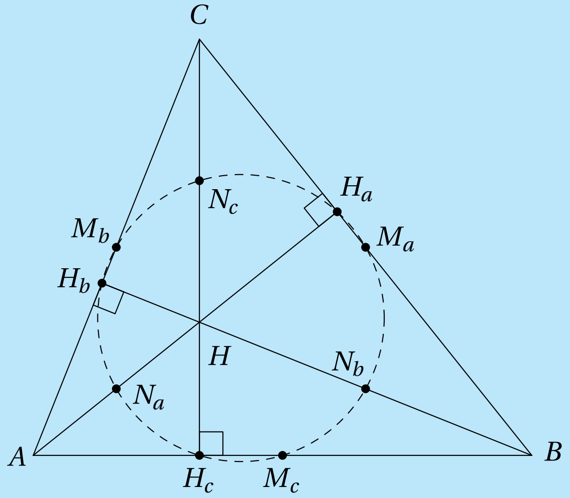
Opgave 4.7.3. Bevis sætning 4.7.2 om Spieker-centrum og sætning 4.7.3 om Eulerlinjen. *Hint*: 87

Opgave 4.7.4. Punktet P er et indre punkt i en spidsvinklet trekant ABC, og X, Y og Z er projektionerne af P på henholdsvis a, b og c. Cirklen gennem X, Y og Z skærer henholdsvis a, b og c i tre nye punkter X_1, Y_1 og Z_1. Vis at linjerne gennem henholdsvis X_1, Y_1 og Z_1 vinkelret på henholdsvis a, b og c skærer hinanden i et punkt. *Hint*: 141

Sætning 4.7.4. Nipunktscirklen

Lad ABC være en trekant hvor H_a, H_b og H_c er fodpunkterne for højderne, M_a, M_b og M_c er midtpunkterne af trekantens tre sider, og N_a, N_b og N_c er midtpunkterne af henholdsvis HA, HB og HC, hvor H er højdernes skæringspunkt.

De ni punkter H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, N_a, N_b og N_c ligger på en cirkel. Denne cirkel kaldes *nipunktscirklen*.



nipunktscirklen *the nine-point circle*

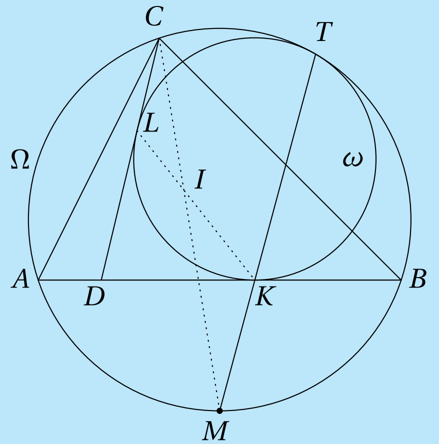
Opgave 4.7.5. Bevis sætning 4.7.4 om nipunktscirklen. *Hint*: 226

Opgave 4.7.6. En cirkel ω_1 tangerer en cirkel ω_2 indvendigt i punktet A. Om to forskellige linjer gennem A oplyses at den ene skærer ω_1 og ω_2 i henholdsvis X_1 og X_2, og den anden skærer ω_1 og ω_2 i henholdsvis Y_1 og Y_2. Linjerne X_1Y_2 og X_2Y_1 skærer hinanden i punktet B. Vis at hvis B ligger på ω_1, da tangerer den omskrevne cirkel til BX_2Y_2 cirklen ω_1. *Hint*: 231

Den næste sætning viser nogle interessante egenskaber om cirkler der tangerer trekantens omskrevne cirkel og mindst en af trekantens sider.

Sætning 4.7.5. Cirkel der tangerer trekantens omskrevne cirkel

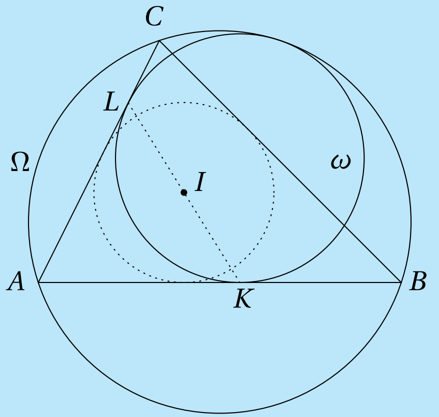
Lad ABC være en trekant, og betragt en cirkel ω der tangerer den omskrevne cirkel Ω til trekant ABC i T og siden AB i K. Lad yderligere D være et punkt på siden AB så CD tangerer ω, og kald røringspunktet for L. Kald desuden skæringspunktet mellem TK og Ω for M, og skæringspunktet mellem LK og CM for I.



Da er M superpunktet , og I er centrum for den indskrevne cirkel.

Opgave 4.7.7. Vis sætning 4.7.5 ved at følge disse skridt: i) Vis at M er superpunktet, og at $\triangle TMB \sim \triangle BMK$. ii) Vis at firkant $CLIT$ er indskrivelig. iii) Vis at $\triangle MKI \sim \triangle MIT$. vi) Kombiner $\triangle TMB \sim \triangle BMK$, $\triangle MKI \sim \triangle MIT$ og viden om superpunktet til at konkludere at I er centrum for den indskrevne cirkel.

Korollar 4.7.6. Lad ABC være en trekant med omskreven cirkel Ω, og lad ω være den cirkel der tangerer siderne AB, AC og Ω. Kald røringspunkterne mellem ω og AB og AC for henholdsvis K og L.



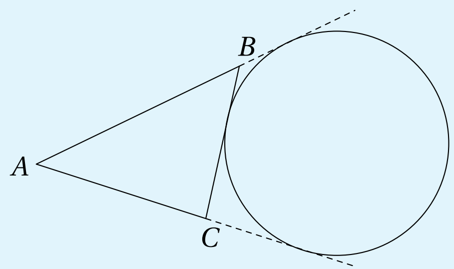
Da er centrum I for den indskrevne cirkel til trekant ABC midtpunktet af KL.

Bevis. Fra sætning 4.7.5 får vi ved at lade $D = A$ at I ligger på KL. Da I også ligger på vinkelhalveringslinjen fra A, som deler KL på midten da K og L er røringspunkter for en cirkel der tangerer AB og AC, må I være midtpunktet af KL. □

4.8 Trekantens ydre røringscirkler

Definition af trekantens ydre røringscirkler

En trekant ABC har tre *ydre røringscirkler*, én for hver side i trekanten. Den ydre røringscirkel til siden BC er en cirkel der ligger uden for trekanten, og som tangerer siden BC samt forlængelserne af AB og AC.

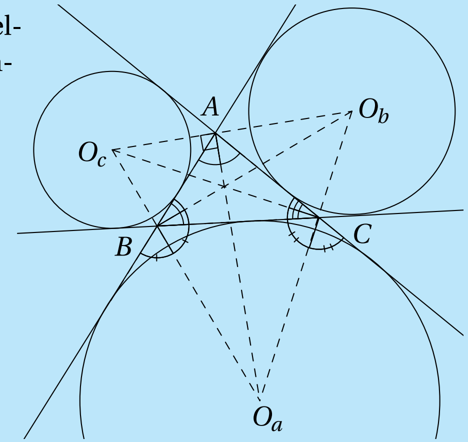


ydre røringscirkel *excircle*
centrum for den ydre røringscirkel *excenter*

Sætning 4.8.1. De ydre røringscirklers centre

Centrum for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC er skæringspunktet for vinkelhalveringslinjen til vinkel A og de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

De tre ydre røringscirklers centre danner en trekant i hvilken vinkelhalveringslinjerne for trekant ABC er højder.

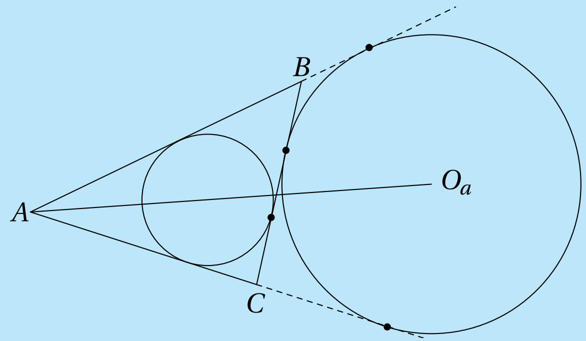


Bevis. Da den ydre røringscirkel til siden BC tangerer BC samt forlængelserne af AB og AC, må dens centrum ligge i samme afstand til disse tre linjer. Fordi vinkelhalveringslinjen er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til de to vinkelben, må den ydre røringscirkels centrum ligge på vinkelhalveringslinjen til vinkel A samt de ydre vinkelhalveringslinjer til vinkel B og vinkel C.

Af dette ses at de ydre røringscirklers centre O_a, O_b og O_c danner en trekant hvis sider går gennem henholdsvis A, B og C. Vinkelhalveringslinjen til vinkel A står vinkelret på siden O_bO_c, da $\angle BAO_a = \angle CAO_a$ og $\angle O_bAC = \angle O_cAB$. Dermed er O_aA højde i trekant $O_aO_bO_c$. □

Opgave 4.8.1. Lad T være den ydre røringscirkel til trekant ABC modsat A. Lad O_a være dens centrum, og E og F dens røringspunkter med henholdsvis AB og AC. Lad yderligere J være skæringspunktet mellem BO_a og EF. Vis at $\angle BJC$ er ret. *Hint*: 65

Sætning 4.8.2. Den ydre røringscirkels røringspunkter Lad ABC være en trekant, s den halve omkreds og ω_a den ydre røringscirkel til siden BC.



Afstanden fra A til røringspunkterne mellem ω_a og forlængelserne af siderne AB og AC er s, dvs. potensen af A mht. ω_a er s^2.

Røringspunktet mellem BC og den indskrevne cirkel og røringspunktet mellem BC og den ydre røringscirkel ω_a ligger på linjestykket BC symmetrisk omkring dets midtpunkt.

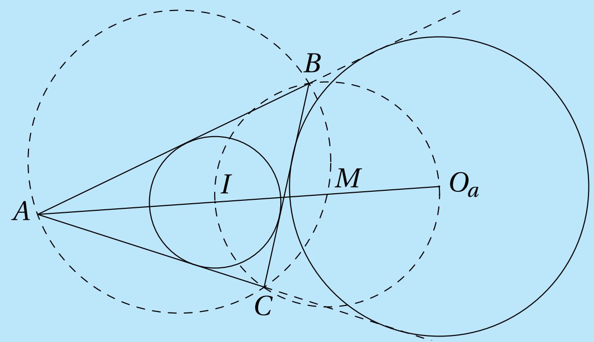
Opgave 4.8.2. Vis sætning 4.8.2.

Opgave 4.8.3. Den ydre røringscirkel til vinkel A i trekant ABC rører siden BC i punktet D. Den ydre røringscirkel til vinkel B i trekant ABD rører siden AD i punktet P, og den ydre røringscirkel til vinkel C i trekant ACD rører siden AD i punktet Q. Undersøg hvornår $P = Q$. *Hint*: 79

Opgave 4.8.4. Lad $ABCD$ være et trapez hvor AB er parallel med CD, og $|AD| = |BC|$. Lad yderligere E være røringspunktet mellem den indskrevne cirkel til trekant BCD og siden CD. Punktet F ligger på vinkelhalveringslinjen til $\angle DAC$ så EF står vinkelret på CD. Den omskrevne cirkel til trekant ACF skærer linjen CD i punkterne C og G. Vis at trekant AFG er ligebenet. *Hint*: 181

Sætning 4.8.3. Den ydre røringscirkel og superpunktet

Lad ABC være en trekant, ω_a den ydre røringscirkel til siden BC med centrum O_a, I centrum for den indskrevne cirkel, og M superpunktet til vinkel A, dvs. skæringspunktet mellem den omskrevne cirkel til trekant ABC og vinkelhalveringslinjen fra A.



Punkterne B, I, C og O_a ligger på en cirkel med M som centrum.

Der gælder at $|AI||AO_a| = |AB||AC|$.

Opgave 4.8.5. Vis sætning 4.8.3. *Hint*: 70

Opgave 4.8.6. Lad I være centrum for den indskrevne cirkel i trekant ABC, og lad Γ være trekantens omskrevne cirkel. Lad linjen AI skære Γ i et punkt D forskelligt fra A. Lad E være et punkt på cirkelbuen CD som ikke indeholder A, og lad F være et punkt på siden BC så $\angle BAF = \angle CAE$. Lad yderligere G være midtpunktet af linjestykket IF. Vis at linjerne DG og EI skærer hinanden på Γ. (IMO 2010) *Hint*: 17, 229, 125

4.9 Cevas og Menelaos' sætninger

Definition af cevian

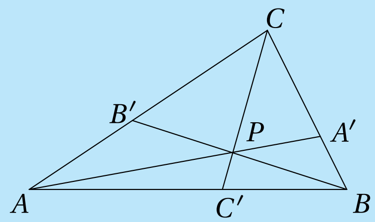
En *cevian* er en linje i en trekant fra en vinkelspids til den modstående side eller dens forlængelse. Fx er højder, medianer og vinkelhalveringslinjer alle cevianer.

cevian *cevian*

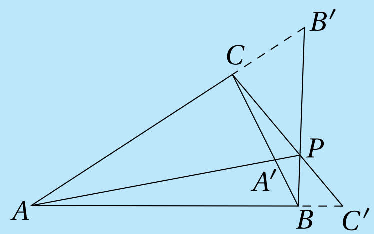
Sætning 4.9.1. Cevas sætning

Cevas sætning siger at cevianerne AA', BB' og CC', hvor A' ligger på BC osv., skærer hinanden i samme punkt netop hvis

$$\frac{|AC'|}{|C'B|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} = 1.$$



Cevas sætning gælder også hvis nogle af cevianerne går fra en vinkelspids til et punkt på forlængelsen af modstående side. I dette tilfælde er det dog nødvendigt at regne længderne med fortegn så postiv retning er AB, BC og CA. Hvis C' fx ligger på forlængelsen af AB tættest på B, da er $|C'B|$ negativ.

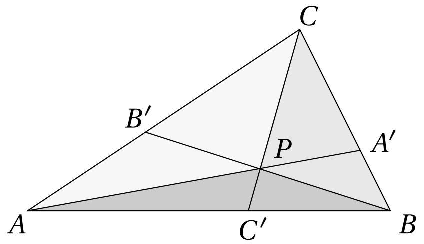


Cevas sætning *Ceva's theorem*

Bevis. Her beviser vi kun sætningen i tilfældet hvor alle tre cevianer ligger inden for trekanten. Hvis nogle af cevianerne falder uden for trekanten, foregår beviset stort set på samme måde.

Først viser vi at hvis de tre cevianer går gennem samme punkt, så vil

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$



Antag at cevianerne går gennem samme punkt P. Der gælder at hvis to trekanter har samme højde, da er forholdet mellem arealerne det samme som forholdet mellem grundlinjerne. Lad $T(\triangle ABC)$ betegne arealet af en trekant. Dermed er

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle ABB')}{T(\triangle CBB')} \quad \text{og} \quad \frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle APB')}{T(\triangle B'PC)}.$$

Samlet får vi

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}=\frac{T(\triangle ABB')-T(\triangle APB')}{T(\triangle CBB')-T(\triangle B'PC)}=\frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}.$$

Her har vi benyttet brøkregnereglen der siger at hvis $\frac{s}{t}=\frac{u}{v}$, er $\frac{s}{t}=\frac{s-u}{t-v}$, når $t\neq v$. Tilsvarende fås

$$\frac{|BC'|}{|C'A|}=\frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)} \quad \text{og} \quad \frac{|CA'|}{|A'B|}=\frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}.$$

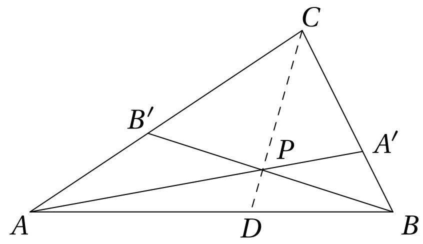
Samlet giver dette

$$\frac{|AB'|}{|B'C|}\cdot\frac{|BC'|}{|C'A|}\cdot\frac{|CA'|}{|A'B|}=\frac{T(\triangle ABP)}{T(\triangle BPC)}\cdot\frac{T(\triangle BCP)}{T(\triangle CPA)}\cdot\frac{T(\triangle CAP)}{T(\triangle APB)}=1.$$

Nu viser vi den modsatte vej. Antag at

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$

Kald skæringspunktet mellem AA' og BB' for P, og betragt cevianen CD fra C gennem P.



Da cevianerne AA', BB' og CD går gennem samme punkt, gælder ifølge det vi lige har vist, at

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1.$$

Ifølge vores antagelse er

$$\frac{|AC'|}{|C'B|}\cdot\frac{|BA'|}{|A'C|}\cdot\frac{|CB'|}{|B'A|}=1,$$

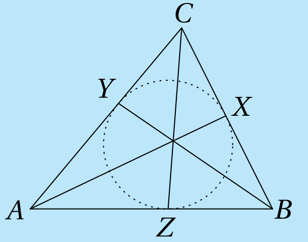
dvs. at $\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{|AC'|}{|C'B|}$. Af dette ses at D og C' er samme punkt, og dermed at cevianerne AA', BB' og CC' skærer hinanden i samme punkt P. □

Opgave 4.9.1. Vi har tidligere benyttet sætningen om midtnormaler til at bevise at højderne skærer hinanden i samme punkt. Benyt nu i stedet Cevas sætning til at bevise dette.

Opgave 4.9.2. I trekant ABC er P og Q punkter på henholdsvis siden AB og siden AC så PQ er paralleltransversal i trekant ABC, og X er skæringspunktet mellem BQ og CP. Vis at AX deler linjestykket BC på midten.

Sætning 4.9.2. Gergonnepunktet

I en trekant ABC tangerer den indskrevne cirkel siderne siderne BC, AC og AB i henholdsvis X, Y g Z. Linjerne AX, BY og CZ skærer hinanden i et punkt, og dette punkt kaldes trekantens *Gergonnepunkt*.



Opgave 4.9.3. Bevis sætning 4.9.2 om Gergonnepunktet.

Sætning 4.9.3. Røringspunkterne for de ydre røringscirkler

I trekant ABC indtegnes tre cevianer fra vinkelspidserne til røringspunkterne for de tre ydre røringscirkler. Disse tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 4.9.4. Vis sætning 4.9.3.

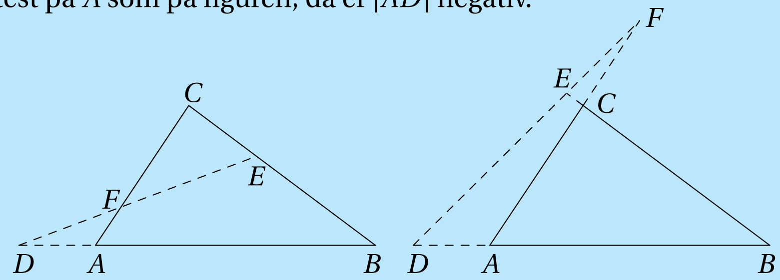
Opgave 4.9.5. I trekant ABC er AD vinkelhalveringslinje og AH højde, og P og Q er projektionerne af D på henholdsvis AC og AB. Vis at AH, BP og CQ skærer hinanden i et punkt.

Sætning 4.9.4. Menelaos' sætning

Lad ABC være en trekant. Menelaos' sætning siger at tre punkter D, E og F som ligger på henholdsvis linjen AB, linjen BC og linjen CA, ligger på samme linje netop hvis

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1.$$

Her regnes linjestykkerne ligesom ved Cevas sætning med fortegn så positiv retning er AB, BC og CA. Hvis D fx ligger på forlængelsen af AB tættest på A som på figuren, da er $|AD|$ negativ.

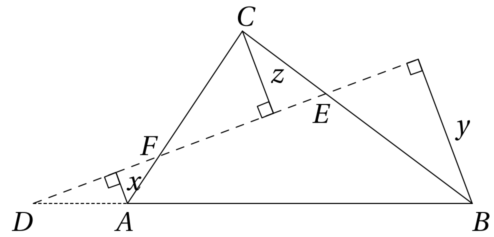


Menelaos' sætning *Menelaus' theorem*

Bevis. Antag først at punkterne D, E og F ligger på samme linje. Bemærk at da denne linje skærer trekanten nul eller to gange, vil der i udtrykket

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}$$

være enten netop én eller netop tre længder med negativt fortegn, dvs. udtrykket er altid negativt. Hvis vi kun regner med positive længder, er det derfor nok at vise at udtrykket er lig med 1. Lad x være afstanden fra A til projektionen af A på linjen DEF, y være afstanden fra B til projektionen af B på linjen DEF og z være afstanden fra C til projektionen af C på linjen DEF, som vist på figuren.



Ensvinklede trekanter giver at

$$\frac{|AD|}{|DB|}=\frac{x}{y},\quad \frac{|BE|}{|EC|}=\frac{y}{z}\quad \text{og}\quad \frac{|CF|}{|FA|}=\frac{z}{x},$$

og dette er uafhængigt af om linjen DEF skærer trekanten to eller nul gange.

Dermed er

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1,$$

når vi regner med fortegn.

Antag omvendt at der om D, E og F gælder at

$$\frac{|AD|}{|DB|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1.$$

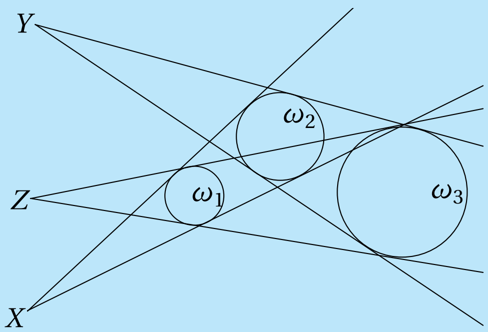
Lad D' være skæringspunktet mellem EF og AB. Da ved vi fra før at

$$\frac{|AD'|}{|D'B|}\cdot\frac{|BE|}{|EC|}\cdot\frac{|CF|}{|FA|}=-1,$$

og dermed må $D=D'$, dvs. D, E og F ligger på linje. □

Sætning 4.9.5. Monges sætning

Lad ω_1, ω_2 og ω_3 være cirkler som ikke skærer hinanden eller ligger inden i hinanden, og som har forskellige radier. Lad X være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_2 som har cirklerne på samme side af tangenten, lad tilsvarende Y være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_2 og ω_3 som har cirklerne på samme side af tangenten, og Z være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_3 som har cirklerne på samme side af tangenten.



Da ligger punkterne X, Y og Z på linje.

Opgave 4.9.6. Vis sætning 4.9.5.

Sætning 4.9.6. Monge-d'Alemberts sætning

Lad ω_1, ω_2 og ω_3 være cirkler som ikke skærer hinanden eller ligger inden i hinanden, og som har forskellige radier. Lad X være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_2 som har cirklerne på samme side af tangenten, lad Y være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_2 og ω_3 som har cirklerne på hver sin side af tangenten, og Z være skæringspunktet mellem de to tangenter til ω_1 og ω_3 som har cirklerne på hver sin side af tangenten. Da ligger punkterne X, Y og Z på linje.

Opgave 4.9.7. Vis sætning 4.9.6

4.10 Trekantens formler

Sætning 4.10.1. Radius i den omskrevne cirkel

Lad R være radius i den omskrevne cirkel til trekant ABC, og T arealet af trekanten. Da er

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

og

$$4RT = abc.$$

Opgave 4.10.1. Vis sætning 4.10.1.

Sætning 4.10.2. Radius i den indskrevne og omskrevne cirkel

Lad ABC være en trekant, og lad r være radius i den indskrevne cirkel og R radius i den omskrevne cirkel til trekanten. Da gælder at

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{1}{2rR}.$$

Opgave 4.10.2. Vis sætning 4.10.2.

Sætning 4.10.3. Herons formel

Arealet T af en trekant ABC, hvor s betegner den halve omkreds, kan beregnes ud fra trekantens sidelængder vha. Herons formel:

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Herons formel *Heron's formula*

Bevis. Ifølge cosinusrelationen er

$$(2bc)^2 \cos^2 A = (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

Vi ved at $4T = 2bc \sin A$, og ved kvadrering $16T^2 = (2bc)^2 \sin^2 A$. Desuden er $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$. Samlet giver dette

$$\begin{aligned}
16T^2 &= (2bc)^2 - (2bc)^2 \cos^2 A \\
&= (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \\
&= (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\
&= ((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
&= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) \\
&= 16s(s-a)(s-b)(s-c).
\end{aligned}$$

Hermed er Herons formel bevist. □

Sætning 4.10.4. Radierne i de ydre røringscirkler

For en trekant ABC betegner T arealet, s den halve omkreds, r radius i den indskrevne cirkel og r_a, r_b og r_c radierne i de tre ydre røringscirkler mht. henholdsvis A, B og C. Da gælder at

$$T = r_a(s-a) \quad \text{og} \quad T^2 = r\, r_a r_b r_c.$$

Opgave 4.10.3. Vis sætning 4.10.4.

Opgave 4.10.4. Højderne i en trekant er 12, 15 og 20. Hvad er arealet af trekanten? (Baltic Way 2006)

Opgave 4.10.5. Vis at der findes uendeligt mange trekanter hvor sidelængderne er tre på hinanden følgende hele tal, og arealet af trekanten er et helt tal. (NMC 1995) *Hint*: 93, 32

4.11 Inversion

Inversion er en bestemt type transformation af planen, og ved at benytte inversion på en geometrisk problemstilling omformer man problemstillingen til en anden ækvivalent problemstilling. Inversion er derfor et interessant redskab i nogle typer geometriopgaver. Dette afsnit er en indføring i inversion, de centrale egenskaber ved inversion samt hvordan man kan benytte inversion.

Definition af inversion

Lad Ω være en cirkel med centrum O og radius r. *Inversion* i denne cirkel er en afbildning af planen, fraregnet punktet O, på sig selv. Et punkt A, $A \neq O$, afbildes i det punkt A' som ligger på halvlinjen fra O gennem A, og som opfylder at $|OA||OA'| = r^2$.

Bemærk at afbildningen fikserer cirklen Ω og afbilder dens indre på dens ydre og omvendt. Deraf navnet.

Det er oplagt at inversionsafbildningen er sin egen inverse. Den er desuden kontinuert hvilket vi ikke vil komme nærmere ind på her.

Man kan på helt tilsvarende vis definere inversion i en kugle i rummet.

inversion *inversion*

Det interessante ved inversion er at den afbilder linjer og cirkler i linjer og cirkler, samt at den bevarer vinkler mellem kurver, hvilket vi skal se nærmere på når det drejer sig om linjer og cirkler.

I det følgende ser vi på inversion i en cirkel med centrum O og radius r, og vi betegner billedet af et punkt A med A', billedet af en cirkel α med α', osv.

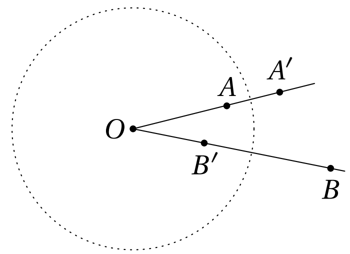
Sætning 4.11.1. Vinkler og afstande

To punkter A og B, begge forskellige fra O, afbildes i punkterne A' og B' så

$$\angle OA'B' = \angle OBA \quad \text{og} \quad |A'B'| = \frac{r^2}{|OA||OB|}|AB|.$$

Bevis. Vi viser at $\triangle OAB$ er ensvinklet med $\triangle OB'A'$ med forholdet $\frac{r^2}{|OA||OB|}$, da det viser sætningen.

Først bemærker vi at $\angle AOB = \angle A'OB'$.
Desuden er



$$|OA'| = \frac{r^2}{|AO|} = \frac{r^2}{|OA||OB|}|OB| \quad \text{og}$$

$$|OB'| = \frac{r^2}{|OA||OB|}|OA|,$$

hvilket giver det ønskede. □

Sætning 4.11.2. Linjer og cirkler

Inversion afbilder som sagt linjer og cirkler i linjer og cirkler. Mere præcist gælder:

i) En linje gennem O afbildes på sig selv.

ii) En linje som ikke går gennem O, afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med linjen.

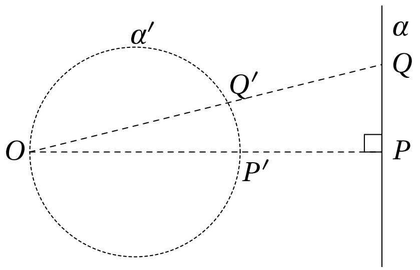
iii) En cirkel gennem O afbildes på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i O.

iv) En cirkel som ikke går gennem O, afbildes på en cirkel som ikke går gennem O.

Bevis.

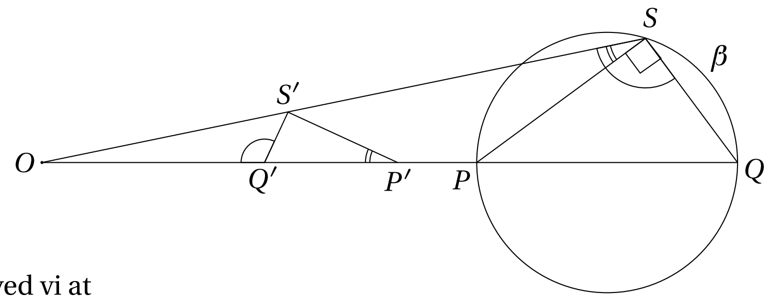
i) En linje gennem O afbildes oplagt på sig selv.

ii) Lad α være en linje som ikke går gennem O, og betragt projektionen P af O på α. Påstanden er nu at α' er cirklen med diameter OP'. Lad Q være et punkt på α. Da gælder at $\angle OQ'P' = \angle OPQ = 90°$, dvs. at Q' ligger på cirklen med diameter OP'. Der gælder dermed at α afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med α.



iii) Tilsvarende afbildes en cirkel gennem O på en linje som er parallel med tangenten til cirklen i O da inversion er sin egen inverse.

iv) Lad β være en cirkel som ikke går gennem O, og betragt linjen l gennem O og centrum af β. Linjen l skærer β i punkterne P og Q, og disse er forskellige fra O da β ikke går gennem O. Vi viser nu at β afbildes i cirklen med $P'Q'$ som diameter. Betragt et punkt S på β forskelligt fra P og Q.



Da ved vi at

$$\begin{aligned}\angle Q'S'P' &= 180° - \angle P'Q'S' - \angle S'P'Q' = \angle S'Q'O - \angle S'P'O \\ &= \angle QSO - \angle PSO = \angle PSQ = 90°,\end{aligned}$$

hvor vi til slut har udnyttet at PQ er diameter i β. Altså ligger S' på cirklen med diameter $P'Q'$, og dette viser at en cirkel som ikke går gennem O, afbildes i en cirkel som ikke går gennem O. □

Bemærkning. Det er vigtigt at bemærke at hvis α er en cirkel som ikke går gennem O, da er billedet af dens centrum ikke centrum i α', med mindre dette centrum ligger på inversionscirklen.

Nu vil vi vise at vinkler mellem linjer og cirkler bevares ved inversion, men først beviser vi at tangens mellem linjer og cirkler bevares ved inversion.

Sætning 4.11.3. Tangens mellem linjer og cirkler
En linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i punktet P, $P \neq O$, afbildes ved inversion på en linje og en cirkel eller to cirkler som tangerer i P'.

Bevis. Da antallet af skæringspunkter forskellig fra O bevares ved inversion, følger det let. □

Opgave 4.11.1. Lad α være en cirkel som ikke går gennem O. Vis at centrum af α, centrum af α' og O ligger på linje.

Opgave 4.11.2. Lad ABC være en trekant, og lad s betegne den halve omkreds. Vis at den ydre røringscirkel til siden c afbildes på sig selv ved inversion i en cirkel med centrum C og radius s.

Sætning 4.11.4. Vinkler bevares ved inversion

Vinklen mellem to linjer, vinklen mellem en linje og en cirkel samt vinklen mellem to cirkler bevares ved inversion. (Vinklen mellem to cirkler der skærer hinanden, er vinklen mellem de to tangenter i skæringspunktet.)

Bevis. Hvis to linjer skærer i punktet O, bevares vinklen oplagt ved inversion.

Lad α og β være to linjer som skærer hinanden i P, $P \neq O$. Da vil α' og β' have netop to skæringspunkter P' og O. Vinklen mellem α' og β' i P' vil være lig med vinklen mellem dem i O. Da en linje gennem O afbildes på sig selv, og en linje der ikke går gennem O, afbildes på en cirkel gennem O hvis tangent i O er parallel med linjen, vil vinklen mellem α' og β' i O være lig med vinklen mellem α og β i P.

Lad α være en linje og β en cirkel som skærer hinanden i P, $P \neq O$. Lad γ være tangenten til β i P. Da er vinklen mellem α og β i P lig med vinklen mellem α

og γ i P, som ifølge det vi lige har vist, er lig med vinklen mellem α' og γ' i P' som er lig med vinklen mellem α' og β' i P' da tangens bevares ved inversion. På tilsvarende vis ses at vinklen mellem to cirkler bevares ved inversion. □

Opgave 4.11.3. I en trekant ABC kaldes røringspunktet mellem den indskrevne cirkel og siden AB for M og røringspunktet mellem den indskrevne cirkel og siden AC for N. Vis at ved inversion i den indskrevne cirkel afbildes A i midtpunktet af linjestykket MN.

Eksempel 4.11.1. Nu skal vi se på hvorfor inversion i nogle sammenhænge er rigtig smart. Fx er Ptolemæus' ulighed helt ligetil hvis man inverterer problemstillingen.

Som vi så i afsnit 4.4, siger Ptolemæus' ulighed at der for en firkant $ABCD$ gælder at

$$|AB||CD| + |AD||BC| \geq |AC||BD|$$

med lighedstegn netop hvis firkant $ABCD$ er indskrivelig.

For at bevise sætningen inverterer vi i en cirkel med centrum i A og radius r. Dette giver

$$\begin{aligned}|AB||CD| + |AD||BC| &= \frac{r^2}{|AB'|}\frac{r^2}{|AC'||AD'|}|C'D'| + \frac{r^2}{|AD'|}\frac{r^2}{|AB'||AC'|}|B'C'| \\ &= \frac{r^4}{|AB'||AC'||AD'|}(|B'C'| + |C'D'|)\end{aligned}$$

og

$$|AC||BD| = \frac{r^2}{|AC'|}\frac{r^2}{|AB'||AD'|}|B'D'| = \frac{r^4}{|AB'||AC'||AD'|}|B'D'|.$$

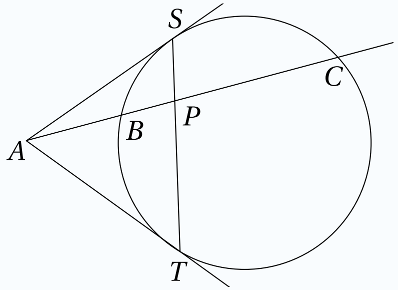
Ptolemæus' ulighed er i den inverterede situation derfor blot trekantsuligheden

$$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|,$$

hvor der gælder lighedstegn netop hvis B', C' og D' ligger på en linje i nævnte rækkefølge. I det ikke inverterede tilfælde er dette netop ækvivalent med at B, C og D ligger på en cirkel gennem A, så C ikke ligger ved siden af A, dvs. at firkant $ABCD$ er indskrivelig.

Eksempel 4.11.2. I en opgave fra NMC 2007 kan man med fordel benytte inversion.

En linje gennem A skærer en cirkel i to punkter, B og C, på en sådan måde at B ligger mellem A og C. Fra punktet A tegnes de to tangenter til cirklen. Tangenterne rører cirklen i punkterne S og T. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne ST og AC.

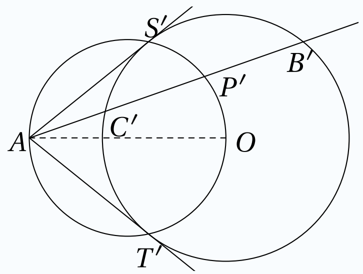


Vis at

$$\frac{|AP|}{|PC|} = 2\frac{|AB|}{|BC|}.$$

Allerførst skal vi overveje hvilket punkt vi skal invertere i. De to mest centrale punkter er P og A, og man kan faktisk invertere i dem begge med succes. Her ser vi på en inversion i A.

Ved inversion i en cirkel med centrum A og radius r afbildes linjerne gennem A på sig selv, linjen ST afbildes i en cirkel gennem A, og cirklen afbildes i en cirkel som tangerer linjerne AS' og AT' som vist på figuren.



Nu omregner vi den ligning vi skal vise, til det inverterede tilfælde:

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{r^2/|AP'|}{r^2|P'C'|/(|AP'||AC'|)} = \frac{|AC'|}{|P'C'|}$$

$$2\frac{|AB|}{|BC|} = 2\frac{r^2/|AB'|}{r^2|B'C'|/(|AB'||AC'|)} = 2\frac{|AC'|}{|B'C'|}.$$

Vi skal altså i det inverterede tilfælde blot vise den simplere sammenhæng at

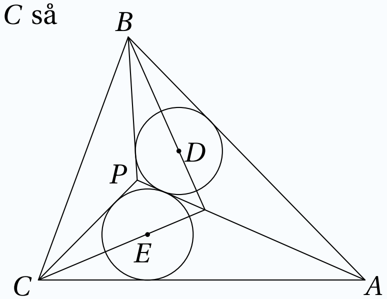
$$|B'C'| = 2|P'C'|.$$

Lad AO være diameter i cirkel $AS'P'T'$. Da er $\angle AS'O = \angle AT'O = 90°$, og derfor er O centrum i cirkel $B'T'C'S'$. Der gælder yderligere at $\angle AP'O = 90°$, hvilket betyder at radius fra O gennem P' i cirkel $B'T'C'S'$ står vinkelret på korden $C'B'$, og derfor deler den på midten. Altså er $|B'C'| = 2|P'C'|$ som ønsket.

Eksempel 4.11.3. I en opgave fra IMO 1996 er der en lidt special vinkelbetingelse som bliver meget simplere ved inversion. Opgaven lyder:

Lad P være et indre punkt i trekant ABC så

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$



Lad D og E være centrene for henholdsvis de indskrevne cirkler i trekant APB og trekant APC. Vis at linjerne AP, BD og CE skærer hinanden i et punkt.

Først bemærker vi at linjen BD er vinkelhalveringslinjen fra B i trekant ABP, og det er kendt at vinkelhalveringslinjen deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de to hosliggende sider. Linjen BD deler altså linjestykket AP i forholdet $|AB|/|BP|$. På tilsvarende vis ses at linjen CE deler linjestykket AP i forholdet $|AC|/|PC|$. At vise at de tre linjer BD, CE og AP går gennem samme punkt, er altså ækvivalent med at vise at

$$\frac{|AB|}{|BP|} = \frac{|AC|}{|PC|}.$$

Nu skal vi overveje hvilket centrum vores inversionscirkel skal have. I dette tilfælde er der en del vinkler hvis ene vinkelben går gennem A, og i sådant et tilfælde er det ofte en god ide at invertere i en cirkel med centrum i A. Valget af radius er derimod ikke væsentligt.

Når vi inverterer i en cirkel med centrum i A og radius r, svarer identiteten vi skal vise til den væsentligt simplere identitet

$$|P'B'| = |P'C'|.$$

Vinkelbetingelsen bliver i den inverterede situation

$$\angle APB - \angle ACB = \angle AB'P' - \angle AB'C' = \angle C'B'P'$$

og

$$\angle APC - \angle ABC = \angle AC'P' - \angle AC'B' = \angle B'C'P',$$

dvs. $\angle C'B'P' = \angle B'C'P'$. Dermed er $|P'B'| = |P'C'|$ som ønsket.

Ved først at udnytte at vinkelhalveringslinjer deler modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende cirkler, og efterfølgende invertere omformes problemstillingen til en problemstilling der nærmest giver sig selv.

Kunsten er selvfølgelig at gennemskue at inversion i en cirkel med centrum i A forsimpler problemstillingen.

Opgave 4.11.4. Lad ABC være en trekant, og lad s betegne den halve omkreds. Punkterne P og Q ligger på linjen AB så $|CP| = |CQ| = s$. Vis at den omskrevne cirkel til trekant CPQ tangerer den ydre røringscirkel til siden c i trekant ABC. *Hint*: 83

Opgave 4.11.5. Fire cirkler tangerer hinanden så ω_1 og ω_3 tangerer ω_2 og ω_4, samt så cirklerne ikke overlapper hinanden. Røringspunkterne mellem ω_1 og ω_2, ω_2 og ω_3, ω_3 og ω_4 samt ω_4 og ω_1 betegnes henholdsvis A, B, C og D. Vis at disse fire punkter enten ligger på en ret linje eller på en cirkel. *Hint*: 145

Opgave 4.11.6. Tre cirkler Γ_A, Γ_B og Γ_C har et fælles skæringspunkt O. Det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_B er C, det andet skæringspunkt mellem Γ_A og Γ_C er B, og det andet skæringspunkt mellem Γ_B og Γ_C er A. Linjen AO skærer cirklen Γ_A i et punkt X forskelligt fra O. Ligeledes skærer linjen BO cirklen Γ_B i et punkt Y forskelligt fra O, og linjen CO skærer cirklen Γ_C i et punkt Z forskelligt fra O. Vis at

$$\frac{|AY||BZ||CX|}{|AZ||BX||CY|} = 1.$$

(NMC 2010) *Hint*: 239

Opgave 4.11.7. Lad B_1 og C_1 være midtpunkterne af henholdsvis AB og AC i trekant ABC. Skæringspunktet mellem de omskrevne cirkler til trekant AB_1C og trekant ABC_1 betegnes P, og skæringspunktet forskelligt fra A mellem linjen AP og den omskrevne cirkel til trekant AB_1C_1 betegnes P_1. Vis at $2|AP| = 3|AP_1|$. (Baltic Way 2006) *Hint*: 232

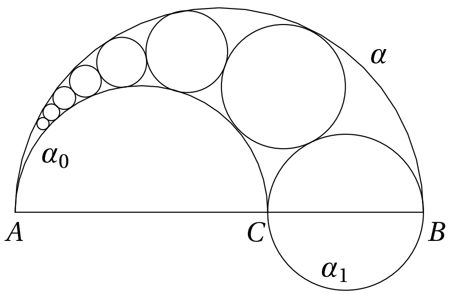
Opgave 4.11.8. Fire cirkler α_1, α_2, α_3 og α_4 går alle gennem et punkt P så α_1 og α_3 tangerer hinanden udvendigt i P, og α_2 og α_4 ligeledes tangerer hinanden udvendigt i P. Antag yderligere at α_1 og α_2, α_2 og α_3, α_3 og α_4 samt α_4 og α_1 skærer hinanden i henholdsvis A, B, C og D, alle forskellige fra P. Vis at

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{|PB|^2}{|PD|^2}.$$

Hint: 166

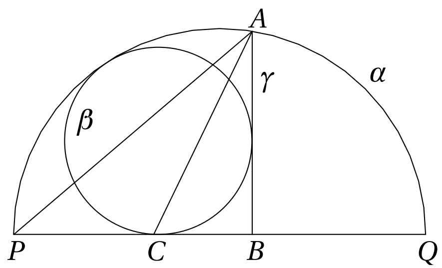
Opgave 4.11.9. Lad $ABCD$ være en konveks firkant så de to diagonaler står vinkelret på hinanden. Kald skæringspunktet mellem diagonalerne for O, og kald fodpunkterne for højderne fra O i trekant OAB, OBC, OCD og ODA for henholdsvis P, Q, R og S. Vis at punkterne P, Q, R og S ligger på en cirkel. *Hint*: 148

Opgave 4.11.10. Lad α være en halvcirkel med diameter AB, C et punkt på linjestykket AB forskelligt fra A og B, og α_0 en halvcirkel med AC som diameter så α og α_0 ligger på samme side af AB. Nu definerer vi en følge af cirkler på følgende måde. Cirklen α_1 er cirklen med diameter BC, og cirklen α_n er cirklen som tangerer α, α_0 og α_{n-1} som vist på figuren.



Kald røringspunktet mellem α_i og α_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$, for P_i. Vis at alle røringspunkterne $P_1, P_2, P_2, \ldots$ ligger på en cirkel. *Hint*: 222

Opgave 4.11.11. Lad α være en halvcirkel med diameter PQ, β en cirkel som tangerer linjestykket PQ og halvcirklen α, førstnævnte i punktet C, og γ en linje som tangerer β og står vinkelret på PQ i punktet B, så B ligger mellem C og Q. Kald det andet skæringspunkt mellem α og γ for A. Vis at AC er vinkelhalveringslinje i trekant PAB.



Hint: 144

5 Kombinatorik

Kombinatorik går ofte ud på at tælle antallet af kombinationer af et eller andet, og for at kunne tælle antallet af kombinationer smart har man brug for forskellige tællestrategier. Her introduceres helt grundlæggende måder at tælle på som fx multiplikationsprincippet, binomialkoefficienten $\binom{n}{r}$, der er et udtryk for på hvor mange måder man kan vælge r ting ud af n ting, samt skuffeprincippet. I de senere afsnit introduceres desuden væsentligt mere komplicerede måder at tælle på som fx at tælle ved at indsætte skillevægge, tælle rekursivt og tælle vha. princippet om inklusion og eksklusion.

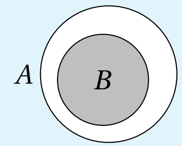
Indhold

5.1 Kombinationer

I dette afsnit ser vi på grundlæggende måder at tælle et antal kombinationer på. Da vi ofte formulerer opgaver med mængder, starter vi med grundlæggende begreber vedrørende mængder.

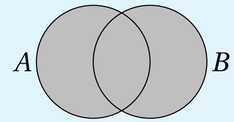
Definition af mængdebegreber

En mængde B er en *delmængde* af en mængde A hvis alle B's elementer tilhører A. At B er en delmængde skrives $B \subseteq A$. En delmængde af A der ikke er hele A, kaldes en *ægte* delmængde af A. Bemærk at enhver mængde har *den tomme mængde* $\emptyset$ som delmængde.



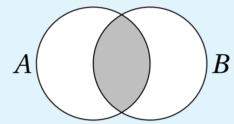
Delmængde $B \subseteq A$

Foreningsmængden $A \cup B$ af to mængder A og B er mængden bestående af alle elementer fra A og alle elementer fra B.



Foreningsmængde $A \cup B$

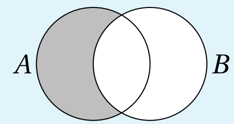
Fællesmængden $A \cap B$ af to mængder A og B er mængden bestående af de elementer som både tilhører A og B.



Fællesmængde $A \cap B$

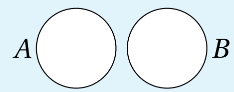
Differensmængden $A \setminus B$ er mængden bestående af de elementer i A som ikke tilhører B.

Hvis A er en delmængde af en mængde M, kaldes $M \setminus A$ for *komplementærmængden* til A.



Differensmængde $A \setminus B$

To mængder A og B kaldes *disjunkte* hvis de ikke har nogen elementer til fælles, dvs. hvis $A \cap B = \emptyset$.



Disjunkte mængder

Hvis $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ og $B = \{1,3,5,7,9\}$, da er $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$, $A \cap B = \{1,3,5\}$, $A \setminus B = \{2,4,6\}$ og $B \setminus A = \{7,9\}$. Eksempler på delmængder af A er $\emptyset$, $\{1,3\}$, $\{6\}$ og hele A.

Sætning 5.1.1. Multiplikationsprincippet

Ved et valg der består af n forskellige delvalg med henholdsvis $m_1, m_2, \ldots, m_n$ valgmuligheder, er der i alt

$$m_1 m_2 \ldots m_n$$

valgmuligheder.

Eksempel 5.1.1. Multiplikationsprincippet

Når man fx skal udfylde et spørgeskema med 13 spørgsmål og tre svarmuligheder til hvert spørgsmål, så skal man træffe 13 valg med tre valgmuligheder i hvert delvalg. Man kan altså svare på spørgeskemaet på $3^{13} = 1.594.323$ måder.

Eksempel 5.1.2. Multiplikationsprincippet

Man kan også bruge multiplikationsprincippet til at bestemme hvor mange forskellige delmængder der findes af en mængde med n elementer. Når man skal udtage en delmængde, skal man for hvert element afgøre om det skal med eller ikke med, der er altså to muligheder for hvert element. Derfor er der 2^n forskellige delmængder af en mængde med n elementer. Her er både den tomme mængde og mængden selv talt med.

Tællestrategi. Når man skal tælle hvor mange blandt nogle kombinationer der opfylder en bestemt betingelse, er det *altid* en god idé at overveje om det er nemmest at tælle dem der opfylder betingelsen, eller dem der ikke gør. Formuleret med mængder: Hvis T er en delmængde af en mængde M, og man skal bestemme antallet af elementer i T, er det *altid* en god idé at overveje om det er nemmest at tælle antallet af elementer i T eller antallet af elementer i komplementærmængden. Det ene kan være temmelig vanskeligt, mens det andet er overkommeligt.

Eksempel 5.1.3. Tællestrategi

Til en multiple choice-konkurrence er der 20 spørgsmål hver med svarmulighederne a, b, c, d og e. På hvor mange måder kan man svare på de 20 spørgsmål så der er mindst to spørgsmål i træk hvor man har sat kryds ved samme svarmulighed?

Hvis vi forsøger at tælle de kombinationer hvor man sætter kryds ved samme svarmulighed ved to på hinanden følgende spørgsmål, bliver det hurtigt meget kompliceret. Vi kunne fx starte med at tælle de kombinationer hvor vi svarede det samme på de to første spørgsmål. Dem er der 5^{19} af. Tilsvarende er der 5^{19} kombinationer hvor vi svarer det samme i spørgsmål 2 og 3, osv. Problemet er bare at vi her tæller de samme kombinationer med flere gange, og det bliver temmelig kompliceret at holde styr på hvor mange gange den enkelte kombination egentlig tælles med.

Hvis vi i stedet siger at der er 5^{20} svarmuligheder i alt, og trækker de kombinationer fra hvor der *ikke* svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, så bliver det meget lettere. Der er $5 \cdot 4^{19}$ kombinationer hvor der ikke svares det samme på to på hinanden følgende spørgsmål, fordi vi har fem muligheder for at svare på spørgsmål 1 og derefter fire muligheder for at svare på hvert af de følgende spørsmål da vi blot ikke må svare det samme som på det foregående. Dermed er der i alt

$$5^{20} - 5 \cdot 4^{19}$$

måder at svare på de 20 spørgsmål så der findes mindst to på hinanden følgende spørgsmål hvor man har svaret det samme.

Opgave 5.1.1. En perleplade består af 10×10 perler. Georg har fem forskellige farver perler. Hvor mange forskellige perleplader kan Georg lave når han vil have at den yderste kant er ensfarvet?

Opgave 5.1.2. Hvor mange forskellige syvcifrede positive heltal findes der som ikke indeholder cifferet 7?

Opgave 5.1.3. Hvor mange ticifrede positive heltal er der som ikke indeholder to ens nabocifre?

Opgave 5.1.4. Hvor mange sekscifrede positive heltal findes der som er delelige med 9, og som ikke indeholder cifferet 0? *Hint*: 217

Opgave 5.1.5. Hvor mange ottecifrede tal findes der som består af cifrene 1, 2, 3 og 4, og som indeholder to ens nabocifre?

Opgave 5.1.6. Tallene fra 1 til 100 skal fordeles i tre disjunkte delmængder så ingen af mængderne er tomme, og ingen mængde indeholder to på hinanden følgende tal. På hvor mange måder kan det gøres? *Hint*: 51

Opgave 5.1.7. Tyve kugler nummereret $1, 2, \ldots, 20$ skal fordeles i fire forskellige skåle, en rød, en blå, en gul og en grøn. På hvor mange måder kan det gøres hvis der i mindst en af skålene skal være to kugler hvis numre har differens 1 eller 2? *Hint*: 156

Eksempel 5.1.4. Rækkefølge

I kombinatorik ønsker man ofte at bestemme antallet af måder man kan udtage noget på i en bestemt rækkefølge.

Til et stævne er der 14 hold der kæmper om guld, sølv og bronze. Når man skal bestemme på hvor mange forskellige måder medaljerne kan fordeles, har man 14 muligheder for at uddele guld, 13 for sølv og 12 for bronze, dvs. der er i alt $14 \cdot 13 \cdot 12$ måder at fordele medaljerne på.

Definition af fakultet

For et positivt helt tal n er

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Desuden er $0! = 1$.

Symbolet $n!$ læses n*-fakultet*.

Definition af permutation

En ordnet liste på r forskellige elementer fra en mængde med n elementer kaldes en *permutation* af r elementer fra en mængde med n elementer.

Antallet af permutationer af r elementer fra en mængde med n elementer svarer altså til antallet af måder at vælge r ud af n elementer hvor rækkefølgen af de r elementer har betydning.

Sætning 5.1.2. Permutationer - Udtag med rækkefølge

Antallet af permutationer af r elementer fra en mængde med n elementer er

$$n(n-1)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Bevis. Man har n muligheder for at vælge det første element, $n-1$ muligheder for det næste, osv. Til slut har man $n-(r-1))$ muligheder for at vælge det r'te element. Formlen $n(n-1)\ldots(n-(r-1))$ følger derfor af multiplikationsprincippet. For at skrive formlen lidt mere kompakt tænker vi på den som et brøk og forlænger med $(n-r)!$ i tæller og nævner:

$$n(n-1)\ldots(n-(r-1)) = \frac{n(n-1)\ldots(n-(r-1))\cdot(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!}. \qquad \square$$

Definition af kombination

En delmængde med r elementer af en mængde med n elementer kaldes en *kombination* på r elementer fra en mængde med n elementer.

Symbolet $\binom{n}{r}$ betegner antallet af kombinationer på r elementer ud af n elementer, og det svarer til antallet af måder hvorpå man kan udtage r elementer ud af n uden hensyntagen til rækkefølgen af de elementer man udtager.

Vi kalder disse tal for *binomialkoefficienter*, og det kommer der en forklaring på senere.

Nogle benytter betegnelsen $K(n, r)$ i stedet for $\binom{n}{r}$.

Hvis $r < 0$ eller $r > n$, er $\binom{n}{r} = 0$ per definition.

Sætning 5.1.3. Kombinationer - Udtag uden rækkefølge

Der gælder at

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Bevis. I første omgang husker vi på at man ifølge sætning 5.1.2 kan udtage r elementer i rækkefølge på $\frac{n!}{(n-r)!}$ måder. Desuden kan r elementer ordnes i $r!$ forskellige rækkefølger, dvs. hver delmængde er talt med $r!$ gange når vi udtager de r elementer i rækkefølge. Derfor er

$$\binom{n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \qquad \square$$

Eksempel 5.1.5. Sandsynlighed

Sætning **??** kan bruges i et utal af sammenhænge når man skal afgøre på hvor mange måder man kan udvælge noget. Fx kan de syv vindertal i lotto når der er 36 tal at vælge imellem, udtrækkes på $\binom{36}{7} = 8.347.680$ forskellige måder. Når man har fundet antallet af kombinationer, kan dette benyttes til at beregne sandsynligheden for at få syv rigtige i lotto. Alle kombinationer af syv vindertal er i lotto lige sandsynlige, og dermed er sandsynligheden for at få syv rigtige $\frac{1}{8.347.680}$.

Eksempel 5.1.6. Kombinationer

Vi ønsker at bestemme på hvor mange måder man kan udtage syv kort af et sæt almindelige spillekort med 52 kort, så man har netop ét par, altså to kort med samme talværdi, og fem kort med fem andre talværdier.

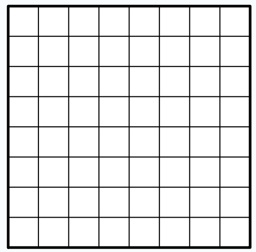
Der er 13 forskellige talværdier, dvs. vi kan udvælge den talværdi parret har, på $\binom{13}{1} = 13$ måder. Desuden kan vi vælge de fem talværdier de fem sidste kort skal have, på $\binom{12}{5} = 792$ måder. For hver talværdi er der fire kort, dvs. vi nu kan vælge de to kort der indgår i vores par, på $\binom{4}{2} = 6$ måder. Desuden kan vi vælge hvert af de fem andre kort på $\binom{4}{1} = 4$ måder. I alt er der altså ifølge multiplikationsprincippet

$$\binom{13}{1}\binom{12}{5}\binom{4}{2}\binom{4}{1}^5 = 63.258.624$$

måder at udtage syv kort på så man har netop et par.

Eksempel 5.1.7. Ruter

På et bræt med 8×8 felter kravler en myre fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne. Den kravler kun på stregerne mellem felterne eller langs kanten af brættet, og den sørger for at turen bliver så kort så mulig. Vi ønsker at bestemme hvor mange forskellige ruter myren kan vælge imellem.



Først bemærker vi at den samlet skal gå otte felter op og otte felter til højre hvis vi forestiller os at den starter i nederste venstre hjørne. Den skal med andre ord vælge præcis hvilke otte af de 16 "skridt" der skal være lodrette, dvs. den har $\binom{16}{8} = 12.870$ forskellige ruter at vælge imellem.

Opgave 5.1.8. Hvor mange firecifrede positive heltal findes der, hvor cifrene står i stigende rækkefølge fra venstre mod højre, og alle fire cifre er forskellige?
Hint: 167

Opgave 5.1.9. En forsamling på 25 personer vil nedsætte et udvalg med fem medlemmer, hvor et af de fem medlemmer er forperson for udvalget. På hvor mange måder kan dette gøres?

Opgave 5.1.10. Bestem på hvor mange måder man kan udtage seks kort fra et sæt spillekort så man netop har to par. (Netop to par ud af seks kort betyder at man har fire forskellige talværdier og to af to af dem.)

Opgave 5.1.11. Fra et kortspil trækkes fire kort. Hvor stor er sandsynligheden for at de fire kort har fire forskellige talværdier?

Opgave 5.1.12. I en by består centrum kun af veje der går nord-syd og øst-vest. Der er syv veje nord-syd og fem veje øst-vest, men pga. vejarbejde er vejkrydset mellem den midterste nord-syd-gående vej og den midterste øst-vest-gående vej totalt spærret så man ikke kan passere det. Jonatan står i det sydvestlige hjørne af centrum og skal til det nordøstlige hjørne, og han ønsker at gå så kort så muligt. Hvor mange forskellige ruter kan han vælge imellem? *Hint*: 76

Opgave 5.1.13. I en skål er der fem røde, tre blå og to grønne bolde. Hvad er sandsynligheden for at der er en rød, en blå og en grøn bold tilbage i skålen, hvis man fjerner syv tilfældige bolde?

Opgave 5.1.14. Lad m, n og k være positive heltal så $n \geq k$ og $m \geq k$. På et $n \times m$ skakbræt skal placeres k tårne (højst et på hvert felt) så ingen tårne truer hinanden. Vis at det kan gøres på $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$ måder. *Hint*: 215

Opgave 5.1.15. I en konveks n-polygon indtegnes samtlige diagonaler, og det antages at der ikke findes tre diagonaler som skærer hinanden i samme punkt. (Her er en diagonal et linjestykke der forbinder to af polygonens hjørner, men polygonens sider er dog ikke diagonaler.)

i) Vis at antallet af diagonaler er $\binom{n}{2} - n$ for $n \geq 3$

ii) Vis at antallet af skæringspunkter mellem diagonaler er $\binom{n}{4}$ for $n \geq 4$. *Hint*: 259

iii) Vis at antallet af områder som diagonalerne deler polygonen i, er $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$ for $n \geq 4$. *Hint*: 10

iv) Vis at antallet af trekanter, hvis hjørner er polygonens hjørner eller en skæring mellem to diagonaler, og hvis sider ligger på polygonens sider og diagonaler, er $\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}$ for $n \geq 6$. *Hint*: 186

Opgave 5.1.16. I en papkasse ligger et stort antal løse sokker. Nogle af sokkerne er røde; de øvrige er blå. Det oplyses at det samlede antal sokker ikke overstiger 1993. Endvidere oplyses det at sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve når man på tilfældig måde udtrækker to sokker fra kassen, er $\frac{1}{2}$. Hvad er efter de foreliggende oplysninger det største antal røde sokker der kan befinde sig i kassen? (Georg Mohr-Konkurrencen 1993) *Hint*: 157

At vælge r elementer ud af n svarer til at splitte de n elementer op i to bunker: en med r elementer og en med $n - r$ elementer. Nogle gange har man imidlertid brug for at fordele de n elementer i mange flere bunker. Eller formuleret med delmængder: dele en mængde i disjunkte delmængder som tilsammen indeholder samtlige elementer.

Definition af udvidet binomialkoefficient

Symbolet

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$$

betegner antallet af måder hvorpå man kan dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer så $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$.

Sætning 5.1.4. Udvidet binomialkoefficient

Der gælder at

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_m!}.$$

Bevis. Når vi skal dele en mængde med n elementer i m disjunkte delmængder $A_1, A_2, \ldots, A_m$ med henholdsvis $r_1, r_2, \ldots, r_m$ elementer så $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, kan vi tænke på udvælgelsen således: Først vælges r_1 blandt de n elementer. Det kan vi gøre på $\binom{n}{r_1}$ måder. Derefter vælges r_2 blandt de resterende $n - r_1$ elementer. Det kan vi gøre på $\binom{n-r_1}{r_2}$ måder. Vi fortsætter på denne måde indtil

vi til slut vælger r_m blandt de resterende $n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}=r_m$ elementer. Dermed er

$$\begin{aligned}\binom{n}{r_1,r_2,\ldots,r_m}&=\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\binom{n-r_1-r_2}{r_3}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}}{r_m}\\&=\frac{n!}{r_1!(n-r_1)!}\frac{(n-r_1)!}{r_2!(n-r_1-r_2)!}\cdots\frac{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1})!}{r_m!(n-r_1-r_2-\cdots-r_m)!}\\&=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_m!},\end{aligned}$$

fordi $(n-r_1-r_2-\cdots-r_m)!=0!=1$. □

Eksempel 5.1.8. Gruppeinddeling

En klasse med tolv elever skal deles i tre grupper med fire i hver. På hvor mange måder kan dette gøres?

Hvis grupperne betegnes A, B og C, kan de tolv elever ifølge sætningen fordeles i grupperne A, B og C med fire i hver på $\binom{12}{4,4,4}=34650$ måder. Men i spørgsmålet havde de tre grupper ingen betegnelse og var altså ikke ordnede, dvs. vi har talt hver kombination med $3!=6$ gange. Der er dermed $\frac{34650}{6}=5775$ måder at dele klassen på.

Opgave 5.1.17. En kube er sammensat af $3\times3\times3$ små enhedskuber. På hvor mange måder kan man komme fra det ene hjørne til det diagonalt modsatte hjørne når man kun må gå langs kanterne af enhedskuberne og skal vælge en rute der er så kort så mulig?

Opgave 5.1.18. I en krukke ligger ni bolde nummereret $1,2\ldots,9$. Tre personer trækker tilfældigt tre bolde hver. Hvad er sandsynligheden for at de alle får en ulige sum når de lægger deres tre boldes numre sammen? *Hint*: 225

Opgave 5.1.19. Vis at $((mn)!)^2$ er delelig med $(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}$ for alle positive hele tal n og m. *Hint*: 22

5.2 Skuffeprincippet

Skuffeprincippet bruger de fleste helt intuitivt uden at have hørt om det. Et klassisk eksempel på skuffeprincippet er at hvis 1100 mennesker er forsamlet, så vil mindst fire ifølge skuffeprincippet have fødselsdag samme dag. Der er 366 mulige fødselsdage. Hvis der er over $3\cdot366=1098$ mennesker forsamlet, vil der ifølge skuffeprincippet være mindst fire personer med samme fødselsdag.

Sætning 5.2.1. Skuffeprincippet

Skuffeprincippet siger at hvis man har $n+1$ objekter som man placerer i n skuffer, så findes der mindst én skuffe med mindst to objekter. Tilsvarende gælder at hvis man har $kn+1$ objekter som man placerer i n skuffer, så findes mindst én skuffe med mindst $k+1$ objekter.

Eksempel 5.2.1. Skuffeprincippet

Det er ikke altid helt oplagt hvad man skal vælge som skuffer og objekter. Hvis vi ser på en vilkårlig delmængde af mængden $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$ med 15 elementer, så vil vi gerne vise at der findes to talpar fra delmængden med samme numeriske differens.

I dette tilfælde må de mulige differenser - de hele tal fra 1 til 99 - være skufferne og de mulige talpar være objekterne da vi ønsker at vise at der findes mindst to talpar med samme differens. Hvis skuffeprincippet skal virke, skal vi altså vise at der er flere talpar end differenser.

I en delmængde af M med 15 elementer er der i alt

$$\binom{15}{2}=\frac{15\cdot14}{2}=105$$

forskellige talpar, men der er kun 99 mulige differenser. Dermed siger skuffeprincippet at der findes mindst to talpar med samme differens.

Eksempel 5.2.2. Skuffeprincippet

Skuffeprincippet kan også bruges hvis man har et endeligt antal skuffer og et uendeligt antal objekter. Betragt følgen

$$1,3,6,0,9,5,4,\ldots$$

hvor det næste tal i følgen, fra og med det fjerde, er sidste ciffer i summen af de tre foregående. Da der kun findes endeligt mange talsæt af tre cifre, og følgen fortsætter i det uendelige, må der ifølge skuffeprincippet på et eller andet tidspunkt komme tre tal som tidligere har stået i samme rækkefølge, og derfor må følgen være periodisk fra et vist trin. Her er talsæt af tre cifre skufferne, mens objekterne er alle de uendeligt mange talsæt af tre cifre man får ved at vælge tre på hinanden følgende tal i følgen.

Eksempel 5.2.3. Skuffeprincippet

Skuffeprincippet kan også bruges hvis man har et endeligt antal skuffer og et uendeligt antal objekter. Betragt følgen

$$1,3,6,0,9,5,4,\ldots$$

hvor det næste tal i følgen, fra og med det fjerde, er sidste ciffer i summen af de tre foregående. Der er kun findes endeligt mange talsæt af tre cifre, og følgen fortsætter i det uendelige. Hvis vi lader alle talsæt af tre cifre udgøre skufferne, og tre på hinanden følgende tal i følgen være objekterne, må der ifølge skuffeprincippet på et eller andet tidspunkt komme tre tal som tidligere har stået i samme rækkefølge, og derfor må følgen være periodisk fra et vist trin.

Her er nogle eksempler på meget forskellige opgavetyper hvor man kan anvende skuffeprincippet, men det er absolut ikke altid oplagt hvordan man skal konstruere sine skuffer og objekter.

Opgave 5.2.1. Ti venner sender hinanden julekort så hver sender fem julekort til fem forskellige venner. Vis at der findes et par af venner som har sendt hinanden et julekort.restparrene

Opgave 5.2.2. Vis at hvis et 2×2-kvadrat indeholder 10 punkter, da vil der findes to punkter med afstand mindre end 1.

Opgave 5.2.3. Lad n være et positivt heltal. Vis at der blandt $n+2$ forskellige positive heltal findes mindst to hvis sum er delelig med $2n$, eller hvis differens er delelig med $2n$. *Hint*: 230

Opgave 5.2.4. Om et kæmpe rundt bord der kan drejes, sidder der 100 personer. Alle har bestilt forskellig forret. Da de trætte tjenere har placeret en forret foran hver person, er der ingen der har den rigtige forret på deres plads. Vis at bordet kan drejes så mindst to personer har den rigtige forret på deres plads. *Hint*: 44

Opgave 5.2.5. I et kvadrat med sidelængde 1 er der 101 røde punkter hvoraf ikke tre ligger på linje. Vis at der findes en trekant med tre røde hjørner hvis areal ikke er større end $\frac{1}{100}$.

Opgave 5.2.6. Ethvert punkt i planen er malet i en af n givne farver. Vis at der findes et rektangel hvis hjørner alle har samme farve.

Opgave 5.2.7. I et bjerg dybt under jorden gemmer syv drager en mægtig skat. For at få fingre i skatten skal man igennem ti store stendøre der hver er låst med tre store låse. Hver drage har nøgle til nogle af låsene, og vilkårlige fire drager har tilsammen nøgler til alle låsene. Vis at der findes tre drager som tilsammen har nøgler til alle låsene. *Hint*: 139

Opgave 5.2.8. Lad A være en vilkårlig mængde af 23 positive hele tal mellem 1 og 1000. Vis at der findes to disjunkte delmængder af A hvis elementer har samme sum. *Hint*: 243

Opgave 5.2.9. Vis at blandt tallene $a, 2a, \ldots, (n-1)a$, hvor $a \in \mathbb{R}$, er der mindst ét af tallene der har en afstand på højst $\frac{1}{n}$ til et helt tal. *Hint*: 56

Opgave 5.2.10. Vis at uanset hvordan 15 punkter afsættes inden for en cirkel med radius 2 (cirkelranden medregnet), vil der eksistere en cirkel med radius 1 (cirkelranden medregnet) som indeholder mindst tre af de 15 punkter. (Georg Mohr-Konkurrencen 1991) *Hint*: 228

5.3 Pascals trekant og binomialkoefficienter

Binomialkoefficienterne $\binom{n}{r}$ viser sig at kunne frembringes på en interessant måde, og for at vise dette har vi behov for følgende formel.

Sætning 5.3.1. Lad n og k være ikke-negative heltal med $n \geq k+1$. Da er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bevis. Hvis man skal udtage $k+1$ elementer ud af $n+1$, kan man enten udtage $k+1$ ud af de n første af de $n+1$ elementer, eller man kan udtage k elementer blandt de n første samt udtage det sidste ud af de $n+1$ elementer. Dermed er

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Bemærk at man når frem til lighedstegnet ved at tælle det samme på to forskellige måder. Dette er en meget anvendelig metode når man fx skal vise at to udtryk er lig hinanden, men mere om det i et senere afsnit.

Alternativt kan man også blot regne, men det er ikke helt så elegant:

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}((n-k)+(k+1)) \\
&= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}. \quad \square
\end{aligned}$$

Sætning 5.3.2. Pascals trekant

Binomialkoefficienterne kan opstilles i det man kalder *Pascals trekant* så en binomialkoefficient hele tiden er summen af de to ovenfor:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&& \binom{0}{0} &&&&&&&& \\
&&&&&&& \binom{1}{0} && \binom{1}{1} &&&&&&& \\
&&&&&& \binom{2}{0} && \binom{2}{1} && \binom{2}{2} &&&&&& \\
&&&&& \binom{3}{0} && \binom{3}{1} && \binom{3}{2} && \binom{3}{3} &&&&& \\
&&&& \binom{4}{0} && \binom{4}{1} && \binom{4}{2} && \binom{4}{3} && \binom{4}{4} &&&& \\
&&& \binom{5}{0} && \binom{5}{1} && \binom{5}{2} && \binom{5}{3} && \binom{5}{4} && \binom{5}{5} &&& \\
&& \binom{6}{0} && \binom{6}{1} && \binom{6}{2} && \binom{6}{3} && \binom{6}{4} && \binom{6}{5} && \binom{6}{6} && \\
& \binom{7}{0} && \binom{7}{1} && \binom{7}{2} && \binom{7}{3} && \binom{7}{4} && \binom{7}{5} && \binom{7}{6} && \binom{7}{7} & \\
\binom{8}{0} && \binom{8}{1} && \binom{8}{2} && \binom{8}{3} && \binom{8}{4} && \binom{8}{5} && \binom{8}{6} && \binom{8}{7} && \binom{8}{8}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&& 1 &&&&&&&& \\
&&&&&&& 1 && 1 &&&&&&& \\
&&&&&& 1 && 2 && 1 &&&&&& \\
&&&&& 1 && 3 && 3 && 1 &&&&& \\
&&&& 1 && 4 && 6 && 4 && 1 &&&& \\
&&& 1 && 5 && 10 && 10 && 5 && 1 &&& \\
&& 1 && 6 && 15 && 20 && 15 && 6 && 1 && \\
& 1 && 7 && 21 && 35 && 35 && 21 && 7 && 1 & \\
1 && 8 && 28 && 56 && 70 && 56 && 28 && 8 && 1
\end{array}$$

Bevis. Det følger direkte af sætning 5.3.1. $\square$

Sætning 5.3.3. Binomialformlen

Lad n være et ikke-negativt heltal. Da er

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Det er denne sammenhæng der er grunden til at binomialkoefficienter hedder binomialkoefficienter. Et *binom* er en to-leddet størrelse, og binomialkoefficienterne er dermed netop koefficienterne der fremkommer når man tager en potens af en to-leddet størrelse.

Bevis. Når man ganger $(x+y)^n$ ud, får man netop $x^{n-k}y^k$ ved at gange x'et fra $n-k$ af parenteserne med y'et fra de resterende k parenteser. Vi kan vælge de k parenteser med y'er ud af de n parenteser på $\binom{n}{k}$ måder, dvs. leddet $x^{n-k}y^k$ optræder $\binom{n}{k}$ gange i resultatet. Dette viser sætningen. □

Sætning 5.3.4. Binomialformlen

Lad n være et ikke-negativt heltal. Da er

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Bevis. Ifølge binomialformlen er

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Sættes $x = y = 1$, fås

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Rigtig mange sammenhænge om binomialkoefficienter kan vises ved at se på koefficienter i polynomier. I dette tilfælde og mange andre med binomialkoefficienter kan man også benytte tricket med at tælle det samme på to forskellige måder da begge sider af lighedstegnet angiver antallet af delmængder af en mængde med n elementer: Vi har tidligere set at der findes netop 2^n delmængder af en mængde med n elementer. Man kan også tælle delmængderne ved at summere antal delmængder med henholdsvis $0, 1, \ldots, n$ elementer, og det er netop det der står på højresiden. □

Sætning 5.3.5. Binomialkoefficienter

Der gælder følgende om binomialkoefficienter:

i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ii) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

iii) $k\binom{n}{k} = (n-k+1)\binom{n}{k-1}$.

iv) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.

v) $\binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \cdots + \binom{2n+1}{n} = 2^{2n}$.

vi) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

vii) For et primtal p er $\binom{p}{k}$ delelig med p for $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

Opgave 5.3.1. Vis sætning 5.3.5. *Hint*: vii): 237

5.4 Skillevægge

Binomialkoefficienterne fortæller på hvor mange måder man kan udtage r elementer ud af n elementer. Man kan også med binomialkoefficienter lave en formel for på hvor mange måder man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse. Da objekterne er ens, er det lige meget hvilke der havner i hvilke bokse; det interessante er kun hvor mange der er i hver boks.

Sætning 5.4.1. Objekter i nummererede bokse

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på

$$\binom{n+m-1}{m-1}$$

måder, hvis nogle af boksene gerne må være tomme.

Man kan fordele n ens objekter i m nummererede bokse på

$$\binom{n-1}{m-1}$$

måder, hvis alle bokse skal indeholde mindst ét objekt.

Bevis. Sæt de n objekter op på en række. At fordele dem i m nummererede bokse svarer til at sætte $m-1$ skillevægge op i rækken, så man putter objekterne før den første skillevæg i første boks osv.

$$\bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad | \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad | \quad \bullet \quad |$$

Eksempel med $n = 9$ objekter og $m = 7$ bokse.
Der er henholdsvis $2, 2, 0, 1, 3, 1, 0$ objekter i de syv bokse.

Det svarer til at fordele n objekter og $m-1$ skillevægge på en række med $n+m-1$ pladser, hvilket kan gøres på $\binom{n+m-1}{m-1}$ måder. □

Opgave 5.4.1. Bevis sidste del af sætning 5.4.2.

Sætning 5.4.2. Tupler af heltal med fast sum

Antallet af m-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, hvor x_i'erne er ikke-negative heltal med $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, er

$$\binom{n+m-1}{m-1}.$$

Antallet af m-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, hvor x_i'erne er positive heltal med $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$, er

$$\binom{n-1}{m-1}.$$

Bevis. Sætningen følger direkte af sætning 5.4.1 hvor $x_1, x_2, \ldots, x_m$ er antallet af objekter i henholdsvis boks 1, boks 2, osv. □

Eksempel 5.4.1. Objekter i nummererede bokse

I et supermarked er der fem forskellige slags slikposer. Når man skal udregne på hvor mange måder man kan vælge ti slikposer, kan man bruge sætning 5.4.1. Det svarer nemlig til at fordele ti objekter i fem nummererede bokse der hver repræsenterer en bestemt slags slikpose, dvs. ifølge sætningen er der $\binom{10+5-1}{5-1} = 1001$ måder at vælge på.

Eksempel 5.4.2. Objekter i nummererede bokse med ekstra boks

I en isbutik sælges vaffelis med op til fem kugler, og der er vanille-, jordbær- og chokoladeis. Når man skal udregne hvor mange forskellige vaffelis man kan lave, kan man bruge sætningen om at fordele n objekter i m bokse. Vi antager at kuglernes rækkefølge er underordnet. Antallet af vaffelis svarer nu til at fordele fem kugler i fire bokse hvor den ene boks repræsenterer vanille, den anden jordbær, den tredje chokolade og den fjerde ingenting. På denne måde får man alle kombinationer inklusiv den uden kugler. Hvis man trækker den fra, er der derfor $\binom{5+4-1}{4-1} - 1 = \binom{8}{3} - 1 = 55$ forskellige kombinationer.

Opgave 5.4.2. I et supermarked er der fem forskellige slags slikposer at vælge imellem, men supermarkedet har kun seks poser tilbage af tre af slagsene samt syv poser af de to sidste slags. Vis at man kan vælge ti slikposer på 866 måder.

Opgave 5.4.3. Vis at der er netop 462 måder at lægge ti 2-kroner og seks 5-kroner på en række så der mellem to 5-kroner ligger mindst en 2-krone. *Hint*: 91

Opgave 5.4.4. På hvor mange måder kan man vælge ti ikke-negative heltal $x_1, x_2 \dots, x_{10}$ så deres sum højst er 100? *Hint*: 194

Opgave 5.4.5. En skat på 50 guldstykker skal fordeles mellem seks pirater. De beslutter sig for at skrive alle kombinationer ned, hvor ingen får mere end halvdelen af guldstykkerne, og alle får mindst fire guldstykker, og derefter trække lod blandt disse kombinationer. Hvor mange kombinationer trækker de lod imellem?

Opgave 5.4.6. En mængde består af samtlige 12-cifrede tal som består af netop fem 1-taller, fire 2-taller og tre 3-taller. Vis at hvis man trækker et tilfældigt tal fra mængden, da er sandsynligheden for at få et tal som har mindst to 1-taller i træk, lig med $\frac{92}{99}$. *Hint*: 234

Opgave 5.4.7. Vis at antallet af binære tal med n cifre der har netop m blokke af formen 01, er $\binom{n}{2m+1}$. (Husk at et binært tal har 1 som første ciffer.) *Hint*: 11

Opgave 5.4.8. I et lottospil udtrækkes syv tal ud af 36. Vis at mere end $\frac{3}{4}$ af disse kombinationer indeholder to nabotal. (Du må gerne bruge at $\frac{36!23!}{29!30!} > \frac{3}{4}$.) *Hint*: 53

Opgave 5.4.9. I et ringspil er der ti ringe i forskellige farver samt fem forskellige målpinde til at kaste efter. Vis at antallet af forskellige slutkonfigurationer med syv ringe på målpindene og tre ringe i græsset er $\frac{11!10!}{4!7!3!} = 199.584.000$. (Bemærk at hvis flere ringe er på samme målpind, kan de ligge i forskellig rækkefølge på pinden.) *Hint*: 54

5.5 Tælle på to måder

Vi har flere gange set at man kan vise nogle formler hvori der indgår binomialkoefficienter, ved at tælle på to måder.

Eksempel 5.5.1. Tælle på to måder

Formlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m-1} = \binom{n+m}{m}$$

kan let vises ved at tælle på to måder, mens det er langt mere krævende hvis man begynder at omskrive binomialkoefficienterne.

Tallet $\binom{n+m}{m}$ angiver ifølge sætning 5.4.1 på hvor mange måder man kan fordele n ens kugler i $m+1$ kasser. Man kan også tælle dette på følgende måde: Når der er $n-k$ kugler i den første boks, kan man fordele de k resterende kugler i de m resterende bokse på $\binom{k+m-1}{m-1}$ måder. Når man summerer dette, får man netop venstresiden af lighedstegnet.

Eksempel 5.5.2. Tælle på to måder

Følgende formel kan også vises ved at tælle på to måder.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Vi benytter nu to forskellige metoder til at tælle på hvor mange måder man kan nedsætte et udvalg med en forperson når der er n personer at vælge imellem, og udvalget skal bestå af mellem en og n personer:

Metode 1: Først er der n muligheder for at vælge forpersonen. Derefter skal man for hver af de $n-1$ resterende beslutte om de er med eller ej. Dette kan samlet gøres på $n2^{n-1}$ måder.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k måder at vælge forpersonen på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$. Dermed er formlen vist.

> **Sætning 5.5.1. Vandermonde-identiteten**
>
> Lad n, m og k være ikke-negative hele tal med $k \le n+m$. Da er
>
> $$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

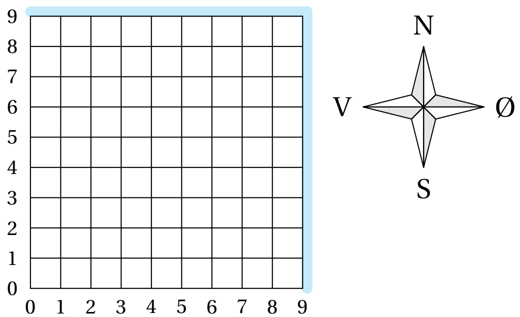
Opgave 5.5.1. Vis sætning 5.5.1.

Opgave 5.5.2. Vis formlerne

$$\text{i)}\quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2} \quad \text{og} \quad \text{ii)}\quad \sum_{k=1}^{n} k^3 \binom{n}{k} = n^2(n+3)2^{n-3}.$$

Hint: 190, 195

Opgave 5.5.3. i) I en by er der et vejnet som danner et kvadrat med $n+2$ veje nord-syd og $n+2$ veje øst-vest, $n \ge 2$. Langs den nordligste og den østligste vej løber en flod. Vejene nummereres $0, 1, 2, \ldots, n+1$ fra vest mod øst, og fra syd mod nord. Ane starter i det sydvestlige hjørne af vejnettet, dvs. i $(0,0)$. Hun vil ned til floden og går på følgende måde. Først slår hun plat og krone. Hvis det bliver krone, går hun mod nord til næste vejkryds, og hvis det bliver plat går hun mod øst til næste vejkryds. Sådan fortsætter hun til hun når den nordligste eller den østligste vej ved floden, dvs. indtil hun første gang når en af de to veje med nummer $n+1$.



Eksempel med $n = 8$

Vis at sandsynligheden for at hun når floden i krydset $(3, n+1)$, er

$$\binom{n+3}{3}\frac{1}{2^{n+4}}.$$

ii) Vis formlen

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{k+n}} = 1.$$

Opgave 5.5.4. Vis at

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{k=1}^{n-r+1} k\binom{n-k}{r-1}.$$

Hint: 67

Opgave 5.5.5. Lad $F(n,r)$ betegne gennemsnittet af mindste-elementerne i samtlige delmængder af $\{1, 2, \ldots, n\}$ med r elementer.
Vis at

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

(IMO 1981)

Opgave 5.5.6. Vis ved at tælle på to måder at

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

Hint: 109

Opgave 5.5.7. I en konkurrence er der a deltagere og b dommere, hvor $b \ge 3$ er et ulige tal. Hver dommer bedømmer om hver deltager har bestået eller er dumpet. Antag et k er et tal så der for to vilkårlige dommere gælder at deres bedømmelse højst stemmer overens for k deltagere. Vis at $\frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b}$. (IMO 1998) *Hint*: 249

5.6 Mere om binomialkoefficienter

I dette afsnit fokuserer vi på hvordan man regner med binomialkoefficienter. Som udgangspunkt har vi de sammenhænge om binomialkoefficienter som allerede er vist i afsnit 5.3 samt Vandermonde-identiteten fra afsnit 5.5.

Eksempel 5.6.1. Vandermonde-identiteten

Vi ønsker at vise at

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

for alle positive heltal n. Dette svarer blot til Vandermonde-identiteten

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i},$$

hvor $m=n=k$, da $\binom{m}{m-i}=\binom{m}{i}$.

Opgave 5.6.1. Lad p være et ulige primtal. Vis at

$$\binom{2p}{p}\equiv 2 \pmod{p}.$$

Opgave 5.6.2. Lad n være et positivt heltal. Vis at

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2=n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Hint: 96

Opgave 5.6.3. Lad n og m være positive heltal hvor $m<n$. Vis at

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=0.$$

Hint: 174

Eksempel 5.6.2. Fibonaccital og binomialkoefficienter

Der er mange interessante sammenhænge mellem binomialkoefficienter og andre matematiske fænomener. Her skal vi se en sammenhæng med Fibonaccitallene.

Lad $F_1, F_2, \ldots$ være Fibonaccitallene, sådan at $F_1=F_2=1$ og $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ for $n\geq 0$. Vi ønsker at vise at

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}$$

for alle ikke-negative heltal n.

For at opnå denne sammehæng er det smart at benytte induktion efter n bl.a. fordi Fibonaccitallene er defineret rekursivt. For $n=0$ er $\sum_{k=0}^{0}\binom{1-k}{k}=\binom{1}{0}=1=F_2$, og for $n=1$ er $\sum_{k=0}^{1}\binom{1+1-k}{k}=\binom{2}{0}+\binom{1}{1}=2=F_3$. Dermed er induktionsstarten på plads. Antag at

$$F_{n+2}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}$$

for alle ikke-negative heltal $n<N$. For at udnytte induktionsantagelsen benyttes den helt grundlæggende sammenhæng mellem binomialkoefficienter (sætning 5.3) som siger at $\binom{m}{r}=\binom{m-1}{r}+\binom{m-1}{r-1}$:

$$\begin{aligned}
F_{N+2}=F_{N+1}+F_N &= \sum_{k=0}^{N-1}\binom{(N-1)+1-k}{k}+\sum_{k=0}^{N-2}\binom{(N-2)+1-k}{k}\\
&=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{(N-1)+1-k}{k}+\sum_{k=1}^{N-1}\binom{(N-2)+1-(k-1)}{k-1}\\
&=\sum_{k=0}^{N}\left(\binom{(N-1)+1-k}{k}+\binom{(N-1)+1-k}{k-1}\right)-\binom{0}{N}-\binom{N}{-1}-\binom{0}{N-1}\\
&=\sum_{k=0}^{N}\binom{N+1-k}{k}.
\end{aligned}$$

Dermed er induktionen fuldført.

Opgave 5.6.4. Vis at

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

for alle positive heltal n. *Hint*: 33

5.7 Rekursion

Når vi i matematik beskriver tallene i en følge *rekursivt*, betyder det at vi beskriver det næste tal i følgen vha. de foregående. Fx er Fibonaccitallene $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ beskrevet rekursivt da $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ med $F_1 = 1$ og $F_2 = 1$. Dette kan bruges til at tælle antallet af forskellige ting.

Eksempel 5.7.1. Tårnene i Hanoi

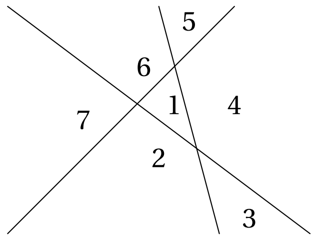
Et klassisk eksempel på *rekursion* er tårnene i Hanoi. Her er der n ringe i forskellig størrelse. Desuden er der et bræt med tre pinde. Til at starte med ligger alle ringene på den venstre pind med den største nederst, derefter den næststørste, osv. Man må flytte ringene en ad gangen fra en pind til en anden, men man må aldrig lægge en større ring oven på en mindre ring. Vi ønsker nu at bestemme hvor mange ringe der mindst skal flyttes for at flytte samtlige ringe over på den højre pind.

Tårnene i Hanoi, $n = 6$.

Kald dette antal S_n. Det er klart at $S_1 = 1$. For at flytte den største ring fra højre til venstre pind skal alle de andre ringe først flyttes hen på den midterste pind. Det kan gøres på S_{n-1} træk, men ikke færre. Derefter kan vi flytte den største ring fra venstre til højre pind, og vi skal herefter flytte de $n-1$ ringe fra midterste pind til venstre pind før vi er i mål. Det kan gøres på S_{n-1} træk, men ikke færre. Dermed er $S_n = 2S_{n-1} + 1$.

Vi har nu beskrevet S_n rekursivt, men vi ønsker en lukket formel for S_n. Ud fra rekursionen er det nemt at få en idé om at $S_n = 2^n - 1$, og dette kan let vises let ved induktion efter n når vi har rekursionsligningen.

Opgave 5.7.1. I planen tegnes n rette linjer sådan at der ikke findes to som er parallelle, og så der ikke er tre linjer som skærer hinanden i samme punkt. Bestem antallet a_n af områder som linjerne inddeler planen i.



Eksempel med $n = 3$, hvor $a_3 = 7$

Eksempel 5.7.2. Dobbeltrekursion

I et sprog er der to bogstaver i alfabetet, A og B. Et ord er en række bogstaver hvor to nabobogstaver aldrig begge er B. Vi ønsker at bestemme antallet af ord med n bogstaver. For at gøre dette laver vi en *dobbeltrekursion*. Lad a_n være antallet af ord af længde n som slutter på A, og lad b_n være antallet af ord af længde n som slutter på B. Da er $a_1 = 1$ og $b_1 = 1$. Desuden er

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} \quad \text{og} \quad b_n = a_{n-1}.$$

Dermed er

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_{n-1} + a_{n-2},$$

og a_n er derfor lig med det $n+1$'te Fibonaccital F_{n+1}, mens $b_n = a_{n-1}$ er lig med det n'te Fibonaccital F_n. Altså er det samlede antal ord O_n af længde n lig med $F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$. Nu har vi beskrevet antallet rekursivt og kan fx udregne antallet af ord på otte bogstaver ved først at udregne $O_1, O_2, \dots, O_7$. Det er helt fint hvis vi ønsker at bestemme antallet for et lille n, men ikke hvis vi fx vil bestemme O_{1000}. Der er det smartere med en lukket formel.

Opgave 5.7.2. På hvor mange måder kan man farve nogle af felterne på et 2×8-bræt sorte når to felter med en fælles kant ikke begge må være sorte?
Hint: 58

Sætning 5.7.1. Løsning til rekursionsligning

Hvis følgen $a_0, a_1, \dots$ opfylder den lineære rekursionsligning

$$a_n = p a_{n-1} + q a_{n-2},$$

og r_1 og r_2 er løsningerne til andengradsligningen $x^2 - px - q = 0$, da er følgen bestemt ved

$$a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$$

løsning til rekursionsligningen for alle konstanter A og B.

Bevis. Lad r_1 og r_2 være løsningerne til andengradsligningen $x^2 - px - q = 0$. Fra teorien om andengradsligninger er det kendt at $r_1 + r_2 = p$ og $-r_1 r_2 = q$. Sæt nu $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ for alle n. Da er

$$\begin{aligned} p a_{n-1} + q a_{n-2} &= p\left(A \cdot r_1^{n-1} + B r_2^{n-1}\right) + q\left(A \cdot r_1^{n-2} + B r_2^{n-2}\right) \\ &= (r_1 + r_2)\left(A \cdot r_1^{n-1} + B r_2^{n-1}\right) - r_1 r_2\left(A \cdot r_1^{n-2} + B r_2^{n-2}\right) \\ &= A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n = a_n, \end{aligned}$$

hvilket viser at $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ opfylder $a_n = p a_{n-1} + q a_{n-2}$. □

Eksempel 5.7.3. Fra rekursionsligning til lukket formel

Sætning 5.7.1 kan benyttes til at bestemme en lukket formel for det n'te Fibonaccital. Udgangspunktet er at følgen givet ved $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $F_0 = 0$ og $F_1 = 1$. Løsningerne til $x^2 - x - 1 = 0$ er $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ og $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, og det betyder at følgen givet ved

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

er en løsning til selve rekursionsligningen. Hvis vi kan finde konstanter A og B sådan at formlen passer for F_1 og F_2, er vi derfor i mål. Vi skal altså bestemme A og B så

$$0 = F_0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B \text{ og}$$
$$1 = F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B).$$

Den første ligning giver at $B = -A$, og ved at indsætte dette i ligning nummer to fås $1 = \sqrt{5}A$, dvs. $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ og $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Det giver Binets formel for Fibonaccitallene:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Opgave 5.7.3. Georg bygger tårne af klodser. Han har røde $1\times1\times1$-klodser, og så har han $1\times1\times2$-klodser i seks forskellige farver. Bestem en lukket formel for hvor mange forskellige $1\times1\times n$-tårne han kan bygge.

Opgave 5.7.4. Et $2\times n$-bræt består af $2n$ enhedskvadrater og skal udfyldes med 1×2-brikker og 2×2-brikker. Bestem en lukket formel for antallet a_n af måder hvorpå det kan gøres.

Opgave 5.7.5. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2\times n$-bræt sorte, når to felter med en fælles kant ikke begge må være sorte. Bestem en lukket formel for a_n. (*Tip:* For ikke at få alt for besværlige udregninger er det en god idé at tage udgangspunkt i a_0 og a_1 i stedet for fx a_1 og a_2.)

Opgave 5.7.6. Bestem en lukket formel for antallet af n-cifrede tal der kun indeholder cifrene $1,2,3,4,5$, og hvor to på hinanden følgende cifre altid har differens ±1. *Hint*: 140

Opgave 5.7.7. På hvor mange måder kan man farvelægge en række af 16 stole så hver stol bliver enten rød eller grøn, og længden af hver ensfarvet sekvens af stole er ulige? (Baltic Way 2014) *Hint*: 227

Opgave 5.7.8. Et $2\times n$-bræt består af $2n$ enhedskvadrater. Antallet af måder hvorpå man kan farve nogle af felterne røde uden at der opstår et rødt 2×2-kvadrat, kaldes C_n. Det største tal k så 3^k går op i C_n, kaldes k_n. Bestem k_{2019}.
Hint: 85

Opgave 5.7.9. Betragt mængden $S_n = \{1,2,\dots,n\}$. Antallet af delmængder af S_n som ikke indeholder to på hinanden følgende tal, og som har netop k elementer, betegnes $A(n,k)$. Bestem en lukket formel for $A(n,k)$. *Hint*: 252

Opgave 5.7.10. Lad n være et positivt helt tal. Alma har n røde bokse og n røde låg alle med forskellige mønstre. Tallet $A(n,r)$ angiver på hvor mange måder hun kan vælge r røde bokse og r røde låg og fordele dem i r par med en boks og et låg i hvert. Bertha har n blå bokse $b_1, b_2, \dots, b_n$ og $2n-1$ blå låg $l_1, l_2, \dots, l_{2n-1}$. Tallet $B(n,r)$ angiver på hvor mange måder hun kan vælge r blå bokse og r blå låg og fordele dem i r par med en boks og et låg i hvert, med den ekstra betingelse at boksen b_i kun kan danne par med lågene $l_1, l_2, \dots, l_{2i-1}$ for $i = 1,2,\dots,n$ da låget ellers er for lille. Vis at $A(n,r) = B(n,r)$, og find en lukket formel for disse. (Inspireret af opgave fra IMO shortlist 1997)

5.8 Princippet om inklusion og eksklusion - PIE

I nogle situationer har man behov for at tælle antallet af elementer i en foreningsmængde, og det kan man benytte princippet om inklusion og eksklusion til, også kaldet PIE.

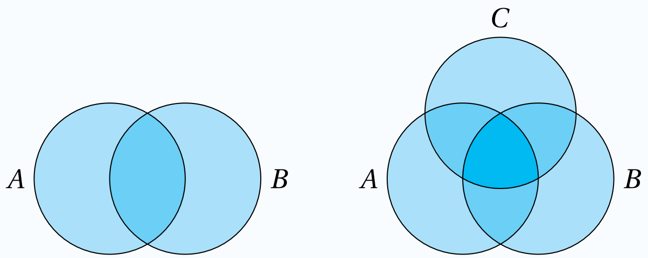
Eksempel 5.8.1. Princippet om inklusion og eksklusion

Hvis man skal bestemme antallet af elementer i foreningsmængden af to mængder A og B, ses det nemt ved et Venn-diagram (figur nedenfor) at

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Tilsvarende ses for tre mængder A, B og C at

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Man inkluderer med andre ord først alt det der er i A og i B og i C, men så har man inkluderet alt det de har tilfælles, to gange hvis det ligger i to af mængderne, og tre gange hvis det ligger i alle tre mængder. Derfor ekskluderer man nu alt det der ligger i fællesmængden mellem A og B, fællesmængden mellem A og C samt fællesmængden mellem B og C. Nu har man sørget for at alt det der ligger i en eller to af mængderne, er inkluderet præcis én gang. De elementer der ligger i alle tre mængder, har man imidlertid først inkluderet tre gange, men derefter ekskluderet tre gange, dvs. vi skal til slut inkludere disse elementer én gang igen.

Dette kan generaliseres til følgende sætning:

Sætning 5.8.1. PIE - Princippet om inklusion og eksklusion

Antallet af elementer i foreningsmængden af n mængder $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kan beregnes således:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Bevis. Formlen bevises ved at se på et element der tilhører præcis k af mængderne $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dette element er talt med

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k+1} \binom{k}{k} = 1 - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = 1 - (1-1)^k = 1$$

gang. Altså er samtlige elementer talt med præcis én gang, og derfor er formlen korrekt. □

Eksempel 5.8.2. PIE

Når vi benytter PIE, starter vi som regel med en grundlæggende mængde M som vi ønsker at tælle en delmængde af. Derefter konstruerer vi delmængder af M som tilsammen indeholder alt det vi ønsker at frasortere. Vi benytter altså igen den helt grundlæggende tællestrategi at tælle det der ikke opfylder den ønskede betingelse.

Hvis vi fx vil tælle antallet af tal i mængden $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2018\}$ som hverken er delelige med 5 eller 7, så konstruerer vi $A_5 \subseteq M$ som indeholder alle tal fra M som er delelige med 5, og $A_7 \subseteq M$ som indeholder alle tal fra M som er delelige med 7. Svaret er dermed $|M| - |A_5 \cup A_7|$ som nemt

kan tælles med PIE. Vi har

$$\begin{aligned}|M|-|A_5\cup A_7| &= |M|-(|A_5|+|A_7|-|A_5\cap A_7|)\\ &= 2018-\left(\left\lfloor\frac{2018}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2018}{7}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{2018}{5\cdot 7}\right\rfloor\right)\\ &= 2018-(403+288-57)=1384.\end{aligned}$$

Eksempel 5.8.3. PIE

PIE kan også bruges til at beregne på hvor mange måder man kan få øjensummen 21 ved et kast med seks almindelige terninger. For at benytte PIE skal vi definere nogle mængder som vi gerne vil finde foreningsmængden af. I dette tilfælde betragter vi grundlæggende mængden

$$M=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21,\, x_i\in\mathbb{N}\},$$

der netop svarer til at skrive 21 som en ordnet sum af seks positive heltal. Problemet er selvfølgelig nu at vi kun ønsker de elementer fra M hvor $x_i\le 6$. Derfor definerer vi

$$A_i=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\mid x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=21,\, x_i>6,\, x_i\in\mathbb{N}\}$$

for $i=1,2,3,4,5,6$ da det på denne måde er nemt at tælle antallet af elementer i A_i samt fællesmængder af A_i'erne. Antal elementer i foreningsmængden $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6$ kan derfor tælles ved PIE og består netop af de summer hvor en af de seks summander er større end 6, altså alt det vi ønsker at frasortere. Antallet T af måder man kan få øjensummen 21 ved et kast med seks almindelige terninger, er altså

$$\begin{aligned}T &= |M|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5\cup A_6|\\ &= |M|-\left(\sum_{1\le i\le 6}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le 6}|A_i\cap A_j|+\cdots-|A_1\cap\cdots\cap A_6|\right).\end{aligned}$$

Antal elementer i M er $\binom{20}{5}$ ifølge sætning 5.4.2. Tilsvarende er $|A_i|=\binom{14}{5}$ da det svarer til at de seks tal har sum 15 når vi har trukket 6 fra x_i, og ligeledes $|A_i\cup A_j|=\binom{8}{5}$, $i\neq j$, da det svarer til at summen af de seks tal skal give 9 når vi har trukket 6 fra både x_i og x_j. Fællesmængden af tre eller flere af A_i'erne er tom da det ikke er muligt at tre eller flere af de seks tal er større end seks når summen er 21. Dermed er

$$T=\binom{20}{5}-\binom{6}{1}\binom{14}{5}+\binom{6}{2}\binom{8}{5}=4332.$$

Eksempel 5.8.4. PIE

Man kan også benytte PIE til at tælle antallet af *fikspunktsfri* permutationer af tallene $1,2,\dots,n$, dvs. permutationer hvor intet tal afbildes på sig selv.

Der er i alt $n!$ permutationer af de n tal. Lad A_i være mængden af permutationer som fikserer elementet i. Antallet P af fikspunktsfri permutationer er da

$$P=n!-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$\begin{aligned}P=n!-\Big(&\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|\\ &+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\cdots\cap A_n|\Big).\end{aligned}$$

Antallet af permutationer som fikserer k bestemte tal, er $(n-k)!$, dvs.

$$\begin{aligned}P &= n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots(-1)^n\binom{n}{n}0!\\ &= n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^n\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

Opgave 5.8.1. Benyt PIE til at tælle hvor mange af tallene i $M = \{1,2,3,\ldots,1000\}$ der hverken er delelige med 3, 5 eller 7.

Opgave 5.8.2. Et telefonselskab har netop alle 8-cifrede telefonnumre $c_1c_2c_3 - c_4c_5c_6c_7c_8$ som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6$, $c_1c_2c_3 = c_5c_6c_7$ eller $c_1c_2c_3 = c_6c_7c_8$, hvor $c_1, c_2, \ldots, c_8 \in \{0,1,\ldots,9\}$. Hvor mange telefonnumre har telefonselskabet?

Opgave 5.8.3. På hvor mange måder kan man vælge syv kort fra et almindeligt sæt spillekort med 52 kort så man har mindst ét kort af hver af de fire kulører?

Opgave 5.8.4. Otte personer der danner par to og to, skal stilles på en række så ingen står ved siden af deres partner. På hvor mange måder kan det gøres? *Hint*: 15

Opgave 5.8.5. På hvor mange måder kan man udtage tre delmængder A, B og C af en mængde M med n elementer så $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ og $B \cap C \neq \emptyset$, mens $A \cap B \cap C = \emptyset$? *Hint*: 20

Opgave 5.8.6. Lad n og k være positive hele tal. Vis at

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} (n+k-i)^n$$

Hint: 128

Opgave 5.8.7. Lad S_{2n} være mængden af permutationer af tallene $1,2,3,\cdots,2n$. En permutation $\sigma \in S_{2n}$ siges at have egenskaben P hvis der findes et $i \in \{1,2,3,\cdots,2n-1\}$, så $|\sigma(i) - \sigma(i+1)| = n$. Vis at mere end halvdelen af alle permutationerne i S_{2n} har egenskaben P. *Hint*: 113

6 Invarianter

En *invariant* er en størrelse der ikke ændrer sig selv om situationen ændrer sig. I kombinatorikopgaver hvor man skal undersøge hvilke situationer der er mulige, er det ofte en god idé at overveje om der er noget der er uafhængigt af det der kan ændres i opgaven. Den simpleste invariant er *pariteten* af en størrelse. Et helt tal kan være lige eller ulige, og værdien lige eller ulige kaldes tallets paritet. Grunden til at paritet ofte er simpelt at se på, er at der kun er to tilstande.

Her vil vi først se på paritet som invariant, derefter på lidt mere komplekse invarianter og hvordan man kan konstruere en invariant vha. farvning, og til slut se på monovarianter som er størrelser der enten kun vokser eller kun aftager.

Indhold

6.1 Paritet

Når man lægger nogle hele tal sammen, og summen er lige, så ved man at der må være et lige antal ulige tal blandt de tal man har lagt sammen. Tilsvarende ved man hvis summen er ulige, at der må være et ulige antal ulige tal blandt summanderne. Det er denne basale egenskab man ofte udnytter når man benytter paritet som invariant.

Eksempel 6.1.1. Paritet

I en skakturnering deltager 2025 personer. Vi ønsker at vise at der er et lige antal personer der har spillet et ulige antal kampe.

Lad s_i betegne det antal kampe spiller nummer i har spillet, hvor de 2025 spillere nummereres $1, 2, 3, \dots, 2025$. Summen

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_{2025}$$

må være lige da hvert spil er talt med præcis to gange, dvs. dens paritet er en invariant der er uafhængig af hvor mange kampe den enkelte har spillet. Når summen af nogle hele tal er lige, må der som nævnt være et lige antal ulige tal blandt summanderne, dvs. at der er et lige antal personer der har spillet et ulige antal kampe.

Bemærk at tallet 2025 ikke spiller nogen væsentlig rolle her; heller ikke pariteten af 2025.

Opgave 6.1.1. I en hat ligger 1992 sedler med alle numre fra 1 til 1992. På tilfældig måde trækkes to sedler samtidig fra hatten; differensen mellem tallene på de to sedler skrives på en ny seddel, som lægges i hatten, mens de to udtrukne sedler kastes bort. Der fortsættes på denne måde indtil der kun er én seddel tilbage i hatten. Vis at der på denne seddel står et lige tal. (Georg Mohr-Konkurrencen 1992)

Opgave 6.1.2. Er det muligt at vælge 2013 forskellige punkter $P_1, P_2, \dots, P_{2013}$ i planen så der findes en linje der skærer alle de 2013 linjestykker P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, …, $P_{2012}P_{2013}$, $P_{2013}P_1$ uden at gå gennem nogen af de 2013 punkter?

Opgave 6.1.3. I en skål er der 15 røde, 18 gule og 22 blå bolde. I hvert træk må man tage to bolde af forskellig farve og erstatte dem med en bold af den tredje farve. Efter et antal træk har alle boldene i skålen samme farve. Vis at denne farve ikke afhænger af hvordan man trækker.

Opgave 6.1.4. Lad a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 og a_7 være syv hele tal, og lad b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 og b_7 være de samme syv tal, bare i en anden rækkefølge. Vil produktet

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_7 - b_7)$$

altid være lige?

Opgave 6.1.5. Et spil for tre spillere spilles på et bræt bestående af 99 felter i en lang række. Hver spiller har en spillebrik. Ved spillets start står de tre brikker på det første, det midterste og det sidste felt. En tur består i at man flytter sin brik enten en eller tre pladser frem eller tilbage inden for brættets rammer. Man vinder spillet ved at rykke sin brik hen på et felt hvor en modstanders brik står. Det er spilleren med den midterste brik der starter. Vis at spiller nummer 2 ikke kan vinde. *Hint*: 210

Opgave 6.1.6. Tallene $1, 2, 3, \cdots, 10$ står på en række i denne rækkefølge. I hvert træk ombyttes to tal som står ved siden af hinanden. Efter m træk står tallene i omvendt rækkefølge. Vis at m er ulige. *Hint*: 218

6.2 Invariant modulo n

Når man ser på paritet, så ser man på en størrelse modulo 2. I mange sammenhænge skal man i stedet se på en størrelse modulo et større tal n.

Eksempel 6.2.1. Invariant modulo n

En drage har 100 hoveder. En ridder kan i et hug hugge enten 2, 17, 23 eller 38 hoveder af dragen med det resultat at der straks vokser 5 hoveder ud igen medmindre dragen har mistet alle sine hoveder og dermed dør. Dragen dør først når den ikke har flere hoveder. Kan ridderen slå dragen ihjel?

Svaret er nej. Når ridderen hugger henholdsvis 2, 17, 23 eller 38 hoveder af dragen, ændres antallet af hoveder med henholdsvis $+3$, -12, -18 eller -33 når man medregner dem der vokser ud igen. Derfor er antallet af hoveder invariant modulo 3 efter at der igen er vokset 5 hoveder ud.

Hvis ridderen skal kunne slå dragen ihjel, skal dragen inden sidste hug have 2, 17, 23 eller 38 hoveder, men da dragen til at starte med har $100 \equiv 1 \pmod 3$ hoveder, vil der aldrig være 2, 17, 23 eller 38 hoveder når ridderen skal til at hugge. Dermed kan ridderen ikke dræbe dragen.

Opgave 6.2.1. På en ø er der 18 grønne, 17 røde og 13 blå kamæleoner. Hver gang to kamæleoner af forskellig farve møder hinanden, skifter de begge to farve til den tredje farve. Kan det lade sig gøre at alle kamæleonerne på øen til sidst har samme farve?

Opgave 6.2.2. I en slimet, grå grotte bor et drabeligt dyr, der en sjælden gang imellem vågner nytårsmorgen, går ud og spiser lige så mange får som summen af cifrene i årstallet, lægger sig til at sove igen og først vågner nytårsmorgen efter lige så mange år som det har spist får. Dyret vågnede nytårsmorgen i år 666. Vil dyret vågne nytårsmorgen i år 2000013?

Opgave 6.2.3. I et rum er der til at starte med ingen personer. Hvert minut kommer der enten en person ind i rummet, eller der er to personer som forlader rummet. Er det muligt at der efter 2025 minutter er 1000 personer i rummet?

Opgave 6.2.4. Georg spiller et enmandsspil på et 12×20-bræt hvor hvert felt er et enhedskvadrat, og der er 20 felter langs den nederste kant. Først vælger han et positivt heltal r. Han må nu flytte en brik fra et felt til et andet hvis afstanden mellem de to felters centre er $\sqrt{r}$. Målet er at finde en række træk der kan flytte en brik fra det nederste venstre hjørne til det nederste højre. Vis at Georg ikke kan nå målet hvis r er delelig med 2 eller 3.

Opgave 6.2.5. I en 1001×1001-tabel står der 1 eller -1 i hvert felt. For hver række i er R_i produktet af de 1001 tal i rækken, og for hver søjle j er S_j produktet af de 1001 tal i søjlen. Vis at $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ ikke kan være nul. *Hint*: 158

Opgave 6.2.6. Til at starte med indeholder mængden S punktet $(7, 29)$. Det er nu tilladt at tilføje punkter til S på følgende måde:

i) Hvis punktet (x, y) er i S, må man tilføje punktet $(x+1, y+1)$ til S.

ii) Hvis punktet (x, y) tilhører S, og x og y er lige, må man tilføje punktet $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$ til S.

iii) Hvis punkterne (x, y) og (y, z) begge tilhører S, må man tilføje punktet (x, z) til S.

Er det muligt at tilføje et antal punkter til S så $(3, 2013)$ ligger i S? *Hint*: 62

6.3 Farvning

Mange opgaver kan løses ved at farvelægge de objekter man betragter, på en hensigtsmæssig måde. Dette er endnu en måde at konstruere en invariant på.

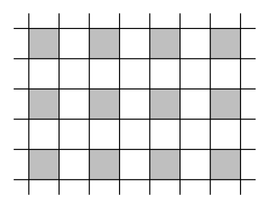
Eksempel 6.3.1. Farvning

Et klassisk eksempel på dette er at et skakbræt hvor to diagonalt modsatte hjørner er fjernet, ikke kan dækkes med 1×2-brikker. En sådan brik dækker nemlig altid et hvidt og et sort felt uanset hvor den ligger, og der er derfor altid dækket lige mange sorte og hvide felter. At brikkerne dækker lige mange sorte og hvide felter uanset hvordan de placeres, er en invariant. Når de to hjørner er fjernet, er der ikke lige mange sorte og hvide felter, og brættet kan derfor ikke dækkes af 1×2-brikker.

Eksempel 6.3.2. Farvning

I det foregående eksempel var farvningen allerede givet på forhånd, men nogle gange skal man selv finde på en smart farvelægning. I dette eksempel skal vi se på et rektangulært gulv som er dækket af 2×2-fliser og 1×4-fliser. Spørgsmålet er nu: Hvis en flise knækker, kan den så, hvis man omarrangerer fliserne, erstattes af en flise af den anden type?

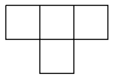
Vi ønsker at finde en smart farvning der viser at dette ikke kan lade sig gøre, dvs. vi skal finde en farvelægning så de to flisetyper ikke kan dække lige mange felter af samme farve. Den traditionelle skakbrætfarvning virker ikke i dette tilfælde, men farvelægningen på figuren opfylder netop dette. Dette viser at en enkelt flise ikke kan erstattes af en flise af den anden type.



Prøv selv at finde på smarte farvelægninger i de følgende opgaver, og husk at det ikke altid er nok med to farver.

Opgave 6.3.1. På et 7×7-bræt står en brik på hvert felt. To felter kaldes nabofelter hvis de har en side tilfælles. Er det muligt at alle brikker hver især flytter til et nabofelt så der efter at alle har flyttet, igen står netop én brik på hvert felt?

Opgave 6.3.2. Kan et 8×8-skakbræt hvor alle fire hjørner er fjernet, dækkes af brikker af følgende type?

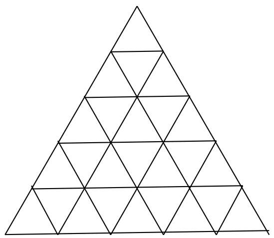


Opgave 6.3.3. På et 7×7-bræt står en brik på hvert felt. To felter kaldes nabohjørnefelter hvis de deler et hjørne, men ikke en side. Er det muligt at alle brikker hver især flytter til et nabohjørnefelt så der efter at alle har flyttet, igen står netop én brik på hvert felt?

Opgave 6.3.4. Kan et 8×8-skakbræt hvor et hjørne er fjernet, dækkes af 1×3-brikker?

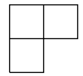
Opgave 6.3.5. Kan et 13×13-skakbræt hvor det midterste felt er fjernet, dækkes af 1×4-brikker? (Baltic Way 1998)

Opgave 6.3.6. På brættet vist på figuren sidder der netop én trænet loppe på hvert felt. Når man fløjter i en speciel loppefløjte, hopper hver loppe over på et felt der har en side tilfælles med det felt den kom fra. Hvor mange tomme felter er der som minimum når der er fløjtet fem gange i fløjten?

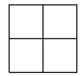


Opgave 6.3.7. På et 50×50-bræt er markeret 117 felter. Vis at det altid er muligt at vælge mindst 30 af de 117 markerede felter så ingen af de 30 felter rører hinanden hverken med en side eller med et hjørne. *Hint*: 104

Opgave 6.3.8. Et 7×7-skakbræt er dækket af brikker af følgende to typer:



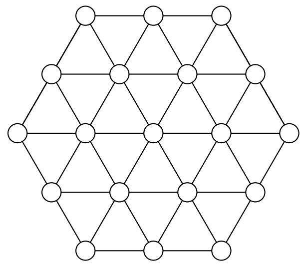
Type a



Type b

Vis at der er netop én brik af type b. (Georg Mohr-Konkurrencen 1997) *Hint*: 162

Opgave 6.3.9. En regulær sekskant er inddelt i 24 ligesidede trekanter som vist på figuren.



I cirklerne ved hvert af de 19 hjørner skrives et tal så ingen tal er ens. Hver trekant har nu tilknyttet tre tal. Hvis tallene vokser i retning mod uret, farves trekanten rød, og hvis de vokser med uret, farves den blå. Bevis at der findes mindst syv trekanter af hver farve. *Hint*: 16

6.4 Konstruktion af invariant med vægte

Eksempel 6.4.1. Konstruktion af invariant med vægte

I en skål er der 2000 hvide bolde. Uden for skålen er der masser af hvide, røde og grønne bolde. Følgende træk er tilladte:

- To hvide bolde fjernes og erstattes af en grøn.
- To røde bolde fjernes og erstattes af en grøn.
- To grønne bolde fjernes og erstattes af en hvid og en rød.
- En hvid og en grøn bold fjernes og erstattes af en rød.
- En rød og en grøn bold fjernes og erstattes af en hvid.

Vi ønsker at vise at når der efter et endeligt antal træk er netop tre bolde tilbage i skålen, da er mindst én af dem grøn, samt at undersøge om det er muligt at ende med netop én bold i skålen.

For at løse opgaven vil vi forsøge at give en bold med en bestemt farve en vægt. Lad h, r og g være antallet af henholdsvis hvide, røde og grønne bolde, og lad x, y, z være vægten af henholdsvis en hvid, en rød og en grøn bold. Vi undersøger om vi kan vælge de tre vægte så

$$I = x \cdot h + y \cdot r + z \cdot g$$

er invariant modulo et helt tal n. En sådan invariant skal opfylde at

$$2x \equiv z,\ 2y \equiv z,\ 2z \equiv x + y,\ x + z \equiv y \text{ og } y + z \equiv x \pmod{n}.$$

Herudfra er det ikke svært at se at

$$I = 1 \cdot h + (-1) \cdot r + 2 \cdot g \pmod{4}$$

er en invariant. Til at starte med er $I = 1 \cdot 2000 \equiv 0 \pmod{4}$, dvs. der gælder altid at $I \equiv 0 \pmod{4}$. Denne invariant kan vi nu bruge til at løse opgaven:

Hvis der er netop tre bolde tilbage, er $h + r + g = 3$. I dette tilfælde er der mindst én grøn, for hvis $g = 0$, er $h + r = 3$ og dermed $I = h - r \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Det er ikke muligt at ende med netop én bold, da $I = h - r + 2g \not\equiv 0 \pmod{4}$, hvis $h + r + g = 1$.

Eksempel 6.4.2. Konstruktion af invariant med vægte

Et skakbræt dækkes med 32 dominobrikker således at brikkerne dækker netop to felter hver. De brikker der ligger vandret, og hvis venstre del dækker et sort felt, kalder vi SH-brikker, og de brikker hvis venstre del dækker et hvidt felt, kalder vi HS-brikker.

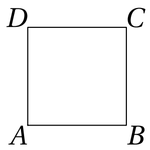
Vi ønsker at knytte en vægt til hvert af de enkelte felter på skakbrættet for at vise at der er lige mange af de to typer brikker. Ideen er at summen af de to felter der dækkes af en lodret brik, ikke skal have nogen indflydelse, dvs. den skal være 0, mens summen af de to felter dækket af en SH-brik skal have modsat fortegn af summen af to felter dækket af en HS-brik.

Nummerér søjlerne 1-8 fra venstre mod højre. Alle sorte felter får tildelt nummeret fra den søjle de ligger i, som vægt, og alle hvide felter får tildelt minus dette nummer. Alle brikker der ligger lodret, dækker nu to felter hvis sum er nul, mens SH-brikker dækker to felter hvis sum er -1, og HS-brikker dækker to felter hvis sum er 1. Da summen af samtlige felter er nul, må der være lige mange SH-brikker og HS-brikker.

−1	2	−3	4	−5	6	−7	8
1	−2	3	−4	5	−6	7	−8
−1	2	−3	4	−5	6	−7	8
1	−2	3	−4	5	−6	7	−8
−1	2	−3	4	−5	6	−7	8
1	−2	3	−4	5	−6	7	−8
−1	2	−3	4	−5	6	−7	8
1	−2	3	−4	5	−6	7	−8

Opgave 6.4.1. En kube med sidelængde $2n$ er sammensat af $4n^3$ klodser af formen $2 \times 1 \times 1$, som hver er sammensat af en hvid og en sort enhedskube. Klodserne sidder sådan at alle sidefladerne i de hvide enhedskuber støder op til sorte, og omvendt. Vis at hvis man ser på alle de klodser der sidder lodret, så har halvdelen den hvide del opad og halvdelen den sorte del opad.

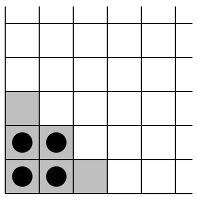
Opgave 6.4.2. Ved hvert hjørne i et kvadrat $ABCD$ ligger der til at starte med netop én sten, og ved siden af kvadratet er der en kæmpe bunke med sten. Et træk består i at vælge et hjørne, fjerne et antal sten og lægge dobbelt så mange sten ved et af de to nabohjørner. Er det muligt efter et endeligt antal træk at få 2012 sten ved A, 2011 sten ved B, 2011 sten ved C og 2010 sten ved D? *Hint*: 245



Opgave 6.4.3. I følgen begyndende med $1,0,1,0,1,0,\ldots$ er hvert led fra og med det syvende summen af de seks foregående modulo 10. Vis at sekvensen $0,1,0,1,0,1$ ikke på noget tidspunkt er en del af følgen. *Hint*: 182

Opgave 6.4.4. Georg spiller følgende enmandsspil: I hvert felt på et 5×5-bræt står der 0. I hvert træk må han vælge et tilfældigt felt og lægge 1 til både tallet i feltet og tallene i alle de felter der har en side til fælles med feltet. Kan Georg opnå at der står 2012 på samtlige felter? (Baltic Way 2012) *Hint*: 8

Opgave 6.4.5. Brættet på figuren fortsætter uendeligt opad og til højre. Til at starte med er der placeret fire brikker som vist på figuren. I hvert træk må man fjerne en brik på et felt, hvis både feltet ovenfor og feltet til højre er tomme, og derefter placere en brik på hvert af disse felter. a) Vis at det ikke er muligt at få det grå område tømt for brikker. *Hint*: 247. b) Er det muligt at få det grå område tømt for brikker hvis der til at starte med kun er en brik på det nederste venstre hjørne? *Hint*: 52



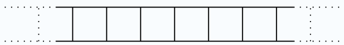
Opgave 6.4.6. Til at starte med er der fire kongruente retvinklede trekanter med hypotenuse 1. I hvert træk må man vælge en trekant og erstatte den med de to mindre trekanter der fremkommer når man tegner højden fra den rette vinkel på hypotenusen. Er det muligt efter et endeligt antal træk at opnå en situation hvor der ikke er to kongruente trekanter? *Hint*: 88

6.5 Monovarianter

Når noget ændrer sig, er det ikke altid man kan finde en bestemt størrelse der ikke ændrer sig modulo et helt tal, men man kan nogle gange i stedet finde en bestemt størrelse der enten kun vokser eller kun aftager. En sådan størrelse kaldes en *monovariant.*

Eksempel 6.5.1. Monovariant

På et uendeligt spillebræt er der en lang række af felter, dvs. uendeligt mange til hver side.



Til at starte med er der et endeligt antal brikker på brættet, gerne flere på hvert felt. I hvert træk må man vælge et felt med mindst to brikker, tage to brikker fra feltet og flytte den ene til feltet umiddelbart til højre og den anden til feltet umiddelbart til venstre. Vi vil vise at det aldrig er muligt at nå tilbage til udgangspunktet efter et endeligt positivt antal træk.

Vi forsøger at finde en monovariant der enten bliver større i hvert træk eller mindre i hvert træk, da det viser at man ikke kan komme tilbage til udgangspunktet. Nummerér felterne

$$\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots.$$

I et træk flyttes to brikker på felt nummer n til henholdsvis felt $n-1$ og felt $n+1$. Her kan vi udnytte at

$$(n-1)^2+(n+1)^2=2n^2+2>2n^2.$$

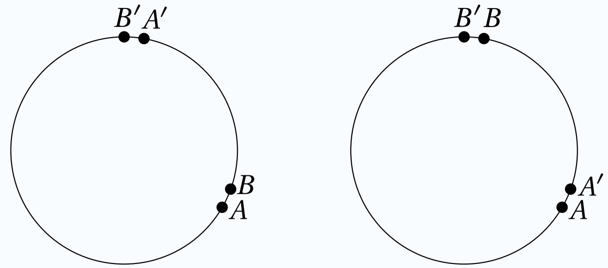
Hvis vi fx vælger S lig summen af kvadratet på feltnummeret for hver brik, da vil S vokse med 2 for hvert træk, dvs. S er en monovariant. Det er derfor uanset udgangspunktet aldrig muligt at nå tilbage til udgangspunktet efter et endeligt positivt antal træk.

Eksempel 6.5.2. Monovariant

Til et middagsselskab skal $2n$ personer fordeles om et rundt bord. Hver person er venner med mindst n af de andre personer, og venskab er gensidigt. Vi vil vise at det altid muligt at placere de $2n$ personer rundt om bordet så alle sidder ved siden af to de er venner med.

Først placerer vi de $2n$ personer helt tilfældigt rundt om bordet. Idéen er nu lade P være antallet af par som sidder ved siden af hinanden og ikke er venner. Ved at vise at hvis $P>0$, da kan vi flytte rundt på personerne så P bliver mindre, sikrer vi os at vi kan opnå en situation hvor P er 0.

Antag at A og B sidder ved siden af hinanden, at de ikke er venner, og yderligere at B sidder til højre for A. Da A har mindst n venner, er der mindst n personer der sidder til højre for en af A's venner. Blandt disse må være en af B's venner da B højst har $n-1$ personer han ikke er venner med blandt de n personer. Der findes altså et par A' og B' så A' er ven med A, B' er ven med B, og så B' sidder til højre for A' (se figuren til venstre). Nu tager vi rækken af personer fra og med B mod uret langs bordet til og med A' og sætter denne række af personer i modsat rækkefølge (se figuren til højre). På denne måde fjernes parrene (A,B) og (A',B'), parrene (A,A') og (B,B') tilføjes, og alle andre par bibeholdes. Derfor falder P med mindst 1.



I dette eksempel ønskede vi altså at opnå en bestemt situation og konstruerede derfor en monovariant der kunne ændres hvis den ønskede situation ikke var opnået. Dette er endnu en måde at benytte en monovariant på.

Opgave 6.5.1. I et rektangulært skema er der et positivt heltal i hvert felt. I hvert træk må man enten vælge en række og fordoble hvert tal i rækken, eller man må vælge en søjle og trække 1 fra hvert tal i søjlen. Er det muligt efter et endeligt antal træk at opnå at der står 0 i hvert felt?

Opgave 6.5.2. Ved hver kant i en n-kant står der et positivt reelt tal. Hvis tallene a, b, c, d står ved fire på hinanden følgende kanter og $(a-d)(b-c) < 0$, da må man bytte om på b og c. Vis at denne proces ikke kan fortsætte i det uendelige, men må stoppe på et tidspunkt.

Opgave 6.5.3. I et kortspil er der n kort nummereret $1, 2, 3, \dots, n$. Georg blander kortene så de ligger i tilfældig rækkefølge i en bunke. Nu udfører Georg følgende operation: Hvis det øverste kort har værdien k, så tager han de k øverste kort og lægger dem i modsat rækkefølge i bunken, mens alle andre kort bliver hvor de er. Hvis Georg fortsætter med at udføre denne operation, er han så sikker på før eller siden at få kortet med nummer 1 øverst?

Opgave 6.5.4. I planen er givet n røde punkter og n blå punkter. Der findes ikke tre punkter der ligger på samme linje. Vis at det er muligt at tegne n rette linjestykker der parvis forbinder de n røde punkter med de n blå punkter så ingen af disse linjestykker skærer hinanden. *Hint*: 185

Opgave 6.5.5. På en række står der 2013 positive heltal. I hvert træk konstrueres en ny række af positive heltal under den foregående række på følgende måde: Række nummer $n+1$ konstrueres ud fra række nummer n ved at der under hvert tal a i række n skrives det antal gange a optræder i række n. Bevis at der på et tidspunkt kommer to identiske rækker efter hinanden. *Hint*: 136

Opgave 6.5.6. Verdenerne i Verdenernes Sfære er nummereret $1, 2, 3, \dots$, og de har forbindelse så der for ethvert positivt n gælder at troldmanden Gandalf kan bevæge sig i begge retninger mellem de tre verdener nummereret n, $2n$ og $3n+1$. Er det muligt for Gandalf at komme fra en vilkårlig verden til en vilkårlig anden verden? (Baltic Way 1997) *Hint*: 163

Opgave 6.5.7. Ved hjørnerne i en 1001-kant sidder mindst 501 frøer. Der kan sagtens være mere end en frø ved hvert hjørne. Hvert minut sker der følgende: Hvis der er mindst to frøer ved samme hjørne, da vil to af frøerne ved dette hjørne hoppe - en til hvert af de to nabohjørner. Vis at der efter et endeligt antal minutter vil opstå en situation hvor der er frøer ved mindst 501 af hjørnerne. *Hint*: 170

6.6 Flere udfordringer

Opgave 6.6.1. Et enmandsspil består af en cirkelskive med n røde knapper i en cirkel langs kanten, $n \geq 3$. Knapperne kan lyse, og fra starten er der netop én knap som lyser. Når man trykker på en knap som lyser, så slukkes den, og de to naboknapper skifter status, dvs. hvis de lyste, så slukkes de, og omvendt. Hvis man trykker på en knap der ikke lyser, så sker der ingenting. Spillet vindes hvis man kan få slukket alle knapperne. For hvilke n er det muligt at vinde?

Opgave 6.6.2. Ved et rundt bord sidder 1994 personer. Til at begynde med har en af personerne 1994 kort, mens resten ikke har nogen kort. I hver runde i et spil giver alle personer med mindst to kort, et kort til hver af sine naboer. Spillet stopper hvis hver person har højst 1 kort. Vil spillet på et tidspunkt stoppe?

Opgave 6.6.3. Lad $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ være en følge af positive heltal. I hvert træk må man vælge to numre j og k, $j < k$, hvor a_j ikke går op i a_k, og erstatte a_j med $\gcd(a_j, a_k)$ og a_k med $\operatorname{lcm}(a_j, a_k)$. Vis at det på et tidspunkt ikke længere er muligt at trække. *Hint*: 177

Opgave 6.6.4. Lad $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, være et polynomium af grad højst 3. Det er tilladt at udføre følgende to operationer på P:

(i) Ombytte a med d og b med c.

(ii) Erstatte $P(x)$ med $P(x+t)$, hvor t er et reelt tal.

Er det muligt efter et endeligt antal operationer at komme fra polynomiet $P_1(x) = x^3 + x^2 - 2x$ til $P_2(x) = x^3 - 3x - 2$? *Hint*: 146

Opgave 6.6.5. På en række ligger der 31 forskellige kort. Det er nu tilladt at udføre følgende operationer:

(i) Flytte det forreste kort om bagerst i rækken.

(ii) Tage de første 15 kort og placere det første i det første af de 15 mellemrum mellem de 16 resterende kort, det andet i det andet mellemrum, osv.

Hvor mange forskellige rækkefølger af de 31 kort kan man opnå? *Hint*: 50

Opgave 6.6.6. Et rektangel er inddelt i et antal mindre rektangler. I de mindre rektangler er længden af mindst én side heltallig. Vis at dette også gælder for det store rektangel. *Hint*: 263

Opgave 6.6.7. På et uendeligt skakbræt spilles følgende spil. Til at begynde med er der n^2 brikker som står på et $n \times n$-kvadrat således at der er en brik på hvert felt. Et træk består i lade en brik hoppe hen over en nabobrik lodret eller vandret til et tomt felt lige på den anden side, og fjerne den brik man hopper henover. Bestem samtlige værdier af n for hvilke det er muligt at ende med netop én brik på brættet. (IMO 1993) *Hint*: 55

7 Spilstrategier

De spiltyper vi skal se på her, er primært spil af følgende type: Spil der spilles af to spillere A og B som skiftes til at trække, hvor A starter, og hvor man taber hvis man ikke kan trække. Der er desuden kun et endeligt antal træk, dvs. spillet vil altid slutte, og det kan ikke ende uafgjort.

Når man skal vise at en af spillerne har en vindende strategi, kan man typisk se på taber- og vindermængden, kopiere modpartens træk eller udnytte modpartens træk i sit eget, eller man kan benytte det der hedder strategityveri. Alt det skal vi se nærmere på i dette kapitel.

Indhold

7.1 Vindermængde og tabermængde

Inden vi går i gang med at se på konkrete spil, skal vi have helt styr på hvad der menes med en vindende strategi, og se på hvornår vi er sikre på at en af de to spillere har en vindende strategi.

Definition af vindende strategi

At en spiller har en *vindende strategi*, betyder at spilleren altid kan vinde ligegyldigt hvordan modparten spiller.

Sætning 7.1.1. Vindende strategi

Betragt et spil hvor der er to spillere som skiftes til at trække efter kendte regler, og hvor der ikke indgår tilfældighed som fx terningekast. Desuden skal spillet ende med en vinder efter et endeligt antal træk. I et sådant spil har en af de to spillere en vindende strategi.

Bevis. Lad os antage at A ikke har en vindende strategi. Det betyder at ligegyldigt hvordan A spiller, så kan A ikke være sikker på at vinde. Da vi ved at spillet ender efter et endeligt antal træk, og at der til slut er en vinder, så betyder det at B kan sikre sig sejren uanset hvordan A spiller. Derfor har B i dette tilfælde en vindende strategi. Altså kan vi konkludere at en af de to spillere altid har en vindende strategi. □

Beviset kan virke lidt abstrakt, men man kan forestille sig at man i princippet kan lave en oversigt over alle mulige udfald af spillet - en slags træ med forgreninger for hvert træk. Fordi spillet er deterministisk og altid ender med en vinder, har en af de to spillere en vindende strategi.

I det følgende er der forskellige strategier for hvordan man kan afgøre hvilken af de to spillere der har en vindende strategi i denne type spil.

I det første eksempel og de første opgaver vi skal se på, er strategien at dele alle spilpositioner i to grupper: De spilpositioner hvor første spiller har en

vindende strategi hvis hun skal trække, og dem hvor hun ikke har, dvs. dem hvor spiller nummer to har en vindende strategi. Det virker dog kun i spil hvor mængden af spilpositioner er overskuelig. Disse to mængder af spilpositioner definerer vi om et øjeblik som vindermængden og tabermængden, men først et eksempel.

Eksempel 7.1.1. Vindermængde og tabermængde

Lad n og k være positive heltal. I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne 1, 2, ..., $k-1$ eller k sten fra bordet. Spiller A starter, og den spiller der tager den sidste sten, har vundet. Spørgsmålet er nu for hvilke værdier af n den første spiller A har en vindende strategi.

Dette kan man få en idé om ved at prøve sig frem med små tal. Det er for eksempel indlysende at for $n \in \{1,2,\dots,k\}$ har spiller A en vindende strategi, mens for $n = k+1$ har hun ikke. Dvs. A har en vindende strategi, hvis hun efter første træk kan efterlade $k+1$ sten på bordet, og det kan hun for $n \in \{k+2, k+3, \dots, 2k+1\}$. På denne måde ser man induktivt at A har en vindende strategi netop når n ikke er et multiplum af $k+1$.

Inden vi argumenterer helt præcist for påstanden, indfører vi noget teori.

Definition af vindermængde og tabermængde

I et spil med to spillere som skiftes til at trække efter de samme regler, og hvor spillet stopper når en af de to spillere ikke længere kan foretage et lovligt træk, og dette sker efter et endeligt antal træk, inddeler vi samtlige spilpositioner i to mængder:

Mængden V af alle spilpositioner hvor spilleren der skal til at trække, har en vindende strategi, kaldes *vindermængden*.

Mængden T af alle spilpositioner hvor spilleren der skal til at trække, *ikke* har en vindende strategi, kaldes *tabermængden*.

Sætning 7.1.2. Vindermængde og tabermængde

Vi betragter et spil med to spillere A og B som skiftes til at trække, hvor der gælder samme regler for hvordan A og B må trække, og hvor A starter. Spillet stopper når en af de to spillere ikke længere kan foretage et lovligt træk, og det sker efter et endeligt antal træk.

Hvis man i spillet har inddelt alle mulige spilpositioner i to mængder V og T, da er V vindermængden og T tabermængden hvis der gælder følgende:

i) Når man trækker fra en spilposition i V, skal der findes et lovligt træk så man efter trækket opnår en spilposition fra T.

ii) Når man trækker fra en spilposition i T, skal man efter et vilkårligt lovligt træk opnå en spilposition fra V, eller det skal være umuligt at trække.

Bevis. Antag at mængderne T og V opfylder ovenstående.

Hvis A trækker fra en position i V, kan A altid trække så der opnås en spilsituation fra mængden T. Når modparten B derefter trækker, opnår B lige meget hvilket træk der vælges, en situation fra mængden V, eller også kan B ikke trække og har tabt. Da man altid kan trække fra en spilposition fra V, kan spillet fortsætte på denne måde så A altid har mulighed for at trække. Da spillet ender efter et endeligt antal træk, betyder det at B ender med ikke at kunne trække. Derfor vinder A. Dette viser at A har en vindende strategi for alle spilpositioner fra mængden V.

Hvis A trækker fra en spilposition i mængden T, vil der lige meget hvordan A trækker, opstå en situation fra V. I dette tilfælde har vi lige vist at B, der nu skal trække, har en vindende strategi.

Dermed er V og T henholdsvis vindermængde og tabermængde. □

Eksempel 7.1.1 fortsat. Vindermængde og tabermængde

Nu vender vi tilbage til eksemplet fra før. Først bemærker vi at spillet opfylder forudsætningerne i sætningen, da de to spillere skiftes til at trække, der gælder samme regler for hvordan A og B må trække, og at spillet slutter efter et endeligt antal træk. Vi kan altså benytte sætningen og inddele i vinder- og tabermængde:

Af analysen fremgår det hvordan man deler startmulighederne op i tabermængden

$$T = \{n \in \mathbb{N} | n = m(k+1) \text{ for } m \in \mathbb{N}\}$$

og vindermængden

$$V = \{n \in \mathbb{N} | n \neq m(k+1) \text{ for } m \in \mathbb{N}\}.$$

Vi kan argumentere for at dette faktisk er tabermængden og vindermængden ved at benytte sætningen: Ved en spilposition fra V, dvs. en situation hvor n ikke er et multiplum af $k+1$, kan A efter hvert træk efterlade et bord med et multiplum af $k+1$ sten ved at fjerne den rest man får ved at dividere n med $k+1$. Denne rest er altid blandt $1, 2, \ldots, k$. Ved en spilposition fra T, dvs. hvor n er et multiplum af $k+1$ sten, vil A ligegyldigt hvordan hun trækker, opnå en situation hvor der ikke er et multiplum af $k+1$ sten, da hun skal fjerne mellem 1 og k sten.

Dermed har vi bevist at spiller A har en vindende strategi netop hvis n ikke er et multiplum af $k+1$, mens B har en vindende strategi hvis n er et multiplum af $k+1$.

Prøv at benytte sætningen til at bestemme vinder- og tabermængde i de næste opgaver. Husk at det er en god idé at bygge mængderne op ved at starte med at se på de helt simple tilfælde hvor der kun er få træk til spillet stopper.

Opgave 7.1.1. I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne m sten fra bordet, hvor $m \in \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\}$. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet. Bestem de værdier af n for hvilke spiller A har en vindende strategi.

Opgave 7.1.2. I et spil ligger der n sten på et bord, og de to spillere A og B må i hvert træk fjerne p^m sten fra bordet, hvor p er et primtal, og m er et ikkenegativt helt tal. Primtallet p og tallet m må gerne variere fra træk til træk. Den spiller der tager de sidste sten, har vundet. Bestem tabermængden.

Opgave 7.1.3. Albert og Benny spiller et spil hvor de starter med en snor af heltallig længde n. Albert starter med at klippe snoren i tre stykker hver med heltallig længde så der er et stykke som er længere end de to andre. De to korteste stykker smides væk, og den længste snor gives videre til modparten, som nu skal klippe denne snor i tre stykker efter de samme regler. Sådan fortsætter spillet indtil det ikke er muligt at klippe snoren i tre stykker efter de givne regler. Den som først ikke kan klippe, har tabt. Bestem samtlige værdier af n for hvilke Albert har en vindende strategi.

Opgave 7.1.4. Fire bunker med henholdsvis 38, 45, 61 og 70 tændstikker ligger på et bord. To spillere skiftes til at udvælge to bunker og fjerne et antal tændstikker fra hver. De skal altså fjerne mindst én fra hver bunke, men behøver ikke at fjerne lige mange fra hver. Den spiller som først ikke kan trække, taber. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (Baltic Way 1996) *Hint*: 256

7.2 Kopiér modpartens træk

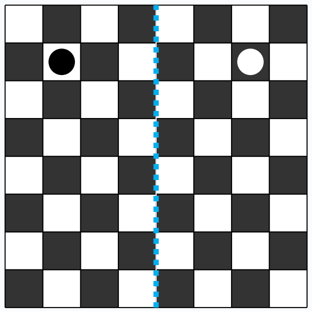
Nu skal vi se på nogle spil som nemt bliver så uoverskuelige at det er umuligt at bestemme taber- og vindermængden. Når man er på jagt efter en vindende strategi, kan man ikke få overblik over alle de situationer der kan opstå i spillet, men man kan ved hjælp af en strategi der bygger på symmetri hvor man så at sige "kopierer"modstanderens træk, sørge for at man kun kommer ud i et overskueligt udvalg af alle disse muligheder.

Eksempel 7.2.1. Symmetri

På et skakbræt skiftes spiller A og B til at placere en springer. Spiller A placerer hvide springere og B sorte. De må kun placere springerne på tomme felter som ikke er truet af en springer af modsat farve. Den spiller som først ikke kan placere en springer, har tabt. Vi skal nu undersøge hvem af A og B der har en vindende strategi, når spiller A starter.

Det er let at se at det bliver fuldstændigt uoverskueligt at opdele samtlige mulige situationer i en vinder- og tabermængde, men hvis vi blot kan finde en vindende strategi for en af spillerne, er det også godt nok.

I dette tilfælde har spiller B en vindende strategi. Hvis hun udnytter den lodrette symmetriakse midt gennem brættet der parrer felterne to og to, og hver gang spiller A har placeret en springer, placerer en springer på det felt der er parret med det felt hvor spiller A placerede, vil hun altid have mulighed for at trække.



Det følger af at den springer A netop har placeret på et felt, ikke kan true makkerfeltet. Da A kunne sætte sin springer på et felt uden at den blev truet, så kan spiller B derfor tilsvarende sætte sin springer på makkerfeltet uden at dén bliver truet, da alle sorte springere er en spejling af alle hvide springere i symmetriaksen.

Her udnytter man altså at felterne kan parres to og to så man hele tiden har mulighed for at kopiere modspillerens træk og dermed ikke kan tabe.

Opgave 7.2.1. Georg og hans mor spiller et spil hvor der til at starte med er n bunker med lige mange mønter i hver. De har tur på skift, og i hver tur må de fjerne en eller flere mønter fra en af bunkerne. Den spiller der fjerner den sidste mønt, har vundet. Georg starter altid. Bestem de værdier af n for hvilke Georg har en vindende strategi.

Opgave 7.2.2. Et særligt sæt spillekort består af 125 forskellige kort, alle med et unikt trecifret tal hvis cifre udelukkende er 1, 2, 3, 4 og 5. Desværre er kortet med tallet 333 blevet væk, så der er kun 124 kort tilbage. Spiller A og B spiller følgende spil hvor de skiftes til at trække, og A starter. Kortene lægges på bordet så alle tallene er synlige, og i hvert træk skal en spiller fjerne to kort hvis differens er 1, 10 eller 100. Den spiller som først ikke har mulighed for at trække, har tabt. Hvilken spiller har en vindende strategi?

Opgave 7.2.3. Alma og Bertha spiller følgende spil på et $n \times 1001$-skakbræt, hvor $n \geq 1001$. På skift farver de for et positivt heltal k alle de k^2 felter i et $k \times k$-kvadrat. Tallet k må gerne variere fra træk til træk, men det er ikke tilladt at kvadratet indeholder felter som allerede er farvede. Den spiller der først ikke kan trække, har tabt. Bestem samtlige værdier af n for hvilke Alma har en vindende strategi når hun starter. *Hint*: 207

Opgave 7.2.4. Tallet 10^{2007} er skrevet på en tavle. Anne og Berit spiller et spil hvor de efter tur foretager en af to operationer:

(i) erstatter et tal x på tavlen med to hele tal a og b større end 1 så $x = ab$;

(ii) sletter det ene eller begge af to ens tal på tavlen.

Spilleren som ikke er i stand til at foretage sit træk, har tabt spillet. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi hvis Anne starter? (NMC 2007) *Hint*: 24

7.3 Udnyt modpartens træk

I afsnittet før kopierede vi blot modpartens træk for at vinde. Nu skal vi se på eksempler hvor vi baserer vores træk på modpartens træk uden at det er en kopi af modpartens træk.

Eksempel 7.3.1. Udnyt modpartens træk

Alma og Bertha spiller følgende spil. På et bord ligger 100 runde, 200 trekantede og 200 firkantede brikker. I hvert træk skal en spiller fjerne to brikker, men det må ikke være en trekant og en firkant. Alma starter, og man taber hvis man ikke kan trække, eller der ikke er flere brikker tilbage når man skal trække. Hvilken spiller kan lægge en strategi der sikrer hende sejren? (Georg Mohr-Konkurrencen 2016)

Vi viser nu at Bertha kan sikre sig sejren ved at basere sit træk på Almas træk: Berthas vindende strategi er at sørge for at der hver gang hun har trukket, er et lige antal af hver af de tre slags brikker.

Først viser vi at det er muligt for Bertha at følge denne strategi. Til at starte med er der et lige antal af hver af de tre slags brikker. Hvis Alma tager to forskellige slags brikker, så tager Bertha de samme slags brikker som Alma. Dette er muligt da der var et lige antal af hver inden Alma trak, og Alma kun har trukket en af hver. Hvis Alma tager to ens brikker, tager Bertha også to ens brikker (men ikke nødvendigvis samme slags som Alma). Dette er muligt så længe der er brikker tilbage, da der efter at Alma har trukket to ens, stadig må være et lige antal af hver slags. På denne måde sikrer Bertha at der er et lige antal af hver af de tre slags brikker når hun har trukket, og hvis hun fortsætter med at følge denne strategi, vil det gælde efter hvert eneste af hendes træk. Bertha kan altså følge denne strategi så længe der er brikker tilbage når hun skal trække.

Nu viser vi at strategien fører til sejr. Bemærk at antallet af brikker til at begynde med er et multiplum af 4. Når Bertha skal trække, vil der derfor altid være mindst to brikker tilbage, og derfor kan Bertha altid trække. Altså taber Alma når Bertha følger denne strategi.

Opgave 7.3.1. I en skål er der til at starte med 2012 mønter. Spiller A og B spiller følgende spil. I hvert træk har de følgende to valgmuligheder:

(i) lægge én mønt i skålen;

(ii) fjerne fire mønter fra skålen hvis der er mindst fire mønter i den.

Den spiller der tager den sidste mønt fra skålen, vinder alle de 2012 mønter der var til at starte med. Det er spiller A der starter, og det antages at begge spillere har et uudtømmeligt lager af mønter. Vis at en af de to spillere har en vindende strategi, og bestem hvilken spiller.

Opgave 7.3.2. Der er 2012 lamper på et bord. To personer spiller følgende spil. I hvert træk trykker en spiller på kontakten til en lampe, men han må aldrig genskabe en tidligere konfiguration af tændte lamper. Den spiller som først ikke kan trække, taber. Hvilken spiller har en vindende strategi? (Baltic Way 2012)

Opgave 7.3.3. Der er en bunke med 1000 tændstikker. To spillere skiftes til at trække og kan i hvert træk fjerne mellem en og fem tændstikker. Det er også tilladt højst ti gange i hele spillet at fjerne seks tændstikker. Hvis fx den første spiller har benyttet dette træk syv gange, og den anden tre, kan trækket ikke benyttes mere. Den spiller som tager den sidste tændstik, vinder. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? (BW 2010) *Hint*: 235

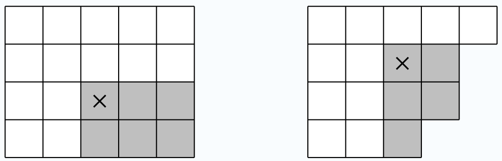
Opgave 7.3.4. På et uendeligt skakbræt skiftes to spillere til at markere et tomt felt. Den ene spiller markerer med kryds og den anden med bolle. Den der først har udfyldt fire felter som danner et 2×2-kvadrat med sit symbol, har vundet. Har en af de to spillere en vindende strategi? (Baltic Way 1996) *Hint*: 258, 111

7.4 Strategityveri

I de foregående eksempler og opgaver har vi eksplicit bestemt tabermængden og vindermængden eller fundet en konkret strategi vinderen kunne følge, men det er ikke altid så let. I mange spil kan man alligevel vise at den ene spiller har en vindende strategi, endda uden at man kan vide hvad et eneste træk i denne strategi er!

Eksempel 7.4.1. Strategityveri

I et spil er der en chokoladebar som er inddelt i $n \times m$ små chokoladekvadrater, $n, m > 1$. Der er to spillere A og B, som skiftes til at trække. I hvert træk skal en spiller vælge et chokoladekvadrat som ikke allerede er spist, og spilleren spiser derefter chokoladekvadratet samt alle chokoladekvadrater der hverken er over eller til venstre for det valgte kvadrat. Hvis man fx vælger det markerede chokoladekvadrat på de to figurer, så spiser man de grå chokoladekvadrater.



Det øverste venstre kvadrat er forgiftet, og den der spiser dette kvadrat, dør. Spiller A starter.

Vi vil nu vise at spiller A har en vindende strategi for alle mulige værdier af n og m, uden at vi har nogen anelse om hvad strategien er! Vi viser det indirekte ved at antage at spiller B har en vindende strategi.

I første træk vælger A det nederste højre kvadrat. Da spiller B har en vindende strategi, kan B trække så B vinder uafhængigt af hvordan A spiller. Den situation der opstår efter at B har trukket, kalder vi S. Nu ser vi på et nyt spil hvor A vælger samme kvadrat som B før valgte, og da A på denne måde spiser de samme kvadrater som B plus det nederste højre kvadrat, så opstår situationen S. Men nu kan A vinde da A så at sige kan stjæle den vindende strategi B havde i første scenarie. Dette er i modstrid med at B har en vindende strategi, og derfor er vores antagelse forkert. Da spillet slutter efter et endeligt antal træk og ikke kan ende uafgjort, må A have en vindende strategi.

Det kan ikke anbefales at spille spillet, selvom man er spiller A, uden først at have fundet selve strategien! Og det kan man faktisk godt.

I dette eksempel så vi hvordan man kan vise noget ved at benytte et argument der handler om at man kan stjæle modstanderens strategi. På engelsk kaldes dette *strategy stealing*.

Opgave 7.4.1. En tændstikæske indeholder 300 tændstikker. To spillere A og B skiftes til at trække, og i hvert træk skal de fjerne et antal tændstikker fra æsken - mindst én og højst halvdelen. Den som først ikke kan trække, har tabt. Spiller A starter. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi? Løs opgaven ved at benytte strategityveri. (Man kan også sagtens finde vindermængde og tabermængde, men det skal du ikke her.)

Opgave 7.4.2. På en tavle står tallene $1, 2, 3, \dots, n$. To spillere A og B spiller følgende spil. De skiftes til at trække, og i hvert træk skal de fjerne et tal m samt alle dets divisorer. Den som fjerner det sidste tal, har vundet. Hvilken af de to spillere har en vindende strategi når A starter?

Eksempel 7.4.2. Uendelig tabermængde

I et spil ligger der til at starte med to bunker sten på bordet. Hvert træk består i at fjerne et antal sten fra den ene bunke eller fjerne samme antal sten fra begge bunker. Den spiller der fjerner den sidste sten, har vundet. En udgangsposition med a sten i den ene bunke og b i den anden betegner vi med (a, b). Vi ønsker at vise at der findes uendeligt mange udgangspositioner så spiller B har en vindende strategi, men altså ikke bestemme dem. Dette svarer til at vise at tabermængden er uendelig.

Man kan godt pusle sig frem til de første elementer i tabermængden og finde en algoritme for hvordan det næste element fremkommer, og derved vise at den er uendelig, men i dette eksempel skal vi se på et andet trick hvor man overhovedet ikke behøver at bestemme et eneste element i tabermængden.

Vi viser det i stedet indirekte ved at antage at tabermængden er endelig, lidt ligesom før hvor vi stjal modpartens strategi. Da tabermængden er endelig, findes et største største tal n så ingen elementer i tabermængden indeholder en bunke med flere end n sten. Dermed må udgangspositionen $(n+1, 2n+2)$ ligge i vindermængden. Lige meget hvordan man trækker i denne situation, opnår man en situation hvor mindst én af bunkerne indeholder flere end n sten. Ifølge antagelsen findes der fra denne position en vindende strategi da denne position ikke ligger i tabermængden, men det er i modstrid med at $(n+1, 2n+2)$ ligger i vindermængden. Antagelsen er derfor forkert, og tabermængden må være uendelig.

Læg mærke til at vi igen overhovedet ikke har peget på hvilke spilpositioner der ligger i de to mængder. Vi kan faktisk ud fra denne analyse ikke pege på et eneste element i tabermængden selv om vi har vist at den er uendelig.

Opgave 7.4.3. To personer spiller følgende spil. Der ligger til at starte med n sten på bordet, og hver spiller skiftes til at tage m^2 sten fra bordet, hvor m er et positivt heltal, der gerne må variere fra træk til træk. Den spiller der tager den sidste sten, har vundet. Vis at der findes uendeligt mange værdier af n for hvilke spiller nummer to har en vindende strategi. (Baltic Way 1995) *Hint*: 25

8 Grafteori

Dette er en introduktion til de vigtigste begreber i grafteori, udvalgt teori samt eksempler på opgavetyper inden for emnet med fokus på de opgavetyper der typisk forekommer til internationale matematikkonkurrencer.

Langt de fleste grafteoriopgaver til matematikkonkurrencer er ikke formuleret med grafteori, så første skridt er ofte at formulere opgaven med grafteoretiske termer. I nogle opgaver er det ret oplagt, mens det i andre er ret svært. Man kan tænke på grafteori som en struktur der gør det muligt at gå mere teoretisk til mange problemstillinger, og som hjælper med at skabe overblik over dem.

Indhold

8.1 Grafer

Vi starter med en masse definitioner som det er vigtigt at få styr på.

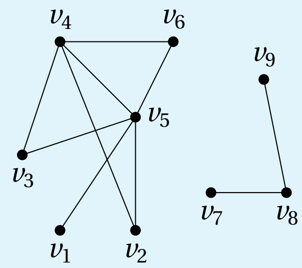
Definition af graf, knude, kant, nabo og valens

En *graf* er et par af mængder $G = (V, E)$, hvor V er en ikke-tom endelig mængde af *knuder*, og E er en mængde af *kanter* så hver kant forbinder to knuder fra V med hinanden (eller evt. forbinder en knude med sig selv). Hvis $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, så betegner $v_i v_j$ den kant som forbinder v_i og v_j.

To knuder kaldes *naboer* eller *naboknuder* hvis der findes en kant som forbinder dem.

En knudes *valens* er antallet af kanter der udgår fra knuden, dog tæller en kant der går fra knuden til knuden selv, dobbelt. Valensen af en knude v betegnes $d(v)$. Den maksimale valens af en knude i grafen betegnes Δ og den minimale valens δ.

Graf med 9 knuder og 10 kanter:



Naboknuder:
v_7 og v_8 er naboknuder.
v_1 og v_2 er ikke naboknuder.

Valens:
Den minimale valens er $\delta = 1$.
Den maksimale valens er $\Delta = 5$.

graf *graph*
knude, knuder *vertex, vertices*
kant *edge*
naboknude *neighbour*
valens *degree*

Opgave 8.1.1. Vis at antallet af knuder med ulige valens er lige.

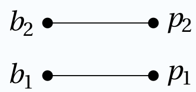
Opgave 8.1.2. Til en fest er der n personer hvoraf nogle er venner. Venskab er gensidigt. Vis at der findes to personer som har lige mange venner til festen.

Opgave 8.1.3. Der er $2n$ personer til en fest, og hver person er ven med et lige antal personer til festen. Venskab er gensidigt. Vis at der findes to personer som har et lige antal fælles venner til festen. *Hint*: 223

Eksempel 8.1.1. Vælg knude med maksimal valens

I en børnehave er der en masse børn og en masse puslespil. Hvert barn har lagt mindst ét puslespil, men ikke alle, og hvert puslespil er lagt af mindst ét barn, men ikke af alle. Vi ønsker at vise at der findes to børn og to puslespil sådan at de to børn hver har lagt præcis ét af de to puslespil og ikke det samme.

For at vise dette ved hjælp af grafteori identificerer vi først børnene og puslespillene med knuder i en graf, og lader to knuder være naboer hvis den ene repræsenterer et puslespil, og den anden repræsenterer et barn som har lagt puslespillet. Idéen er nu at vælge en barneknude b_1 med maksimal valens blandt barneknuderne. Da intet barn har lagt alle puslespil, findes en puslespilsknude p_2 som ikke er nabo til b_1. Vælg nu en barneknude b_2 som er nabo til denne puslespilsknude. Da b_1 havde maksimal valens blandt barneknuderne, findes en puslespilsknude p_1 som er nabo til b_1, men ikke til b_2.



Altså findes der to børn og to puslespil sådan at de to børn hver har lagt præcis ét af de to puslespil og ikke det samme.

Opgave 8.1.4. I Greifswald er der tre skoler A, B og C hvor der på hver går mindst en elev. For hvert valg af tre elever, en fra A, en fra B og en fra C, er der to som kender hinanden, og to som ikke kender hinanden. Vis at mindst et af følgende udsagn er sandt:

- Der er en elev fra A som kender alle elever fra B.
- Der er en elev fra B som kender alle elever fra C.
- Der er en elev fra C som kender alle elever fra A.

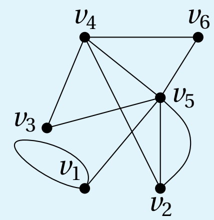
(BW 2011) *Hint*: 2

Definition af simpel graf

En graf kaldes *simpel* hvis der ikke findes kanter som forbinder en knude med sig selv, og der ikke findes to kanter som forbinder samme par af knuder.

Bemærk at hvis en graf ikke er simpel og fx indeholder to kanter mellem v_2 og v_5, så kan man ikke bruge betegnelsen v_2v_5 om disse kanter da den ikke er entydig.

Ikke-simpel graf:



v_1 er forbundet til sig selv.

v_2 og v_5 er forbundet med to kanter.

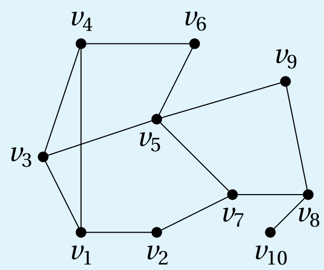
simpel graf *simple graph*

Definition af tur, sti og kreds/cykel

En *tur* af længde l er en følge af l forskellige kanter $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \ldots, v_lv_{l+1}$. Navnet kommer af at man kan gå denne *tur* i grafen. Turen angives ofte blot ved knuderne den går igennem: $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{l+1}$. (Hvis grafen ikke er simpel, kan det være nødvendigt med andre betegnelser for turen).

En *sti* af længde l er en tur af længde l hvor alle knuderne er forskellige.

En *kreds* af længde l er en tur af længde l hvor første og sidste knude er identiske, mens alle andre knuder er forskellige. En kreds kaldes også en *cykel*.



En tur af længde 10:
$v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_5, v_6, v_4, v_3, v_5, v_7$.

En sti af længde 8:
$v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_5, v_6, v_4, v_3$.

En kreds/cykel af længde 7:
$v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_5, v_3, v_1$.

tur *trail*
sti *path*
kreds/cykel *cycle*

Sætning 8.1.1. Kreds

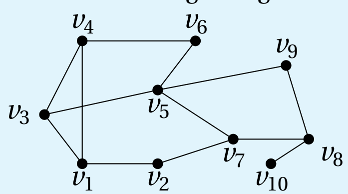
Lad G være en simpel graf, og antag at $\delta \geq 2$. Da indeholder G en kreds af længde mindst $\delta + 1$.

Bevis. Først vælger vi en tilfældig knude v_1, derefter en nabo v_2 til v_1, en nabo v_3 til v_2, osv. indtil dette ikke længere er muligt, så alle knuderne $v_1, v_2, \dots, v_s$ er forskellige. Da v_s har mindst δ naboer, og disse alle må være blandt knuderne $v_1, v_2, \dots, v_{s-1}$ da det ikke er muligt at komme videre, kan vi konstruere en kreds ved at vælge den nabo til v_s som har det mindste indeks. Hvis dette indeks kaldes i, er $v_i v_{i+1}, \dots, v_s v_i$ en kreds af længde mindst $\delta + 1$. □

Definition af sammenhængende graf og sammenhængskomponent

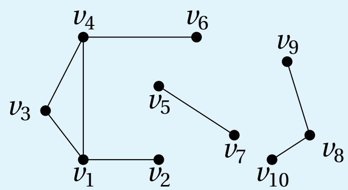
En graf kaldes *sammenhængende* hvis der mellem vilkårlige to knuder findes en sti fra den ene til den anden.

Sammenhængende graf:



En *sammenhængskomponent* er en delgraf som består af alle knuder som er forbundet med en sti til en given knude, samt alle kanter mellem disse knuder.

Usammenhængende graf, der består af tre sammenhængskomponenter:



sammenhængende graf *connected graph*
sammenhængskomponent *connected component*

Sætning 8.1.2. Sti

Lad G være en simpel sammenhængende graf med n knuder. Da findes en sti af længde mindst $\min(2\delta, n-1)$.

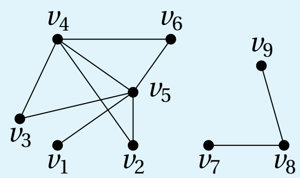
Opgave 8.1.5. Bevis sætning 8.1.2. *Hint*: 198

Opgave 8.1.6. I et land er hvert par af byer forbundet med en direkte togrute eller en direkte busrute. Vis at det er muligt at inddele landet i to disjunkte inddele sådan at alle byer i den ene del kan nummereres $b_1, b_2, \dots, b_n$ så der findes en busrute mellem to byer b_i og b_i+1 for alle $i = 1, 2, \dots, n-1$, og alle byer i den anden del kan nummereres $t_1, t_2, \dots, t_m$ så der findes en togrute mellem to byer t_j og t_{j+1} for alle $j = 1, 2, \dots, m-1$. (Bemærk at den ene del kan være tom.) *Hint*: 18

Definition af delgraf, udspændende delgraf og induceret delgraf

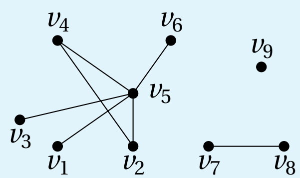
En *delgraf* G' af G, er en graf $G' = (V', E')$ hvor $V' \subseteq V$ og $E' \subseteq E$.

Graf G:



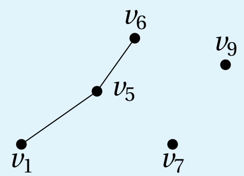
Delgrafen kaldes *udspændende* hvis $V' = V$.

Udspændende delgraf G':



Delgrafen induceret af en delmængde V' af knudemængden V er delgrafen som har V' som knudemængde, og hvor kantmængden består af alle kanter fra E som forbinder to knuder fra V'.

Delgraf G' induceret af $\{v_1, v_5, v_6, v_7, v_9\}$:



delgraf *subgraph*
udspændende delgraf *spanning subgraph*
delgraf induceret af *subgraph induced by*

8.2 Træer

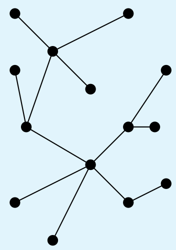
Definition af træ, skov og blad

Et *træ* er en sammenhængende graf som ikke indeholder en kreds.

En *skov* er en graf som ikke indeholder en kreds. En skov er altså en graf hvis sammenhængskomponenter er træer.

Et *blad* er en knude med valens 1.

Træ med ni blade:



træ *tree*
skov *forest*
blad *leaf*

Sætning 8.2.1. Egenskaber ved træer

i) Ethvert træ indeholder mindst Δ blade.

ii) Ethvert træ kan konstrueres ved at starte med en knude og derefter tilføje et blad med en tilhørende kant ad gangen.

iii) Enhver sammenhængende graf indeholder en udspændende delgraf som er et træ, også kaldet et udspændende træ.

Bevis. Vi beviser i) og overlader de to andre dele til læseren i næste opgave.

Hvis $\Delta = 0$, er det trivielt. Antag derfor at $\Delta \geq 1$, og vælg en knude v med maksimal valens Δ. For hver kant fra v vælges en sti der starter i v og fortsætter langs kanten til den ender i et blad. Da grafen er et træ og dermed ikke indeholder nogen kreds, ved vi at den må ende i et blad, og at to stier der udgår fra v langs to forskellige kanter, nødvendigvis ender i to forskellige blade. Dermed indeholder grafen mindst Δ blade. □

Opgave 8.2.1. Bevis sætning 8.2.1.

Sætning 8.2.2. Karakteristik af træer

Hvis G er en simpel sammenhængende graf med n knuder, da er følgende ækvivalent, dvs. hver betingelse er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at grafen er et træ.

i) G indeholder ingen kreds.

ii) G indeholder netop $n-1$ kanter.

iii) To vilkårlige knuder er forbundet med netop én sti.

iv) Hvis man fjerner en vilkårlig kant, bliver grafen usammenhængende.

Bevis. Vi beviser at i) og iii) er ækvivalente og overlader resten til læseren i næste opgave.

iii) ⇒ i): Hvis en graf indeholder en kreds, vil to knuder i kredsen være forbundet med to forskellige stier. Dvs. hvis to vilkårlige knuder er forbundet med netop en sti, da indeholder grafen ikke en kreds.

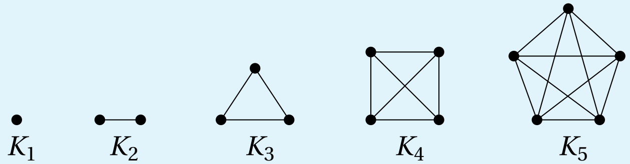
i) ⇒ iii): Hvis to knuder er forbundet med to forskellige stier, da findes to knuder som ligger på begge disse stier så de to delstier mellem disse to knuder ikke har fælles kanter, og de danner tilsammen en kreds. Grafen indeholder dermed en kreds. Det betyder at hvis grafen ikke indeholder en kreds, så vil to vilkårlige knuder være forbundet med netop en sti.□

Opgave 8.2.2. Bevis sætning 8.2.2.

8.3 Komplette grafer og Ramsey-tal

Definition af komplet graf

Den *komplette graf* K_n er grafen som består af n knuder som alle parvis er forbundne med en kant, dvs. K_n indeholder $\binom{n}{2}$ kanter.



komplet graf *complete graph*

Eksempel 8.3.1. Ensfarvet K_3

I den komplette graf K_6 er alle kanter malet enten røde eller blå. I dette eksempel vil vi vise at der uanset hvordan kanterne er farvet, altid findes en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Vælg en tilfældig knude v. Da valensen af v er 5, må mindst tre af de fem kanter der udgår fra v, have samme farve, lad os sige rød. Betragt de tre knuder der er forbundet til v med en rød kant. Hvis blot to af disse knuder er forbundet med en rød kant, har vi en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er røde. Antag derfor at ingen af de tre knuder er indbyrdes forbundet med en rød kant. Da må de parvis være forbundet med blå kanter, og de udgør dermed en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er blå.

Definition af Ramsey-tal

Ramsey-tallet $R(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ er det mindste tal p så der for alle komplette grafer K_n, $n \geq p$, gælder at uanset hvordan man farver kanterne i K_n med r farver, da findes mindst ét $i = 1, 2, \ldots, r$ så grafen indeholder en komplet delgraf K_{m_i} hvor alle kanter er farvet med farve nummer i.

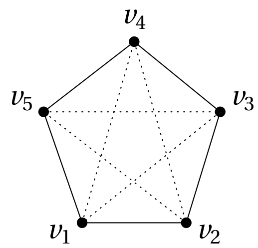
Ramsey-tal *Ramsey number*

Sætning 8.3.1. Ramsey-tallet $R(3,3)$

Ramsey-tallet $R(3,3)$ er 6.

Bevis. Eksempel 8.3.1 viser at $R(3,3) \leq 6$ da det viser at enhver komplet graf K_n, $n \geq 6$, hvor kanterne er malet med to forskellige farver, altid indeholder en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Betragt nu den komplette graf K_5. Man kan farve alle kanterne i K_5 med to farver så den ikke indeholder en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Kald knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, og farv fx kanterne $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_1$ røde og resten af kanterne blå.



Da indeholder grafen ingen delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve, og dette viser at $R(3,3) = 6$. □

Sætning 8.3.2. Ramsey-tallet $R(3,3,3)$

Ramsey-tallet $R(3,3,3)$ er 17.

Bevis. Konstruktionen af en K_{16}-graf hvor kanterne er farvet i tre forskellige grafer uden at der findes en ensfarvet K_3, er så kompliceret at vi springer den over her. Det er til gengæld ikke så svært at vise den anden del af beviset, dvs. at $R(3,3,3) \leq 17$, og det overlades til læseren i opgave 8.3.1. □

Opgave 8.3.1. Vis at $R(3,3,3) \leq 17$. *Hint*: 108

Opgave 8.3.2. Er det muligt at farve kanterne i K_6 røde og blå så der ikke findes en ensfarvet kreds af længde fire? *Hint*: 169

Opgave 8.3.3. Ved et busstoppested står ni personer. Vis at der enten findes fire personer blandt disse som alle er venner, eller tre personer hvor ingen af dem er venner, mens dette ikke altid er tilfældet hvis en af personerne forlader busstoppestedet. (Venskab er gensidigt). *Hint*: 257

Opgave 8.3.4. I en badmintonklub er der 18 spillere hvoraf nogle har spillet mod hinanden, mens andre ikke har. Vis at der enten findes fire spillere som alle har spillet mod hinanden, eller fire spillere hvor ingen har spillet mod hinanden. Vis yderligere at det ikke altid er tilfældet hvis der kun er 17 spillere i klubben. *Hint*: 6

Sætning 8.3.3. Ramsey-tal

Der gælder at

$$R(m_1, m_2) \le R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1).$$

Når begge led på højresiden er lige, er ulighedstegnet skarpt.

Bevis. Sæt $N = R(m_1-1, m_2)+R(m_1, m_2-1)$, og betragt en to-farvning af kanterne i K_N med farverne rød og blå. Lad v være en knude i denne graf.

Hvis v er forbundet til $R(m_1-1, m_2)$ andre knuder med røde kanter, da findes der enten m_2 knuder blandt disse $R(m_1-1, m_2)$ knuder som alle er forbundet med blå kanter, eller m_1-1 knuder som alle er forbundet med røde kanter, og i det sidste tilfælde vil de m_1-1 knuder sammen med v udgøre m_1 knuder som alle er forbundne med røde kanter. Altså indeholder grafen i dette tilfælde enten en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf.

Antag derfor at v ikke er forbundet til $R(m_1-1, m_2)$ andre knuder med røde kanter. Da må v være forbundet til $R(m_1, m_2-1)$ knuder med blå kanter, og med samme argument som før medfører dette at grafen enten indeholder en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Dermed er $R(m_1, m_2) \le R(m_1-1, m_2)+R(m_1, m_2-1)$.

Sidste del af sætningen bevises i opgave 8.3.5. □

Opgave 8.3.5. Bevis resten af sætning 8.3.3. *Hint*: 81

Eksempel 8.3.2. Farvning af hele tal

I nogle sammenhænge hvor man kan bruge grafteori, er det ikke altid helt oplagt hvordan man kommer fra problemstilling til graf. Betragt følgende problemstilling: Er det muligt at farve tallene $1,2,\ldots,16$ i tre forskellige farver så der ikke findes tre ikke nødvendigvis forskellige tal af samme farve så det ene er summen af de to andre?

Det er umiddelbart svært at se den direkte relation til grafteori, men opgaven kan løses grafteoretisk på følgende måde: Farv tallene $1,2,\ldots,16$ i tre forskellige farver. I den komplette graf K_{17} med knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_{17}$ farves kanten $v_i v_j$ samme farve som tallet $|j-i|$. Ifølge sætning 8.3.2 findes der da tre knuder som er forbundet med kanter af samme farve, dvs. knuder v_i, v_j og v_k, $i<j<k$, hvor $k-j$, $k-i$ og $j-i$ har samme farve. Da $(k-j)+(j-i)=k-i$ findes tre tal i samme farve hvor det ene er summen af de to andre. Dermed er det umuligt at farve tallene $\{1,2,\ldots,16\}$ i tre forskellige farver så der ikke findes tre tal i samme farve hvor det ene er summen af de to andre.

Opgave 8.3.6. Er det muligt at farve tallene $1,2,3,\ldots,1978$ i seks forskellige farver så der ikke findes tre (ikke nødvendigvis forskellige) tal x, y, z i samme farve så $x+y=z$? (Variant af IMO 1978 opgave 6)

Bemærkning. Vi har her bestemt $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$ og $R(4,4)=17$, men det er ikke nogen nem opgave at bestemme Ramsey-tal for blot lidt større tal, hvilket følgende udtalelse fra matematikeren Erdős viser: "Erdős asks us to imagine an alien force, vastly more powerful than us, landing on Earth and demanding the value of $R(5,5)$ or they will destroy our planet. In that case, he claims, we should marshal all our computers and all our mathematicians and attempt to find the value. But suppose, instead, that they ask for $R(6,6)$. In that case, he believes, we should attempt to destroy the aliens."(*Kilde:* Wikipedia, Ramsey's theorem.)

I 1989 blev det bevist at $43 \le R(5,5)$, og så sent som i 2024 er det bevist at $R(5,5) \le 46$.

8.4 Kantmaksimal og kanminimal inddeling

I mange problemstillinger er man interesseret i at inddele knudemængden i disjunkte ikke-tomme delmængder som tilsammen indeholder hele knudemængden, så der bliver flest eller færrest muligt kanter mellem knuder i forskellige delmængder. Dette kaldes henholdsvis en *kantmaksimal* og en *kantminimal* inddeling.

Eksempel 8.4.1. Kantminimal inddeling

Betragt følgende problemstilling: I et land er der 37 byer som ligger på 14 øer så der er mindst énby på hver ø. Mellem hvert par af byer der ligger på forskellige øer, er der en flyrute. Det oplyses at byerne er fordelt på øerne så der er færrest muligt forskellige flyruter. Hvordan ligger byerne fordelt?

Intuitivt får man hurtigt en fornemmelse af at man skal placere én by på hver ø og resten på den sidste. For at bevise dette identificerer vi byerne med knuder og betragter den komplette graf med 37 knuder. Da der er et endeligt antal knuder, findes der en kantminimal inddeling af de 37 knuder i 14 delmængder, dvs. en inddeling i 14 disjunkte ikke-tomme delmængder så antallet af kanter mellem knuder i forskellige delmængder er minimalt.

Vi viser indirekte at der i denne kantminimale inddeling er én by på hver ø på nær én, hvor resten af byerne ligger. Antag at vi har en kantminimal inddeling i 14 delmængder, samt at der findes to delmængder med mere end én knude, lad os sige a knuder i den ene og b i den anden, $a \geq b > 1$. Hvis vi flytter en knude fra delmængden med b knuder til den med a knuder, får vi $a-(b-1) > 0$ færre kanter mellem knuder i forskellige delmængder, hvilket er i modstrid med at inddelingen var kantminimal. Dermed er der i en kantminimal inddeling en knude i hver delmængde på nær én som indeholder resten af knuderne, og oversat til byer, øer og flyruter betyder dette at der er færrest flyruter når der er 24 byer på én ø og én på hver af de andre 13.

Eksempel 8.4.2. Kantmaksimal inddeling

Nu vil vi undersøge en problemstilling hvor vi skal se på en inddeling med flest muligt kanter mellem knuder i forskellige delmængder. Vi vil vise at det for enhver graf er muligt at inddele dens knuder i to disjunkte delmængder så hver eneste knude har mindst lige så mange naboer i den anden delmængde som i sin egen delmængde.

Lad G være en simpel graf, og vælg en kantmaksimal inddeling af knuderne fra G i to disjunkte delmængder. Dette er muligt da der er et endeligt antal knuder.

Vi viser indirekte at denne kantmaksimale inddeling opfylder det ønskede. Antag at der findes en knude v så v har flere naboer i sin egen delmængde end i den anden. Ved at flytte v over i den anden delmængde opnår vi en ny inddeling med flere kanter fra den ene del til den anden, hvilket er i modstrid med at den valgte inddeling var kantmaksimal. Dermed opfylder en kantmaksimal inddeling i to delmængder at alle knuder har mindst lige så mange naboer i den anden del som i sin egen, og der findes derfor en inddeling med denne egenskab.

Opgave 8.4.1. Vis at det for enhver simpel graf med mindst n knuder er muligt at inddele dens knuder i n disjunkte ikke-tomme delmængder som tilsammen indeholder hele knudemængden, så hver eneste knude har mindst lige så mange naboer i enhver anden delmængde som i sin egen delmængde.

Opgave 8.4.2. Lad G være en simpel graf hvor $\Delta(G) \leq 3$. Vis at det er muligt at farve alle knuderne i G enten blå eller røde så hver sammenhængskomponent af delgraferne induceret af henholdsvis de røde eller de blå knuder maksimalt indeholder to knuder.

Opgave 8.4.3. Bestem den maksimale værdi af m så det for alle simple grafer G, hvor $\Delta(G) \leq m$, er muligt at farve alle knuderne i G med maksimalt n farver så enhver sammenhængskomponent af en delgraf induceret af alle knuder af en bestemt farve indeholder maksimalt to knuder. *Hint*: 172, 23

Opgave 8.4.4. NASA ønsker at anlægge 2004 små beboelser på Mars. Den eneste måde at komme fra beboelse til beboelse er gennem borede tunneler. En bureaukrat tegner et kort over de 2004 beboelser og tegner N tunneler mellem beboelser tilfældigt på kortet så hvert par af beboelser højst har én tunnel mellem sig. Hvad er den mindste værdi af N der garanterer at uanset hvordan bureaukraten tegner tunnelerne, så er det muligt rejse mellem to vilkårlige beboelser?

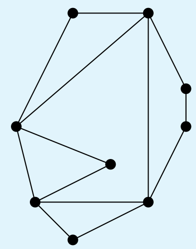
8.5 Euler-grafer og orienterede grafer

Definition af Euler-tur, lukket Euler-tur og Euler-graf

En *Euler-tur* er en tur hvor alle kanter i grafen indgår netop én gang, og en *lukket Euler-tur* er en Euler-tur hvor man starter og slutter i samme knude.

En *Euler-graf* er en graf der indeholder en lukket Euler-tur.

Euler-graf:



Euler-tur *Eulerian trail*
lukket Euler-tur *Eulerian circuit*
Euler-graf *Euler graph*

Definition af orienteret graf

En *orienteret graf* er en graf hvor kanterne har en retning, dvs. hvor de går *fra* en knude *til* en knude.

I en *tur* i en orienteret graf skal man følge retningen.

orienteret graf *directed graph*

Sætning 8.5.1. Euler-grafer

En graf er en Euler-graf netop hvis den er sammenhængende, og alle knuder har lige valens.

En orienteret graf er en Euler-graf netop hvis den er sammenhængende, og der for hver knude gælder at antallet af kanter der udgår fra knuden, er lig antallet af kanter der ender i knuden.

Opgave 8.5.1. Bevis sætning 8.5.1. *Hint*: 84

Opgave 8.5.2. Lad n være et positivt heltal. Vis at det er muligt ud for hvert hjørne i en 2^n-kant at skrive enten 0 eller 1, så hver af de 2^n binære strenge med n cifre man får ved at starte ved et hjørne og derefter fortsætte mod uret til man har besøgt n hjørner i alt, alt imens man nedskriver de cifre man møder, i rækkefølge, alle er forskellige. *Hint*: 151

8.6 Turan-grafer og n-delte grafer

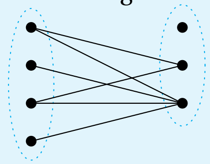
Definition af todelt og n-delt graf

En graf kaldes *todelt* hvis dens knudemængde V kan inddeles i to disjunkte ikke-tomme delmængder V_1 og V_2, $V_1 \cup V_2 = V$, så ingen knuder fra samme delmængde er naboer.

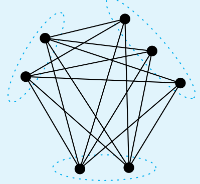
En graf kaldes *n-delt* hvis dens knudemængde V kan inddeles i n disjunkte ikke-tomme delmængder $V_1, V_2, \ldots, V_n$, $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_n = V$, så ingen knuder fra samme delmængde er naboer.

En n-delt graf kaldes *komplet* hvis enhver knude er nabo med samtlige knuder som ikke ligger i samme delmængde.

Todelt graf:



Komplet 3-delt graf:



todelt *bipartite*
n-delt *n-partite*

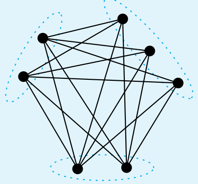
Opgave 8.6.1. Vis at en graf er todelt netop hvis den ikke har en kreds af ulige længde.

Opgave 8.6.2. I en turnering spiller 20 hold mod hinanden. Den første dag spiller alle hold netop én kamp, og den anden dag spiller alle hold igen netop én kamp denne gang mod et nyt hold. Vis at det efter anden dag er muligt at vælge ti hold som endnu ikke har spillet mod hinanden. *Hint*: 129

Definition af Turan-graf

Turan-grafen $T^r(n)$ er den komplette r-delte graf med n knuder, $r \le n$, hvor forskellen mellem antallet af knuder i to delmængder højst er 1.

Turan-grafen $T^3(7)$:



Turan-graf *Turan graph*

Opgave 8.6.3. Vis at blandt alle r-delte grafer med n knuder, $r \le n$, er det Turan-grafen $T^r(n)$ der har flest kanter.

Sætning 8.6.1. Turans sætning

For hele tal n og r, $n \ge r > 1$, er en kantmaksimal graf G med n knuder som ikke indeholder K_{r+1} som delgraf, en Turan-graf $T^r(n)$.

Turans sætning kan vises ved induktion efter n, men den kan også vises ved at benytte knudekopiering, som vi skal se i følgende bevis.

Bevis. Fra opgave 8.6.3 ved vi at blandt de komplette m-delte grafer med n knuder er Turan-grafen $T^m(n)$ den med flest kanter, og det er desuden oplagt at $T^r(n)$ indeholder flere kanter end $T^m(n)$ når $m < r$, så vi skal blot vise at en kantmaksimal graf G med n knuder som ikke indeholder K_{r+1} som delgraf, er en komplet multidelt graf.

En graf er komplet multidelt netop hvis der for alle $x, y, z \in V$ gælder at hvis xy og yz ikke er kanter i G, da er xz heller ikke en kant i G. Vi antager derfor at grafen G ikke er komplet multidelt, dvs. vi antager at der findes knuder x_1, x_2, y så $x_1 y$ og $x_2 y$ ikke er kanter i G, mens $x_1 x_2$ er en kant i G.

Hvis $d(x_i) > d(y)$ for et $i = 1, 2$, da sletter vi knuden y og laver en kopi af knuden x_i. Den nye graf G' kan ligesom G ikke indeholde K_{r+1} som delgraf, og G' indeholder $d(x_i) - d(y) > 0$ flere kanter end G. Dermed kan G i dette tilfælde ikke være kantmaksimal.

Hvis $d(x_i) \le d(y)$ for $i = 1, 2$, da konstruerer vi en ny graf G' ved at slette både x_1 og x_2 fra G samt lave to nye kopier af y. Grafen G' kan ligesom G ikke indeholde K_{r+1} som delgraf, og den må have $2d(y) - d(x_1) - d(x_2) + 1 > 0$ flere kanter end G. Dermed kan G heller ikke i dette tilfælde være kantmaksimal.

Altså er G ikke kantoptimal, og da der findes en kantoptimal graf med n knuder som ikke indeholder K_{r+1}, må den være komplet multidelt, og dermed, som vi så tidligere, Turan-grafen $T^r(n)$. □

Opgave 8.6.4. I et land er der 1000 lufthavne hvoraf nogle er forbundet med flyruter. For vilkårlige tre lufthavne er to af dem ikke forbundet med en flyrute. Hvor mange flyruter kan der maksimalt være?

Opgave 8.6.5. I en graf G med ni knuder er der for vilkårlige fem knuder mindst to kanter der forbinder nogle af disse knuder. Hvor mange kanter må G mindst have? *Hint*: 153

8.7 IMO-eksempler

Nu skal vi se på nogle eksempler fra IMO. Ingen af opgaverne er formuleret som opgaver i grafteori, men den første opgave oversættes nemt til grafteori, mens det i den sidste kræver en rigtig god idé at se hvordan man kan benytte grafteori til at løse opgaven.

Eksempel 8.7.1. Komplette delgrafer

Til en matematikkonkurrence er nogle deltagere venner. En gruppe deltagere som alle er venner, kaldes en klike, og antallet af personer i en klike kaldes dens størrelse. Antag at størrelsen af den største klike blandt deltagerne er $2n$. Vis at det er muligt at placere alle deltagerne i to lokaler så den største klike i det ene lokale har samme størrelse som den største klike i det andet lokale. (IMO 2007 Opgave 3)

I dette eksempel er det nemt at oversætte opgaven til en grafteoretisk opgave, men det er ikke nemt at løse opgaven. Det er meget svært at angive præcist hvordan inddelingen skal være, og i stedet laver vi først en inddeling som ikke altid virker, og justerer den til den virker.

Betragt en klike af maksimal størrelse $2n$, og lad W være mængden af deltagere i denne klike. Først placerer vi alle deltagere i W i lokale X og resten i lokale Y. Lad $k(X)$ og $k(Y)$ betegne den maksimale størrelse af en klike i henholdsvis lokale X og Y på et givent tidspunkt. Hvis vi flytter en deltager fra X til Y, så falder $k(X)-k(Y)$ med 1 eller 2. Hvis vi fortsætter med at flytte deltagere på denne måde, kan vi opnå at $k(X)-k(Y)=0$ eller $k(X)-k(Y)=-1$.

Der er stadig en del arbejde endnu, men det overlades til læseren i næste opgave.

Opgave 8.7.1. Færdiggør løsningen i eksempel 8.7.1.

Eksempel 8.7.2. Permutationer

Lad n være et positivt lige tal. Vis at der findes en permutation $x_1, x_2, \dots, x_n$ af tallene $1, 2, \dots, n$ så der for alle i, $1 \le i \le n$, gælder at x_{i+1} er et af følgende tal: $2x_i, 2x_i-1, 2x_i-n, 2x_i-n-1$ (her er $x_{n+1}=x_1$). (IMO shortlist 2002)

I dette eksempel er sammenhængen til grafteori absolut ikke indlysende, men derimod subtil.

Lad G være en orienteret graf med $m = \frac{n}{2}$ knuder nummereret $1, 2, \dots, m$ samt $2m$ kanter nummereret $1, 2, \dots 2m$. Kanten med nummeret $2i-1$ går fra knude i til knude $2i-1 \pmod m$, og kanten nummereret $2i$ går fra knude i til knude $2i \pmod m$. Dermed er der to kanter som udgår fra hver knude i, og to som ender i hver knude i, nemlig kanterne nummereret i og $i+m$. (Bemærk at grafen ikke er simpel). Resten af løsningen overlades til læseren.

Opgave 8.7.2. Færdiggør løsningen i eksempel 8.7.2. *Hint*: 254, 80

8.8 Blandede opgaver

Opgave 8.8.1. I en klasse er der 49 elever, én ved hvert af 49 borde placeret i syv rækker og syv søjler. Er det muligt at flytte eleverne så hver elev flytter til et nabobord i samme række eller samme søjle, samtidig med at der efter at alle er flyttet, sidder netop én elev ved hvert bord?

Opgave 8.8.2. Til en fest er der $2n+1$ personer hvor n er et positivt heltal. Når man vælger en gruppe blandt deltagerne på højst n personer, findes der altid en person uden for gruppen som er venner med alle i gruppen. Vis at der findes en festdeltager som er venner med alle til festen.

Opgave 8.8.3. Den Forunderlige Ø's efterretningstjeneste har 16 spioner i Tartu. Hver af dem overvåger nogle af sine kolleger, men der er intet par af spioner der overvåger hinanden. Desuden ved man at hvis man udtager ti tilfældige spioner, kan de nummereres så nummer 1 overvåger nummer 2, nummer 2 overvåger nummer 3 osv., og den tiende desuden overvåger nummer 1. Vis at man også kan gøre dette med 11 tilfældigt valgte spioner. (BW 1994) *Hint*: 29

Opgave 8.8.4. Antag at G er en sammenhængende graf med k kanter. Vis at det er muligt at nummerere kanterne $1, 2, 3, \ldots k$ så hver knude som er forbundet med mindst to kanter, opfylder at største fælles divisor af tallene på alle de tilstødende kanter er 1. (IMO 1991) *Hint*: 34

Opgave 8.8.5. I en stor gruppe af mennesker er nogle venner med hinanden. Hver dag holder en person en fest for alle sine venner, og alle personens venner bliver til festen venner med hinanden. Dette fortsætter indtil alle personer har holdt fest. Vis at hvis to personer i gruppen efter alle disse fester stadig ikke er venner, så bliver de det heller ikke selv om man fortsætter med at holde fester på denne måde.

Opgave 8.8.6. I en komplet graf med ni knuder er kanterne enten røde, blå eller slet ikke farvede. Lad n betegne antallet af farvede kanter. Bestem den mindste værdi af n så der altid findes tre knuder som er forbundet af kanter af samme farve. (IMO 1992) *Hint*: 116

Opgave 8.8.7. Lad K_n være den komplette graf med n knuder. Det er nu tilladt at vælge en kreds af længde fire, fjerne en kant fra den, vælge endnu en kreds af længde fire fra den nye graf, fjerne en kant, osv. så længe det er muligt. Bestem det mindste antal kanter der kan være tilbage til slut. (IMO 2004 Shortlist)

Opgave 8.8.8. I en gruppe med n personer, $n > 6$, har hver person præcis tre venner som personen udveksler postkort med. Vis at det er muligt at inddele gruppen i to grupper så hver person udveksler postkort med mindst to personer fra sin egen gruppe. *Hint*: 61

9 Polynomier

I dette kapitel får du en introduktion til polynomier, samt en grundlæggende forståelse af grafer for polynomier, polynomiumsdivision og polynomiers rødder og koefficienter. Desuden er der flere afsnit om polynomier med heltallige koefficienter og deres særlige egenskaber mht. delelighed og irreducibilitet.

I de første afsnit bliver mange sætninger postuleret uden bevis fordi de er ret tekniske, og vi her har mere fokus på intuition og grundlæggende forståelse af centrale egenskaber, men i afsnit 9.5 beviser vi mange af de tidligere sætninger. Det allersidste afsnit kræver kendskab til differentialregning.

Undervejs nævner vi de komplekse tal, men du kan sagtens læse kapitlet uden at vide hvad komplekse tal er, og der er ingen opgaver der inddrager komplekse tal.

Indhold

9.1 Polynomier med reelle koefficienter

I dette afsnit får du en introduktion til polynomier med reelle koefficienter hvor formålet i høj grad er at opbygge en intuition om polynomier samt at få teknikker til at regne med polynomier.

Flere sætninger præsenteres uden bevis, simpelthen fordi beviserne er tekniske og svære at forstå før man er mere fortrolig med polynomier. Derfor kommer der et senere afsnit hvor vi beviser mange af sætningerne, men enkelte sætninger påstuleres også uden bevis da de bygger på meget mere omfattende teori end der er plads til her.

Definition af polynomium

Et *polynomium* P med reelle koefficienter er en funktion defineret på de reelle tal med forskriften $P(x) = 0$ eller

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ og $a_n \neq 0$.

Graden af polynomiet P er n, pånær hvis $P(x) = 0$, da er graden $-\infty$. Fx har polynomiet $P(x) = x^7 + x^2 - 6$ grad 7, mens polynomiet $P(x) = 2$ har grad 0.

Definition af rod

Et tal x_0 kaldes en *rod* i P hvis $P(x_0) = 0$.

Sætning 9.1.1. Polynomier og rødder

Et polynomium af grad $n \geq 0$ har højst n rødder.

Et polynomium af ulige grad har mindst én rod.

Sætning 9.1.1 bevises i afsnit 9.5.

De næste eksempler giver en intuition om polynomiers graf, og flere egenskaber påstås uden bevis.

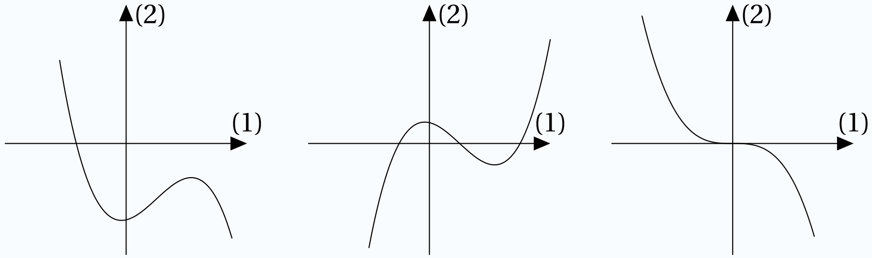
Eksempel 9.1.1. Trejdegradspolynomiers graf

Tredjegradspolynomiets graf skærer ifølge sætning 9.1.1 førsteaksen 1, 2 eller 3 gange da polynomiet har mindst én rod og højst 3 rødder.

Grenene vender hver sin vej, dvs. den ene går opad og den anden nedad.

Tredjegradspolynomiet har 0 eller 2 lokale ekstremumspunkter.

Figuren viser tre forskellige eksempler på forløb for grafen for trejdegradspolynomier der illustrerer disse pointer.



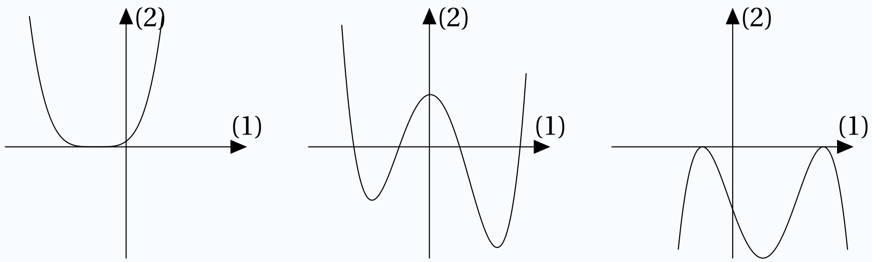
Eksempel 9.1.2. Fjerdegradspolynomiers graf

Fjerde gradspolynomiets graf skærer ifølge sætning 9.1.1 førsteaksen 0, 1, 2, 3 eller 4 gange.

Grenene vender samme vej, dvs. de går begge opad eller begge nedad.

Fjerdegradspolynomiet har 1 eller 3 lokale ekstremumspunkter.

Figuren viser tre forskellige eksempler på forløb for grafen for fjerdegradspolynomier der illustrerer disse pointer.



Sætning 9.1.2. Grafen for et polynomium

Grafen for et polynomium af positiv ulige grad $2m+1$ har mellem 1 og $2m+1$ skæringspunkter med førsteaksen, grenene vender hver sin vej, og polynomiet har et lige antal lokale ekstremumspunkter.

Grafen for et polynomium af positiv og lige grad $2m$ har mellem 0 og $2m$ skæringspunkter med førsteaksen, grenene vender samme vej, og polynomiet har et ulige antal lokale ekstremumspunkter.

Polynomier betragtet som funktioner over de reelle tal er kontinuerte. Her vil vi ikke definere kontinuitet, men vi udnytter flere gange følgende kontinuitetsegenskab, som vi ikke beviser.

Sætning 9.1.3. Mellemværdisætningen

Lad $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være en kontinuert funktion, og lad d være et reelt tal mellem $f(a)$ og $f(b)$. Da findes et tal $c\in]a;b[$ så $f(c)=d$.

Eksempel 9.1.3. Rødder i polynomier

Når man skal undersøge hvor mange reelle rødder et polynomium har, behøver man ikke nødvendigvis at finde dem. Man kan i stedet udnytte at et polynomium er en kontinuert funktion, og benytte mellemværdisætningen.

Fx har fjerdegradspolynomiet

$$P(x)=x^4-2x^3-2x^2+3x+1$$

fire reelle rødder da $P(-2)=19$, $P(-1)=-1$, $P(0)=1$, $P(2)=-1$ og $P(3)=19$, dvs. der er ifølge mellemværdisætningen en reel rod i hvert af følgende intervaller: $]-2;-1[$, $]-1;0[$, $]0;2[$ og $]2;3[$. Vi ved desuden at et fjerdegradspolynomium højst har fire rødder, dvs. P har præcis fire rødder.

Opgave 9.1.1. Betragt tredjegradspolynomiet $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + a$, hvor a er en konstant. Find en værdi af a så P har tre forskellige rødder. (Der er mange, og du skal blot finde én).

Opgave 9.1.2. Vis at fjerdegradspolynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6) + (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

har fire reelle rødder.

Opgave 9.1.3. Lad $n \geq 1$. Hvor mange rødder har n'te gradspolynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)\cdots(x-2n) + (x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-(2n+1))\,?$$

Hint: 233

Opgave 9.1.4. Et polynomium f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Bevis at der findes et tal a som opfylder at $f(f(a)) = a$ uden at $f(a) = a$. (Georg Mohr-Konkurrencen 2011) *Hint*: 131, 41

Eksempel 9.1.4. Omskriv til anden variabel

Hvis vi ved at x_0 er rod i et polynomium, så kan vi ofte finde et andet polynomium af samme grad med fx x_0^2, $\frac{1}{x_0}$ eller $x_0 + \frac{1}{x_0}$ som rod.

Det reelle tal a er rod i $P(x) = x^3 - x - 1$. Vi ønsker at bestemme et tredjegradspolynomium med heltallige koefficienter som har a^2 som rod.

Da a er rod i P, ved vi at $a^3 - a - 1 = 0$ og derfor $a^3 - a = 1$. Det udnytter vi til at konstruere et tredjegradspolynomium med a^2 som rod:

$$1 = \left(a^3 - a\right)^2 = a^2\left(a^2 - 1\right)^2 = a^2\left(a^4 - 2a^2 + 1\right) = \left(a^2\right)^3 - 2\left(a^2\right)^2 + a^2.$$

Altså er a^2 er rod i

$$Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

Opgave 9.1.5. Et tredjegradspolynomium $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 5$ har rødderne a, b og c. Angiv et tredjegradspolynomium med rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$. (Georg Mohr-Konkurrencen 1994) *Hint*: 168

Opgave 9.1.6. Bestem samtlige mulige værdier af $x + \frac{1}{x}$, hvor x tilfredsstiller ligningen $x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$, og løs denne ligning. (Georg Mohr-Konkurrencen 2000) *Hint*: 99

9.2 Polynomiumsdivision

Nu skal vi se hvordan man dividerer polynomier med hinanden. Når man dividerer et polynomium med et andet, kan man få resten 0, dvs. at divisionen går op, men man kan også få et andet polynomium som rest. Det svarer lidt til division med rest for hele tal.

Eksempel 9.2.1. Polynomiumsdivision

Man dividerer $P(x)=x^3-2x^2+2x-15$ med $Q(x)=x-3$ sådan:

$$
\begin{array}{rr|rrrrrrr|l}
 & x-3 & x^3 & -2x^2 & + & 2x & - & 15 & x^2+x+5 & \leftarrow \text{resultat} \\
(x-3)\cdot x^2 \rightarrow & & x^3 & -3x^2 & & & & & & \\ \hline
 & & & x^2 & + & 2x & - & 15 & & \\
(x-3)\cdot x \rightarrow & & & x^2 & - & 3x & & & & \\ \hline
 & & & & & 5x & - & 15 & & \\
(x-3)\cdot 5 \rightarrow & & & & & 5x & - & 15 & & \\ \hline
 & & & & & & & 0 & & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Da resten er 0, betyder det at

$$P(x)=x^3-2x^2+2x-15=(x-3)(x^2+x+5).$$

Eksempel 9.2.2. Polynomiumsdivision med rest

Man dividerer $P(x)=x^3+3x^2-2x+7$ med $Q(x)=x^2+1$ sådan:

$$
\begin{array}{rr|rrrrrrr|l}
 & x^2+1 & x^3 & +3x^2 & - & 2x & + & 7 & x+3 & \leftarrow \text{resultat} \\
(x^2+1)\cdot x \rightarrow & & x^3 & +0x^2 & + & x & & & & \\ \hline
 & & & 3x^2 & - & 3x & + & 7 & & \\
(x^2+1)\cdot 3 \rightarrow & & & 3x^2 & + & 0x & + & 3 & & \\ \hline
 & & & & - & 3x & + & 4 & & \leftarrow \text{rest}
\end{array}
$$

Her er resten $-3x+4$, og det betyder at

$$P(x)=x^3+3x^2-2x+7=(x^2+1)(x+3)-3x+4$$

Opgave 9.2.1. Udfør følgende divisioner:

a) Divider $P(x)=x^4-2x^2+3x-2$ med $Q(x)=x-1$.

b) Divider $P(x)=3x^4+8x^3+12x^2+9x+4$ med $Q(x)=x^2+x+1$.

c) Divider $P(x)=x^n-1$ med $Q(x)=x-1$.

d) Divider $P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ med $Q(x)=x-1$.

Sætning 9.2.1. Polynomiumsdivision

Lad P og Q være polynomier med reelle koefficienter af grad henholdsvis n og m med $n \geq m \geq 0$.

Da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ og et entydigt bestemt polynomium R af grad mindre end m, så

$$P(x)=Q(x)D(x)+R(x).$$

Polynomiet R kaldes resten af P ved division med Q.

Sætning 9.2.1 bevises i afsnit 9.5 i en mere generel version.

Bemærkning. Denne sætning svarer til sætningen om hele tal der siger at hvis n og m er hele tal, $m \neq 0$, da findes to entydigt bestemte hele tal d og r, $0 \leq r < m$, så

$$n = dm + r.$$

Her er r resten ved division af n med m. At et polynomium går op i et andet polynomium, vil ligesom for hele tal sige at resten ved division er 0, hvilket følgende definition siger.

Definition af delelighed

Et polynomium Q siges at *gå op i* P, hvis der findes et polynomium D så $P(x)=Q(x)D(x)$. Vi siger også at P er *delelig* med Q.

Eksempel 9.2.3. Delelighed

Vi undersøger for hvilke n polynomiet $Q(x) = x^2 + 1$ går op i

$$P_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1.$$

Da $P_3(x) = (x^2+1)(x+1)$, må x^2+1 gå op i

$$x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + x^{m+3} = x^m \cdot P_3(x).$$

Dermed vil x^2+1 gå op i $P_{4t+s}(x)$ netop når x^2+1 går op i $P_s(x)$. Da x^2+1 ikke går op i $P_2(x), P_1(x)$ og $P_0(x)$, går x^2+1 op i $P_n(x)$ netop hvis n har rest 3 ved division med 4.

Eksempel 9.2.4. Division med rest

Hvis vi skal finde resten af

$$P(x) = x^{2011} + 16x^{2007} + 1$$

ved division med $Q(x) = x^2 - 4$ uden at udføre selve divisionen, udnytter vi sætningen om division med rest, dvs. vi ved at der findes et polynomium D og hele tal a og b så

$$x^{2011} + 16x^{2007} + 1 = (x^2-4)D(x) + ax + b.$$

For $x = 2$ fås

$$2a + b = 2^{2011} + 16 \cdot 2^{2007} + 1 = 2^{2012} + 1,$$

og for $x = -2$ fås

$$-2a + b = (-2)^{2011} + 16(-2)^{2007} + 1 = -2^{2012} + 1.$$

Ved at løse de to ligninger $2a + b = 2^{2012} + 1$ og $-2a + b = -2^{2012} + 1$ med de to ubekendte a og b ses at resten er

$$ax + b = 2^{2011}x + 1.$$

Opgave 9.2.2. Bestem resten ved division af $x^{100} - 2x^{51} + 1$ med $x^2 - 1$.

Opgave 9.2.3. Vis at $P(x) = x^2 + 2$ ikke er deleligt med et førstegradspolynomium med reelle koefficienter.

Opgave 9.2.4. Bestem a og b så $(x-1)^2$ går op i $ax^4 + bx^3 + 1$. *Hint*: 90, 220

Opgave 9.2.5. Et reelt tal $x_0 \neq 1$ er rod i polynomiet $P(x) = x^6 - 10x + 9$. Bestem $x_0 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 + x_0^5$. (Abelkonkurransen 2010-11) *Hint*: 149

Opgave 9.2.6. Et reelt tal $x_0 \neq -1$ er rod i polynomiet

$$P(x) = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 3x^2 - 18x - 11.$$

Bestem $x_0(x_0^3 + 4x_0^2 + 6x_0 + 4)$. (Abelkonkurransen 2003-04) *Hint*: 74

9.3 Faktorisering med rødder

En helt central egenskab ved polynomier som vi kommer til at udnytte igen og igen, er følgende:

Sætning 9.3.1. Rødder og faktorisering

Lad P være et polynomium af grad n, $n > 0$, med reelle koefficienter.

Hvis det reelle tal x_0 er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med reelle koefficienter så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Der gælder yderligere at hvis de reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_m$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med reelle koefficienter så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)D(x).$$

Sætning 9.3.1 bevises i en mere generel version i afsnit 9.5.

Eksempel 9.3.1. Rødder og faktorisering

Polynomiet $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2$ har $x_0 = 1$ som rod. Dermed ved vi at $x - 1$ er divisor i polynomiet, og ved division ses at

$$P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x + 2).$$

Eksempel 9.3.2. Rødder og faktorisering

Hvis vi betragter polynomiet $P(x) = x^n - a^n$, er det nemt at se at $x_0 = a$ er rod. Dermed går $x - a$ op i P, og ved division ses at

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1}).$$

Opgave 9.3.1. Find en rod i polynomiet $P(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$, og udfør polynomiumsdivision som i eksemplet ovenfor.

Opgave 9.3.2. En af de to rødder i polynomiet $P(x) = mx^2 - 10x + 3$ er $\frac{2}{3}$ af den anden rod. Bestem samtlige mulige værdier af m.

Sætning 9.3.1 giver os også viden om sammenhængen mellem et polynomiums keofficienter og rødder:

Korollar 9.3.2. Vietas formler

Koefficienterne til andengradspolynomiet $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ med rødderne x_1 og x_2 er:

$$a_1 = -a_2(x_1 + x_2), \quad a_0 = a_2x_1x_2.$$

Koefficienterne til tredjegradspolynomiet $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ med rødderne x_1, x_2 og x_3 er:

$$a_2 = -a_3(x_1 + x_2 + x_3), \quad a_1 = a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3), \quad a_0 = -a_2x_1x_2x_3.$$

Kofficienterne til polynomiet $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ af grad n med rødderne $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er

$$\begin{aligned}
a_{n-1} &= -a_n \sum_{i=1}^{n} x_i, \\
a_{n-2} &= a_n \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j, \\
a_{n-3} &= -a_n \sum_{1 \le i < j < k \le n} x_i x_j x_k, \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

Bevis. Ifølge sætning 9.3.1 er

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Formlerne følger direkte ved at gange parenteserne ud. For at nå helt i mål har vi også brug entydighedssætningen 9.5.2 der først kommer senere. Den siger at opskrivning af polynomier er entydig. □

Eksempel 9.3.3. Fjerdegradspolynomiets koefficienter

Betragt fjerdegradspolynomiet $P(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ med rødderne $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ og $x_4 = 3$.

Vi kan bestemme koefficienterne ved brug af korollar 9.3.2. Her ses hvordan a_2 bestemmes:

$$\begin{aligned} a_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ &= (-3)(-1) + (-3)\cdot 1 + (-3)\cdot 3 + (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 3 + 1\cdot 3 = -10. \end{aligned}$$

Opgave 9.3.3. Polynomiet P givet ved $P(x) = x^3 + 5x - 20x + 14$ har rødderne r_1, r_2 og r_3. Hvad er $P(r_1 + r_2 + r_3)$? (Abelkonkurransen 2013-14)

Opgave 9.3.4. For hele tal a og n har polynomiet $P(x) = x^3 - x^2 + ax - 2^n$ tre heltallige rødder. Bestem a og n.

Opgave 9.3.5. Lad x_1 og x_2 være rødderne i $P(x) = x^2 + ax + bc$, og x_2 og x_3 rødderne i $Q(x) = x^2 + bx + ac$. Vis at hvis $ac \neq bc$, da er x_1 og x_3 rødderne i $R(x) = x^2 + cx + ab$.

Eksempel 9.3.4. Delelighed

For at undersøge for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n - x^{n-2} + 1$, $n > 3$, er deleligt med $Q(x) = x^3 - x + 1$, bemærker vi at Q går op i P netop hvis Q går op i

$$P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x.$$

De reelle rødder i polynomiet

$$P(x) - Q(x) = x^n - x^{n-2} - x^3 + x = x(x^2 - 1)(x^{n-3} - 1)$$

er $x = 0$ og $x = \pm 1$. Polynomiet Q har mindst én reel rod da det er et tredjegradspolynomium, og denne reelle rod er ikke $x = 0$ eller $x = \pm 1$. Polynomiet Q går derfor ikke op i $P - Q$ og dermed heller ikke i P for noget n.

Opgave 9.3.6. Undersøg for hvilke n polynomiet $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$, $n > 4$, er deleligt med $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$. *Hint*: 42

Eksempel 9.3.5. Rødder

Om et tredjegradspolynomium P vides at $P(-1) = P(0) = P(1) = 7$ og $P(2) = 19$. Vi ønsker at bestemme P.

For at bestemme P indfører vi et nyt polynomium Q, der har $x = -1, 0, 1$ som rødder. Sæt $Q(x) = P(x) - 7$. Da er $x = -1, 0, 1$ alle rødder i tredjegradspolynomiet Q, og vi ved yderligere ifølge sætningen om rødder og faktorisering 9.3.1 at

$$Q(x) = k(x+1)x(x-1) = kx^3 - kx$$

og dermed $P(x) = kx^3 - kx + 7$. Da $P(2) = 19$, fås $19 = k(2^3 - 2) + 7 = 6k + 7$, og altså $k = 2$. Dermed er $P(x) = 2x^3 - 2x + 7$.

Opgave 9.3.7. Om et fjerdegradspolynomium

$$P(x) = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

hvor b, c, d og e er hele tal, gælder at $P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$. Bestem samtlige mulige værdier af b. *Hint*: 14

Opgave 9.3.8. Lad P være et polynomium af grad n med $P(k) = \frac{k}{k+1}$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Bestem $P(n+1)$. *Hint*: 5

Opgave 9.3.9. Bestem alle polynomier $P(x)$ med reelle koefficienter så

$$(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$$

for alle heltal x. (Baltic Way 2010) *Hint*: 97

Opgave 9.3.10. Lad $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ være et polynomium som har tre forskellige reelle rødder. Lad $q(x) = x^2 + x + 2017$, og antag at $p(q(x))$ ikke har nogen reelle rødder. Vis at $p(2017) > \frac{1}{64}$. *Hint*: 107

9.4 Polynomier med heltallige koefficienter

Vi starter med at gentage sætningen fra forrige afsnit, men denne gang med hele tal i stedet for reelle tal.

Sætning 9.4.1. Rødder og faktorisering

Lad P være et polynomium af grad n, $n>0$, med heltallige koefficienter. Hvis det hele tal x_0 er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med heltallige koefficienter så

$$P(x)=(x-x_0)D(x).$$

Der gælder yderligere at hvis de hele tal $x_1, x_2, \dots, x_m$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med heltallige koefficienter så

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)D(x).$$

Læg mærke til at i denne version af sætningen er vi garanteret at D har heltallige koefficienter, og det skal du udnytte i de næste opgaver.

Opgave 9.4.1. Bestem alle polynomier P med heltallige koefficienter hvor

$$(x-26)P(x+13)=xP(x).$$

Opgave 9.4.2. Lad $p(x)$ og $q(x)$ være to ikke-konstante polynomier med heltallige koefficienter. Det oplyses at polynomiet

$$p(x)q(x)-2015$$

har mindst 33 forskellige heltallige rødder. Vis at p og q har grad mindst 3.

Opgave 9.4.3. Lad P og Q være polynomier med heltallige koefficienter. Antag at der findes hele tal a og $a+1997$ som er rødder i P, og at $Q(1998)=2000$. Vis at ligningen $Q(P(x))=1$ ikke har heltallige løsninger. (Baltic Way 1997) *Hint*: 175

Opgave 9.4.4. Bestem det mindste heltal $m>1$ så der findes et polynomium p med følgende egenskaber: p har heltallige koefficienter, $p(x)-1$ har mindst én heltallig rod, og $p(x)-m$ har præcis 1000 forskellige heltallige rødder. *Hint*: 147

Sætning 9.4.2. Delelighed

For et polynomium P med heltallige koeffcicenter gælder at for to forskellige hele tal a og b vil $a-b$ gå op i tallet $P(a)-P(b)$.

Bevis. Lad $P(x)=a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1 x+a_0$ og $a\neq b$. Da

$$a^k-b^k=(a-b)\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\dots+ab^{k-2}+b^{k-1}\right),$$

vil $a-b$ gå op i

$$P(a)-P(b)=a_m\left(a^m-b^m\right)+a_{m-1}\left(a^{m-1}-b^{m-1}\right)+\dots+a_1(a-b). \ \square$$

Eksempel 9.4.1. Delelighed

For et polynomium P med heltallige koefficienter er $P(n)$ et trecifret tal for alle $n=1,2,3,\dots 1998$. Vi vil vise at P ikke har nogle heltallige rødder. (Baltic Way 1998)

For ethvert heltal m findes et $n\in\{1,2,\dots,1998\}$ så $1998 \mid n-m$. Altså må

$$1998 \mid n-m \mid P(n)-P(m).$$

Da $P(n)$ er et trecifret tal, følger det at $P(m)\neq 0$. Dermed har P ikke nogen heltallige rødder.

Opgave 9.4.5. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter så der findes to hele tal a og b hvor $P(a)=1$ og $P(b)=3$. Kan ligningen $P(x)=2$ have to forskellige heltallige løsninger? (Baltic Way 1994) *Hint*: 72

Opgave 9.4.6. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter så der findes et helt tal n hvor $P(-n)<P(n)<n$. Vis at da er $P(-n)<-n$. (Baltic Way 1991)

Opgave 9.4.7. Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter. Vis at der ikke findes tre forskellige hele tal a, b og c så $P(a) = b$, $P(b) = c$ og $P(c) = a$. *Hint*: 49

Opgave 9.4.8. Et polynomium P har heltallige koefficienter og grad n. Desuden findes præcis k hele tal som er løsning til ligningen $(P(x))^2 = 1$. Vis at $k - n \leq 2$. (IMO 1974) *Hint*: 69

9.5 Polynomier

Ind til videre har vi set på polynomier med reelle koefficienter eller heltallige koefficienter, og vi har generelt ikke bevist de sætninger vi har brugt. Nu generaliserer vi flere definitioner og beviser en del af de tidligere sætninger i mere generelle versioner.

I det følgende betegner $\mathbb{L}$ en af de fire talmængder $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$. De komplekse tal $\mathbb{C}$ kan beskrives som mængden af alle tal på formen $a + ib$, hvor $i = \sqrt{-1}$ og a og b er reelle tal. Alle opgaver kan regnes uden brug af komplekse tal.

Definition af polynomium

Et *polynomium* P er en funktion med forskriften $P(x) = 0$ eller

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

hvor $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{L}$ og $a_n \neq 0$. Polynomiet P er her defineret på de reelle tal, men man kan også betragte P defineret på andre talmængder som fx de komplekse tal.

Graden af P er n, pånær hvis $P(x) = 0$.

Nulpolynomiet P er polynomiet der er konstant nul, dvs. $P(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$, og dets grad sættes per definition til $-\infty$.

Mængden af polynomier med koefficienter i $\mathbb{L}$ betegnes $\mathbb{L}[x]$.

Et polynomium kaldes *normeret* hvis $a_n = 1$.

Tallet x_0 kaldes en *rod* i P hvis $P(x_0) = 0$.

En hel central egenskab ved polynomier er at opskrivningen er entydig. Det handler de næste to sætninger om.

Sætning 9.5.1. Nulpolynomiet

Nulpolynomiet kan ikke skrives på formen $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, hvor $a_n \neq 0$.

Bevis. Først betragter vi et normeret polynomium

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0, \quad n \geq 0,$$

og viser at det ikke er nulpolynomiet. Det vil vi gøre ved at finde et tal der ikke giver 0 ved indsættelse. Idéen er at finde et stort nok tal M så vi kan vise at $(2M)^n$ er større end $\left|a_{n-1}(2M)^{n-1} + a_{n-2}(2M)^{n-2} + \ldots + a_0\right|$, da det viser at $P(2M) \neq 0$. Sæt

$$M = \max\{1, |a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}.$$

Bemærk at vi har sikret os at $M \geq 1$ sådan at $M^m \geq 1$ for alle ikke negative heltal m. Nu er

$$\begin{aligned}(2M)^n &> \left(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1\right)M^n \\ &\geq M(2M)^{n-1} + M(2M)^{n-2} + \cdots + M(2M) + M \\ &\geq |a_{n-1}|(2M)^{n-1} + |a_{n-2}|(2M)^{n-2} + \cdots + |a_1|2M + |a_0| \\ &\geq \left|a_{n-1}(2M)^{n-1} + a_{n-2}(2M)^{n-2} + \ldots + a_1 2M + a_0\right|.\end{aligned}$$

Dermed er

$$P(2M) = (2M)^n + a_{n-1}(2M)^{n-1} + a_{n-2}(2M)^{n-2} + \ldots + a_0 > 0.$$

Betragt nu et polynomium $Q(x) = b_n x^n + \cdots + b_0$ af grad n. Vi ved at $\frac{1}{b_n}Q(x)$ ikke er nulpolynomiet da det er normeret, og dermed er Q heller ikke nulpolynomiet. Altså kan nulpolynomiet ikke skrives på formen $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, hvor $a_n \neq 0$. □

Sætning 9.5.2. Entydighedssætningen

Hvis to polynomier P og Q opfylder at $P(x) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, da er deres koefficienter identiske.

Opskrivningen af polynomier er altså entydig.

Bevis. Antag at $P(x) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Hvis koefficienterne i P og Q ikke er identiske, da er

$$0 = P(x) - Q(x) = a_n x^n + \ldots + a_0,$$

hvor $n \geq 0$ og $a_n \neq 0$, for alle $x \in \mathbb{R}$. Men dette er i modstrid med sætning 9.5.1. Altså er opskrivningen af polynomier entydig. □

Definition af lige og ulige polynomier

Et polynomium kaldes for *lige* hvis $P(x) = P(-x)$ for alle reelle tal x.

Et polynomium kaldes for *ulige* hvis $P(x) = -P(-x)$ for alle reelle tal x.

Opgave 9.5.1. Vis at de lige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af ulige potenser af x er nul. Vis tilsvarende at de ulige polynomier netop er de polynomier hvor koefficienterne hørende til led af lige potenser af x er nul. *Hint*: 121

Sætning 9.5.3. Polynomier af ulige grad

Et polynomium af ulige grad med reelle koefficienter har altid mindst én reel rod.

Opgave 9.5.2. Udnyt mellemværdisætningen 9.1.3 til at vise sætning 9.5.3. *Hint*: 103

Sætning 9.5.4. Polynomiumsdivision

Lad P og Q være polynomier i $\mathbb{L}[x]$ af grad henholdsvis n og m med $n, m \geq 0$. Hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$, antages yderligere at koefficienten til m'tegradsleddet i Q er ± 1.

Da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ (eller $D(x) = 0$ hvis $n < m$), og et entydigt bestemt polynomium R af grad mindre end m, begge med koefficienter i $\mathbb{L}$, så

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x).$$

Polynomiet R kaldes resten af P ved division med Q.

Bevis. Lad $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ og $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$, hvor $a_n, b_m \neq 0$. Først viser vi eksistensen ved induktion efter n. For $n < m$ er eksistensen oplagt med $D(x) = 0$ og $R(x) = P(x)$. Lad $n = N \geq m$, og antag at sætningen er sand for alle $n < N$. Da er

$$P_1(x) = P(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x)$$

et polynomium af grad mindre end n med koefficienter i $\mathbb{L}$, og dermed findes ifølge induktionsantagelsen polynomier D_1 og R så

$$P_1(x) = Q(x)D_1(x) + R(x)$$

hvor graden af R er mindre end m. Nu er

$$\begin{aligned} P(x) = P_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x) &= Q(x)D_1(x) + R(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} Q(x) \\ &= Q(x)\left(D_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right) + R(x). \end{aligned}$$

Polynomiet

$$D(x) = D_1(x) + \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

har koefficienter i $\mathbb{L}$ da $\frac{a_n}{b_m} \in \mathbb{L}$ når $a_n, b_m \in \mathbb{L}$, og vi har forudsat at $b_m = \pm 1$ hvis $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$. Induktionen er derfor fuldført, og vi har vist at der findes polynomier D og R med de ønskede egenskaber.

For at vise entydigheden antager vi at der findes polynomier D_1, D_2, R_1 og R_2 i $\mathbb{L}[x]$, hvor R_1 og R_2 har grad mindre end m, så

$$P(x) = Q(x)D_1(x) + R_1(x) = Q(x)D_2(x) + R_2(x).$$

Da er

$$Q(x)(D_1(x) - D_2(x)) + R_1(x) - R_2(x)$$

nulpolynomiet. Da Q har grad m, og $R_1 - R_2$ har grad mindre end m, giver entydighedssætningen at $D_1 - D_2$ er nulpolynomiet og altså $D_1 = D_2$. Dermed er $R_1 - R_2$ også nulpolynomiet og $R_1 = R_2$, dvs. D og R er entydigt bestemt. □

Denne sætning giver anledning til en mere generel definition af delelighed:

Definition af delelighed, reducibilitet og irreducibilitet

Lad P og Q være polynomier i $\mathbb{L}[x]$.

Et polynomium Q siges at *gå op i* P i $\mathbb{L}[x]$ hvis der findes et polynomium $D \in \mathbb{L}[x]$ så $P(x) = Q(x)D(x)$. Vi siger også at $P(x)$ er *delelig* med $Q(x)$ i $\mathbb{L}[x]$.

Et polynomium P kaldes *reducibelt* i $\mathbb{L}[x]$ hvis der findes to polynomier $S, T \in \mathbb{L}[x]$ af grad mindst én så $P(x) = S(x)T(x)$.

Et polynomium P kaldes *irreducibelt* i $\mathbb{L}[x]$ hvis det ikke er reducibelt i $\mathbb{L}[x]$.

Sætning 9.5.5. Rødder og faktorisering

Lad P være et polynomium af grad n med koefficienter i $\mathbb{L}$.

Hvis $x_0 \in \mathbb{L}$ er rod i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-1$ med koefficienter i $\mathbb{L}$ så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Der gælder yderligere at hvis $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i P, da findes et entydigt bestemt polynomium D af grad $n-m$ med koefficienter i $\mathbb{L}$ så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_m)D(x).$$

Bevis. Antag at x_0 er rod i P og $x_0 \in \mathbb{L}$. Da findes ifølge sætningen om polynomiumsdivision 9.5.4 entydigt bestemte polynomier D og R i $\mathbb{L}[x]$, hvor R har grad højst 0, så

$$P(x) = (x - x_0)D(x) + R(x).$$

Dermed er $R(x_0) = 0$, og da R har grad højst 0, dvs. er konstant, må det være nulpolynomiet. Altså findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så

$$P(x) = (x - x_0)D(x).$$

Bemærk at polynomiet $x - x_0$ er normeret så sætningen om polynomiumsdivision 9.5.4 holder også i tilfældet $\mathbb{L} = \mathbb{Z}$.

Hvis vi antager at $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{L}$ er rødder i P, fås ved at gentage argumentationen ovenfor at der findes et polynomium D i $\mathbb{L}[x]$ så

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_1)\cdots(x - x_m)D(x).$$

□

Korollar 9.5.6. Antal rødder i et polynomium af grad n

Et polynomium af grad n, $n \geq 0$, har højst n reelle rødder.

Korollar 9.5.7. Entydighed

Hvis P og Q er to polynomier af grad højst n, og $P(x) = Q(x)$ for $n+1$ forskellige værdier af x, da er $P = Q$.

Bevis. Antag at P og Q er to polynomier af grad højst n, og $P(x) = Q(x)$ for $n+1$ forskellige værdier af x. Da er $P(x) - Q(x)$ et polynomium af grad højst n med $n+1$ rødder, og dermed er $P(x) - Q(x)$ nulpolynomiet. □

Som afslutning på dette kapitel ser vi på algebraens fundamentalsætning. Den kræver kendskab til komplekse tal og er ikke en sætning vi bruger, men blot ment som perspektivering.

Sætning 9.5.8. Algebraens fundamentalsætning

Lad P være et polynomium af grad n med koefficienter i $\mathbb{C}$. Da har polynomiet n ikke nødvendigvis forskellige rødder $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ så

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

for en konstant a_n.

Vi beviser ikke algebraens fundamentalsætning da det både er meget omfattende og kræver kendskab komplekse tal.

9.6 Mere om polynomier med heltallige koefficienter

Sætning 9.6.1. Rationale rødder

Lad P være et polynomium med heltallige koefficienter. Hvis et rationelt tal skrevet som uforkortelig brøk $\frac{p}{q}$ er rod i polynomiet

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

da vil $p \mid a_0$ og $q \mid a_n$. Specielt vil eventuelle rationale rødder i

$$P(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

være hele tal.

Opgave 9.6.1. Bevis sætningen.

Eksempel 9.6.1. Rationale rødder

Hvis vi skal bestemme samtlige rationale rødder i

$$P(x) = x^5 + 3x^3 + 2x + 6,$$

så kan vi udnytte sætning 9.6.1 der siger at samtlige rationale rødder i P er hele tal som går op i 6. Ved at tjekke samtlige divisorer i 6 ses at $x = -1$ er den eneste rationale rod.

Sætning 9.6.2. Gauss' lemma

Hvis P er et polynomium med heltallige koefficienter som er irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$, da er det også irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Bevis. Antag at $P(x) = Q(x)R(x) \in \mathbb{Z}[x]$, hvor $Q, R \in \mathbb{Q}[x]$ har grad mindst 1. Da alle koefficienter i Q er rationale, findes et mindste heltal q så

$$qQ(x) = q_k x^k + \cdots + q_0 \in \mathbb{Z}[x],$$

og tilsvarende et mindste heltal r så

$$rR(x) = r_m x^m + \cdots + r_0 \in \mathbb{Z}[x].$$

Sæt

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

På baggrund af faktoriseringen

$$qrP(x) = qQ(x)rR(x)$$

vil vi finde en faktorisering af P i $\mathbb{Z}[x]$. Lad p være en primdivisor i q. Da er alle koefficienter i $qrP(x)$ delelige med p. Lad i være det mindste indeks så p går op i $q_0, q_1, \ldots, q_{i-1}$, men ikke i q_i. Da

$$q_0 r_i + q_1 r_{i-1} + \cdots + q_i r_0 = a_i \equiv 0 \pmod{p},$$

må p gå op i r_0. Desuden er

$$q_0 r_{i+1} + q_1 r_i + \cdots + q_i r_1 + q_{i+1} r_0 = a_{i+1} \equiv 0 \pmod{p},$$

dvs. r_1 også er delelig med p. Ved at fortsætte på denne måde ser vi at alle koefficienter i R er delelige med p, dvs. at $\frac{r}{p} R \in \mathbb{Z}[x]$. Dermed har vi fået en ny faktorisering

$$\frac{qr}{p} P(x) = qQ(x) \cdot \frac{r}{p} R(x).$$

Ved at fortsætte på denne måde får vi en faktorisering af P med polynomier med heltallige koefficienter. □

Sætning 9.6.3. Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium

Lad

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

være et polynomium med heltallige koefficienter, hvor et primtal p går op i $a_0, a_1, \ldots a_k$ for et $0 < k < n$, mens $p \nmid a_{k+1}$ og $p^2 \nmid a_0$.

Da har P en irreducibel faktor af grad større end k i $\mathbb{Z}[x]$. Specielt er P irreducibel hvis $k = n-1$, og i dette tilfælde kaldes kriteriet blot for Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Bevis. Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor

$$Q(x) = q_s x^s + \cdots + q_0 \quad \text{og} \quad R(x) = r_m x^m + \cdots + r_0$$

er polynomier med heltallige koefficienter. Da $a_0 = q_0 r_0$ er delelig med p, men ikke med p^2, er netop én af q_0 og r_0 delelig med p. Antag uden tab af generalitet at $p \mid q_0$ og $p \nmid r_0$. Da p går op i a_1 og $a_1 = r_0 q_1 + q_0 r_1$, må $p \mid q_1$. Ved at fortsætte på denne måde ses at p går op i $q_0, q_1, \ldots, q_k$, men at $p \nmid q_{k+1}$. Det følger heraf at Q har grad mindst $k+1$. □

Eksempel 9.6.2. Eisensteins irreducibilitetskriterium

For at undersøge om polynomiet $P(x) = x^5 + 4$ er irreducibelt indenfor $\mathbb{Q}[x]$, kan man bruge Eisensteins irreducibilitetskriterium, men ikke direkte.

Bemærk først at $P(x)$ er irreducibelt netop hvis $P(x+1)$ er irreducibelt. Da $P(x+1) = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 5$, er det irreducibelt ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium med primtallet $p = 5$, og dermed er P det også.

Opgave 9.6.2. Vis at $P(x) = x^6 + 3x^4 + 6x^3 + 9x + 3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 9.6.3. Vis at $P(x) = x^p + p^2 x^2 + px + p - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p.

Opgave 9.6.4. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være forskellige heltal. Vis at

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) - 1$$

er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$. *Hint*: 75

Opgave 9.6.5. Lad $P(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, hvor $n > 1$ er et helt tal. Vis at $P(x)$ ikke kan skrives som et produkt af to polynomier med heltallige koefficienter og grad mindst én. (IMO 1993) *Hint*: 120

9.7 Multiple rødder og differentialregning

Definition af multiplicitet

Tallet x_0 siges at være m*-dobbelt* rod eller rod af *multiplicitet* m i et polynomium P hvis $(x-x_0)^m$ går op i P.

Hvis man tæller antallet af rødder i et polynomium med multiplicitet, betyder det at den m-dobbelte rod x_0 tæller m gange.

Vi udnytter i det følgende at polynomier som funktioner over de reelle tal er differentiable.

Sætning 9.7.1. Røddernes multiplicitet

For et polynomium P gælder at x_0 er m-dobbeltrod i P netop hvis

$$P(x_0)=P'(x_0)=P^{(2)}(x_0)=\ldots=P^{(m-1)}(x_0)=0.$$

Bevis. Antag at x_0 er m-dobbelt rod i P, altså at $P(x)=(x-x_0)^m Q(x)$. Da er

$$P'(x)=(x-x_0)^{m-1}\big(m\cdot Q(x)+(x-x_0)Q'(x)\big),$$

og x_0 er dermed mindst $(m-1)$-dobbelt rod i P'. Tilsvarende ses at x_0 er mindst $(m-2)$-dobbelt rod i $P^{(2)}$ osv., dvs. at

$$P(x_0)=P'(x_0)=P^{(2)}(x_0)=\ldots=P^{(m-1)}(x_0)=0.$$

Antag omvendt at $P(x_0)=P'(x_0)=P^{(2)}(x_0)=\ldots=P^{(m-1)}(x_0)=0$. Vi viser at hvis x_0 er n-dobbelt rod i et polynomium Q', da er x_0 $(n+1)$-dobbelt rod i den stamfunktion Q til Q' for hvilken $Q(x_0)=0$, da dette giver det ønskede. Antag at x_0 er n-dobbelt rod i Q', og at Q er den stamfunktion til Q' for hvilken $Q(x_0)=0$. Antag at x_0 ikke er $(n+1)$-dobbelt rod i Q. Ifølge algebraens fundamentalsætning kan vi faktorisere

$$Q(x)=(x-x_0)^{n_0}(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}\cdots(x-x_k)^{n_k},$$

hvor $1\le n_0\le n$. Dermed er

$$Q'(x)=n_0\frac{Q(x)}{x-x_0}+n_1\frac{Q(x)}{x-x_1}+n_2\frac{Q(x)}{x-x_2}+\cdots+n_k\frac{Q(x)}{x-x_k}.$$

Da

$$n_1\frac{Q(x)}{x-x_1}+n_2\frac{Q(x)}{x-x_2}+\cdots+n_k\frac{Q(x)}{x-x_k}$$

er delelig med $(x-x_0)^{n_0}$ mens $n_0\frac{Q(x)}{x-x_0}$ ikke er, er Q' ikke delelig med $(x-x_0)^{n_0}$. Da $n_0\le n$, er x_0 ikke n-dobbelt rod i Q', hvilket er en modstrid. □

Eksempel 9.7.1. Dobbeltrod

Betragt polynomiet P givet ved $P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$. Vi vil vise at $(x-1)^2$ går op i P. Ved differentiation får man

$$P'(x)=(n+1)nx^n-(n+1)nx^{n-1},$$

dvs. $P(1)=P'(1)=0$. Dermed er $x=1$ dobbeltrod i P, og $(x-1)^2$ går op i P.

Opgave 9.7.1. Bestem a og b så $x=-1$ er dobbeltrod i $P(x)=ax^n+nx^{n-2}+b$, n ulige.

Opgave 9.7.2. Lad P være et sjettegradspolynomium som for to reelle tal a og b, $0<a<b$, opfylder at $P(a)=P(-a)$, $P(b)=P(-b)$ samt $P'(0)=0$. Vis at $P(x)=P(-x)$ for alle reelle tal x. (Baltic Way 1998) *Hint*: 240

I de sidste to opgaver skal man benytte differentialligning og monotonibetragtninger.

Opgave 9.7.3. I et tredjegradspolynomium $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ er $b<0$ og $ab=9c$. Vis at P har tre forskellige reelle rødder. (Baltic Way 1992) *Hint*: 161

Opgave 9.7.4. Bestem alle fjerdegradspolynomier P som opfylder følgende:

i) $P(x)=P(-x)$ for alle x.

ii) $P(x)\ge 0$ for alle x.

iii) $P(0)=1$.

iv) $P(x)$ har præcis to lokale minima i x_1 og x_2 således at $|x_1-x_2|=2$.

(Baltic Way 1992)

10 Hints

1. Husk sætning 2.7.2.
2. Oversæt opgaven til grafteori på naturlig måde, og vis påstanden indirekte. Betragt en knude fra A med et maksimalt antal naboknuder i B, og konstruér herudfra flere tripler af tre knuder, en fra hver af A, B og C, til du opnår en modstrid.
3. Kald højdernes skæringspunkt for H, og udnyt at firkant $CKHL$ er indskrivelig.
4. Betragt $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.
5. Indfør et smart nyt polynomium Q af grad $n+1$.
6. Lav konstruktion der viser at $R(4,4) > 17$. Vis at $R(4,4) \leq 17$ ved at være systematisk og huske at $R(3,4) = 9$.
7. Substituér x og y med henholdsvis $\frac{1}{x}$ og $\frac{1}{y}$.
8. Inddel de 25 felter i seks forskellige slags. Stil ligninger op for de seks vægte under forudsætning af at vægten skal stige med det samme tal i hvert træk, da den dermed bliver invariant modulo dette tal.
9. Betragt i stedet følgen $y_n = x_n - 1$.
10. Tænk på at diagonalerne indtegnes en ad gangen, og at polygonen til at starte med kun består af ét område. Hvor mange flere områder kommer der for hver gang man tegner en ny diagonal, i forhold til det antal skæringspunkter den danner med allerede indtegnede diagonaler?
11. Sæt et 0 på det n-cifrede tal til slut, og betragt i stedet antallet af $n+1$-cifrede binære tal som starter med 1 og slutter på 0. Hvor mange skift mellem 1 og 0 skal der være, hvis der skal være netop m 01-blokke?
12. Vis at firkant $DCEH$ og firkant $DHFB$ er indskrivelige.
13. Udnyt Wilsons sætning til at finde et x der opfylder at $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$.
14. Betragt $Q(x) = P(x) - e$.
15. Lad A_i være mængden af rækkefølger hvor par nummer i står ved siden af hinanden for $i = 1, 2, 3, 4$.
16. For hver kant skal du sætte en prik over kanten når den holdes vandret sådan at tallet i venstre ende er mindre end det i højre ende.
17. Betragt centrum O_a for den ydre røringscirkel til siden BC i trekant ABC.
18. Vis påstanden indirekte, og vælg en bus-sti af maksimal længde.
19. Vis at firkant $ADST$ og firkant $BCST$ er indskrivelige.
20. Tænk på at hvert af de n elementer skal ligge i netop én af følgende syv disjunkte mængder: $M\setminus(A\cup B\cup C)$, $A\setminus(B\cup C)$, $B\setminus(A\cup C)$, $C\setminus(A\cup B)$, $(A\cap B)\setminus C$, $(A\cap C)\setminus B$ og $(B\cap C)\setminus A$, hvis $A\cap B\cap C = \emptyset$. Lad X være mængden af tripler (A, B, C) hvor $A \cap B = \emptyset$, osv.
21. Indirekte: Betragt $4p_2p_3p_4\cdots p_r + 3$ hvor $p_1, p_2, \ldots$ er samtlige primtal på formen $4n+3$ og $p_1 = 3$.
22. Vis at $\frac{((mn)!)^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$ svarer til et antal kombinationer af noget og dermed er et helt tal.
23. Vis at $n \geq 2n-1$ ved at udnytte opgave 8.4.1.
24. I første træk skal Anne opdele 10^{2007} i to tal med samme divisorstruktur.
25. Antag at tabermængden er endelig, og lad a være det største tal i tabermængden.
26. Indsæt først $x = 1$ og derefter $y = 1$.
27. Vis at $\triangle ABD \sim \triangle ACB$.
28. Tilføj flere led så du får en teleskopsum.
29. Se på hvor mange naboer hver knude må have, og vis påstanden indirekte.
30. Lad m være det største hele tal så 2^m går op i alle elementer i følgen, og betragt følgen $b_n = \frac{a_n}{2^m}$.
31. Indtegn diagonalen AC.
32. Vis at hvis trekanten med sidelængderne $n-1$, n og $n+1$ har et heltalligt areal, da har trekanten med sidelængderne n^2-3, n^2-2 og n^2-1 også et heltalligt areal.
33. Benyt induktion efter n.
34. Udnyt at to på hinanden følgende tal er indbyrdes primiske.
35. Tegn en god og præcis tegning med passer og lineal. Husk at det er nemmest at starte med at tegne cirklen og derefter tegne trekanten. Marker alle rette vinkler på figuren.
36. Lat T være skæringspunktet mellem PQ og RS. Vis at L er cirklen med centrum i T og radius $\sqrt{|TP||TQ|}$ fraregnet enkelte punkter.
37. Regn modulo 11.
38. Vis først at hvis $c = ax + by$, $x, y \in \mathbb{Z}$, da må $\gcd(a,b)$ gå op i c. Vis efterfølgende at hvis c er et multiplum af $\gcd(a,b)$, da findes ifølge Bezouts identitet $x, y \in \mathbb{Z}$ så $c = ax + by$.
39. Sæt $y_n = \frac{1}{x_n}$, og vis at $y_1, y_2, \ldots$ er en differensrække.

40. Bevis påstanden for alle heltal n og ikke blot for $n = 107$.
41. Se på $h(1)$ og $h(2)$.
42. Læg mærke til at Q har en rod mellem 0 og 1.
43. Inddel i n lige og n ulige, og se på kvadratiske rester modulo 4.
44. Lad hver placering af bordet repræsentere en skuffe, så der er 100 skuffer.
45. Bevis påstanden for alle heltal n og ikke blot for $n = 19$.
46. Tegn en god og præcis tegning hvor du kun indtegner to vinkelhalveringslinjer. Vis at deres skæringspunkt ligger i samme afstand til til alle tre sider i trekanten.
47. Benyt induktion efter n.
48. Antag at p er et primtal, og vis at da går p op i q.
49. Betragt den største forskel mellem to af tallene a, b og c.
50. Kald de 31 kort $k_1, k_2, \ldots, k_{31}$, og læg kortene ved hjørnerne i en regulær 31-polygon $C_1C_2\ldots C_{31}$ så k_1 ligger ved C_1 osv. Afstanden fra kortet ved C_i til kortet ved C_{i+j} defineres til j. Alle indeks og afstande regnes modulo 31. Hvad sker der med disse afstande for hver operation?
51. Kald mængden som indeholder 1, for A, mængden som indeholder 2, for B og den sidste mængde for C.
52. Nej. Brug samme vægte som i a), og husk at du skal kunne nå målet efter et endeligt antal træk.
53. Tæl alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal, ved at betragte de udtrukne tal som skillevægge mellem de resterende 29 elementer eller før det første eller efter det sidste.
54. Tæl først på hvor mange måder syv ens ringe kan fordeles på fem pinde. Overvej derefter for hver af disse kombinationer hvor mange kombinationer der er når man har ti ringe med forskellig farve, hvor syv skal fordeles på de syv forskellige positioner.
55. Det er kun muligt når n ikke er delelig med 3.
56. Inddel intervallet fra 0 til 1 i n intervaller af længde $\frac{1}{n}$, og lad dem være skufferne. Kom tallet ia ned i det interval hvor brøkdelen $\{ia\}$ ligger.
57. Vis at højden fra B også er en median.
58. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2 \times n$-bræt sorte, når to felter der har en kant til fælles, ikke begge må være sorte, og lad b_n være hvor mange af disse hvor begge de to sidst tilføjede felter er hvide, og c_n være hvor mange af disse hvor netop et af de to sidst tilføjede felter er sort.
59. Kubiske rester modulo 7.
60. Kvadrér.
61. Betragt en kreds af minimal længde, og betragt tilfældene hvor kredsen har længde 3 eller 4 fire som separate cases.
62. Betragt $x - y$ modulo 11.
63. Betragt $\mathrm{ord}_p(2)$.
64. Indirekte: Betragt $(2p_1p_2p_3\cdots p_r)^{2^{k-1}} + 1$ hvor $p_1, p_2, \ldots$ er samtlige primtal på formen $2^k n + 1$.
65. Vis at firkant CJO_aF er indskrivelig.
66. Gang de tre ligninger sammen.
67. Se på antallet af måder man kan udtage delmængder med $r + 1$ elementer af mængden $\{1, 2, \ldots, n + 1\}$ med fokus på det næstmindste element.
68. Vis at firkanterne PCP_2P_1, PP_3BP_1 og PP_2AP_3 er indskrivelige, og udnyt dette til at vise at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$.
69. Faktoriser $(P(x))^2 - 1$.
70. Brug sætning 4.2.10 og sætning 4.3.4.
71. Kvadrér første ligning, og isolér $x^2 + y^2$ i den sidste ligning.
72. Hvad ved du om $a - b$, $a - c$ og $b - c$?
73. Sæt uden tab af generalitet $|PB| = 1$, kald $|AB|$ for x, og opstil en ligning som x opfylder.
74. Betragt $(x+1)^6$ og $(x+1)^4$.
75. Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, og betragt $Q(x) + R(x)$.
76. Tæl antallet af ruter gennem det lukkede kryds.
77. Den store udfordring er at bestemme $2002^{2001} \pmod{400}$. For at bestemme denne rest er det smart at regne modulo 2^4 og modulo 5^2, og derefter kombinere resultaterne.
78. Indsæt $x = 1$, $x = 0$, $x = f(1)$ og $x = f(0)$.
79. Vis at $P = Q$ netop når $|AB| = |AC|$.
80. Udnyt at grafen er en Euler-graf.
81. Bevis det indirekte, og se på paritet af valens når man kun betragter kanter af én farve.
82. Betragt højdernes skæringspunkt H og potensen af H mht. til de to cirkler.
83. Inversion i cirklen med centrum C og radius s.

84. Konstruktion af Euler-tur hvis alle knuder har lige valens: Start i en knude, og lav en tur ved hele tiden at fortsætte til en naboknude ad en kant du endnu ikke har benyttet, indtil det ikke er muligt længere. Udvid nu denne tur indtil alle kanter indgår i turen.
85. Vis ved induktion efter n at $k_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ for ulige n, mens $k_n \geq \frac{n}{2}$ for lige n.
86. Betragt $\text{ord}_q(2)$.
87. Betragt multiplikationen omkring M med multiplikationsfaktor $k = -\frac{1}{2}$.
88. Lad de oprindelige trekanter have vægt 1, og lad nye trekanter have halvt så stor vægt som den de dannes af.
89. Omskriv ligningen til $2^x + 2^{2x+1} = (y-1)(y+1)$.
90. Udnyt at $x_0 = 1$ er rod i P til at bestemme b udtrykt ved a.
91. Stil de ti 2-kroner op på en række, og tænk på at 5-kronerne skal indsættes som skillevægge.
92. Vis at hvis $a+b$ er delelig med n, da er $a^n + b^n$ delelig med n^2.
93. Benyt Herons formel.
94. Vis at f er injektiv.
95. Vis at $f(n) \leq n$.
96. Brug Vandermonde-identiteten.
97. Vis at $n \cdot 67$ er rødder i P for alle $n = 1, 2, \ldots, 30$.
98. I alle tre delopgaver er det smart at regne modulo 4.
99. Hvad er $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$?
100. Regn på $\gcd(a_n, a_{n+1})$, og udnyt undervejs at hvis $s, t \in \mathbb{Z}$ og t er ulige, da er $\gcd(s, t) = \gcd(2s, t)$.
101. Udnyt opgave 2.18.9.
102. Udnyt at $(x+y)^2 = x+y$.
103. Betragt et normeret polynomium P, og lad M være defineret som i beviset for 9.1.3. Benyt idéen i beviset for sætning 9.5.1 til at vise at $P(2M)$ og $P(-2M)$ har forskelligt fortegn.
104. Skuffeprincippet.
105. Hvorfor er $\gcd(m^4, m-1) = 1$?
106. Vis at $\triangle TPK \sim \triangle LPT$.
107. Udnyt at $q(x) \geq 2016 + \frac{3}{4}$.
108. Brug samme idé som i eksempel 8.3.1.
109. Tæl antal måder at vælge x, y og z på så $x, y, z \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$ med yderligere betingelser på x, y og z.
110. Tegn en god tegning med passer og lineal. Det er nemmest at tegne cirklen først. Indtegn kun A_1 og A_2, og altså ikke B_1, B_2, C_1 og C_2. Det gør figuren meget mere overskuelig. Gå på vinkeljagt og længdejagt, og marker alt det du ved der er ens.
111. Inddel brættet i 1×2-brikker der ligger forskudt ligesom mursten.
112. Opløft i tredje potens.
113. Lad A_k, $k = 1, 2, \cdots, n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i) = k$ og $\sigma(i+1) = k+n$ eller $\sigma(i) = k+n$ og $\sigma(i+1) = k$. Brug PIE, og vurder summen.
114. Induktionsskridtet: Inddel mønterne i tre lige store bunker.
115. Læg de tre ligninger sammen.
116. $n = 33$.
117. Kald højden for y og bredden for x, og opstil en ligning som forholdet $\frac{y}{x}$ opfylder.
118. Betragt $\text{ord}_p(q)$.
119. Antag modsat at det ikke er sandt, og lad s' og t' være to positive heltal med den mindste sum for hvilke det ikke er sandt.
120. Udnyt af P ikke har en heltallig rod.
121. For lige polynomier betragt $P(x) - P(-x)$.
122. Lad p være en ulige primfaktor i $a^{2^n} + 1$, og betragt $\text{ord}_p(a)$.
123. Antag at der findes et reelt tal a med $f(a) = -2$, og vis at da er $f(0)$ to forskellige værdier, hvilket er en modstrid.
124. Vis at der findes positive hele tal u, v og w så $au = bc$, $bv = ac$, $cw = ab$ hvor u, v og w er parvis indbyrdes primiske.
125. Vis at $\triangle AO_aF \sim \triangle AEI$.
126. Gang summen med brøken $\frac{q-1}{q-1}$.
127. Vis at $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ med forholdet $4:1$.
128. Betragt mængden $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_j \in \{1, 2, 3, \ldots, n+k\}\}$, og lad A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
129. Tegn en rød kant mellem hold der spillede mod hinanden første dag, og en blå kant mellem hold der spillede mod hinanden den anden dag.
130. Udnyt at y har en multiplikativ invers y^{-1} modulo p.

131. Betragt $h(x) = f(f(x)) - x$.
132. Vis at alle andre funktionsværdier er fastlagt ud fra $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$. Bestem derefter $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$. Advarsel: Det er en meget møjsommelig proces der fx kan involvere $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$, $f(9)$, $f(16)$ og $f(25)$.
133. Kan du udvide figuren på en smart måde?
134. Sæt $b_n = \frac{1}{a_n}$.
135. Træk $\sqrt{c}$ fra på begge sider, og gør noget smart.
136. Læg mærke til at hvert tal er mindst lige så stort som det tal det skrives under fra række tre og frem.
137. Vis ved induktion efter N: For ethvert positivt heltal N findes et positivt ulige tal n med præcis N forskellige primdivisorer som opfylder at n går op i $2^n + 1$.
138. Udnyt at $3n+2$ og 3 er indbyrdes primiske.
139. Antag at der ikke findes tre drager der har alle nøgler. For hver trio af drager er der så mindst én nøgle denne trio ikke har.
140. Lav en tredobbelt rekursion hvor du inddeler i tal der slutter på 1 og 5, tal der slutter på 2 og 4, og tal der slutter på 3. Brug *ikke* sætning 5.7.1.
141. Betragt multiplikationen omkring centrum af cirklen gennem X, Y og Z med multiplikationsfaktor $k = -1$.
142. Betragt $\text{ord}_{f_n}(3)$.
143. Vis først at n er en potens af 2.
144. Inversion i en cirkel med centrum C.
145. Inversion i en cirkel med centrum A.
146. Betragt antallet af forskellige reelle rødder hvor du lægger 1 til dette tal, hvis P ikke er af grad 3.
147. $m = (500!)^2 + 1$.
148. Inversion i en cirkel med centrum O.
149. Brug opgave 9.2.1 c) til at omskrive P.
150. Udtryk $\frac{1}{a_n b_n}$ udelukkende ved b_n og b_{n-1}.
151. Lad de 2^{n-1} binære strenge af længde $n-1$ repræsentere 2^{n-1} knuder i en orienteret graf. Lad der være en kant fra knuden A til knuden B hvis de sidste $n-2$ cifre i A er lig med de første $n-2$ i B.
152. Lad q være den mindste primfaktor i x, og se på $\text{ord}_q(p-1)$.
153. Betragt grafen $\overline{G}$ som består af de samme knuder som G, men hvor to knuder er naboer i $\overline{G}$ netop hvis de ikke er det i G.
154. Vis at $x \le y \le z \le x$.
155. Betragt multiplikationen omkring A med multiplikationsfaktor k_1 som fører ω_1 i ω, og multiplikationen omkring A med multiplikationsfaktor k_2 som fører ω_2 i ω.
156. Tæl det modsatte.
157. Kald antallet af sokker for n og antallet af røde sokker for r. Find et udtryk for sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve, og benyt dette til at bestemme r.
158. Betragt summen modulo 4.
159. Udnyt at $n! \cdot n = (n+1)! - n!$.
160. Udnyt at firkant $MHCB$ er indskrivelig.
161. Betragt rødderne i $P'(x)$.
162. Farv 16 felter.
163. Vis at Gandalf kan komme til verden nummer 1 fra alle verdener.
164. Udnyt at $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$.
165. Indirekte: Betragt $6p_2p_3p_4\cdots p_r + 5$ hvor $p_1, p_2, \ldots$ er samtlige primtal på formen $6n+5$ og $p_1 = 5$.
166. Inversion i en cirkel med centrum P.
167. På hvor mange måder kan du vælge de fire cifre?
168. Divider P med x^3.
169. Tag udgangspunkt i en ensfarvet K_3, og overvej mulighederne systematisk.
170. Brug samme monovariant som i eksempel 6.5.1.
171. Brug sætning 4.2.10.
172. Vis at $m < 2n$ ved at se på K_{2n+1}.
173. Faktoriser $10^{2^n} - 1$.
174. Vis at $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.
175. Undersøg pariteten af $P(n)$ for alle hele tal n.
176. Vinkel v: Kald skæringen mellem AC og BD for P. Tegn linjestykket AD, og betragt $\triangle PAD$ og periferivinkler.
177. Betragt produktet $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$.
178. Find værdier af x_1 og x_2 så tallene $1, 2, \ldots, n$ må ligge i følgen.

179. For $n > 1$ betragt den mindste primdivisor p i n.
180. Vis at 2^n går op i både x, y og z for alle positive heltal n.
181. Vis at F er centrum for den ydre røringscirkel til siden CD i trekant ACD.
182. Modulo 5 eller 10.
183. Se på sidste ciffer i k.
184. $m^3+1=(m+1)(m^2-m+1)$.
185. Betragt summen af længderne af de n linjestykker. Husk trekantsuligheden.
186. Tæl antallet af trekanter der har henholdsvis tre, to, en eller nul hjørner tilfælles med polygonen, hver for sig.
187. Læg ligningerne sammen, og udnyt resultatet sammen med de oprindelige ligninger.
188. Eliminér x og z for at få en ligning i y og k som er en andengradsligning i y. Husk at de tre tal x, y og z ikke alle må være ens.
189. Brug punkts potens af A mht. cirklen med diameter EF til at vise at firkant $PFOR$ er indskrivelig.
190. i) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson og en referent ud af n personer, hvor forperson og referent gerne må være den samme.
191. Tegn en god og præcis figur hvor du kun indtegner to midtnormaler. Vis at deres skæringspunkt har samme afstand til alle tre vinkelspidser i trekanten.
192. Vis at hvis $x, y \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ er to forskellige rester modulo p som opfylder at $x^2 \equiv y^2 \pmod p$, da er $x + y = p$.
193. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
194. Tænk på sætning 5.4.2 og eksempel 5.4.2.
195. ii) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson, en referent og en kasserer ud af n personer, hvor en person godt kan have flere af de tre poster.
196. Vis at firkant $KMDL$ er indskrivelig.
197. Vis først at $(a-b)^2$ er delelig med 11.
198. Betragt en sti i G af maksimal længde l, og antag at $l < \min(2\delta, n-1)$ for at opnå modstrid.
199. Antag at det er sandt, og vis at det fører til en modstrid. Brug kvadratiske rester.
200. Radikalcentrene er henholdsvis M og N.
201. Se på $(b^2+a)^b - a^b$ modulo b^4.
202. Faktorisér alt pånær konstantleddet $\frac{5}{2}$, og vurdér derefter højresiden.
203. Udnyt at $k^3 = \frac{1}{4}\left((k+1)^2k^2 - k^2(k-1)^2\right)$.
204. Kvadrér, og brug Cauchy-Schwartz.
205. Indfør punktet D på forlængelsen af AB så $|DK| = |KA|$.
206. Lad R være skæringspunktet mellem NM og PQ. Vis at $|PR| = |QR|$.
207. Lad Alma farve et 1001×1001- eller et 1000×1000-kvadrat til at starte med.
208. Vis at f er injektiv.
209. Betragt $f(x) = x^4$.
210. Kald felterne $1, 2, \dots, 99$, og betragt pariteten af det felt hver spiller står på. Hvordan ændrer disse tre pariteter sig undervejs i spillet?
211. Udvid figuren så linjen bliver median i en ny trekant.
212. Vinkel w: Tegn linjestykket BD, og kald vinkelspidsen ved w for P. Betragt $\triangle PBD$ og periferivinkler.
213. Da du kender xyz, er idéen at omskrive så du får en vurdering på formen $(xyz)^n$.
214. Vis ved induktion efter n at $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \le \frac{1}{2^n}$.
215. Vælg først de k rækker og de k søjler hvor der skal placeres et tårn.
216. Lad A_2 være skæringspunktet mellem IA og BC. Vis at trekant IA_2B er en $30°$-$60°$-$90°$-trekant.
217. Husk at et tal er deleligt med 9 netop hvis tværsummen er delelig med 9.
218. Betragt antallet af talpar hvor det mindste tal står før det største tal.
219. Vis at firkant $AECD$ er indskrivelig.
220. Divider P med $(x-1)$, og udnyt at $x_0 = 1$ er rod i resultatet.
221. Betragt $\text{ord}_{2p+1}(2)$.
222. Inversion i en cirkel med centrum A.
223. Vis påstanden indirekte. Oversæt til grafteori på den oplagte måde, og vælg en tilfældig knude. Betragt mængden af knuder som ikke er nabo til denne knude. Hvad kan du sige om disse knuder og deres naboer i denne mængde?
224. Vis at f er surjektiv, og udnyt dette til at vise at f er lineær.
225. Hvordan skal kuglerne med lige numre fordeles så alle får en ulige sum?
226. Vis at billedet af de ni punkter ved en multiplikation omkring H med en faktor 2 alle ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC.
227. Kald antallet af farvelagte rækker af stole af længde k som starter med en grøn stol, for g_k, og antallet som starter med en rød stol, for r_k.

228. Dæk cirklen med radius 2 med syv cirkler med radius 1.

229. Vis at $\triangle ABF \sim \triangle AEC$.

230. Skuffer: Resten 0, resten n og restparrene $\pm i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, modulo $2n$.

231. Betragt multiplikationen omkring A med multiplikationsfaktor k som fører ω_1 i ω_2. Betragt derefter multiplikationen omkring B med multiplikationsfaktor $-k$.

232. Inversion i en cirkel med centrum A.

233. Vis at $P(0), P(1), P(3), P(5), \ldots, P(2n+1)$ har alternerende fortegn.

234. Tæl i stedet de tal der ikke indeholder to 1-taller som nabotal.

235. $1000 = 6 \cdot 155 + 7 \cdot \mathbf{10}$

236. Omskriv først til $n^4 + 4 = (n^2+2)^2 - (2n)^2$.

237. Vis at p går op i tælleren, men ikke i nævneren, og husk at p er et primtal.

238. Sæt $k_n = \frac{a_{n+1}}{n}$.

239. Inversion i en cirkel med centrum O.

240. Betragt $P(x) - P(-x)$.

241. Brug Bezouts identitet.

242. Udnyt at $ab = a(2002 - a)$.

243. Lad de mulige summer være skuffer, og lad delmængder af A være objekter.

244. Husk at radien AO står vinkelret på tangenten, og gå på vinkeljagt. Brug sætningen om korde-tangent-vinkler til at bevise den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler.

245. Modulo 3.

246. Vis at $v_5(2^m + 3^m) = 1$.

247. Nummerér felterne (i, j), og giv feltet (i, j) vægten $\frac{1}{2^{i+j}}$.

248. Vurdér først venstresiden ved QA-uligheden.

249. Vurder antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse, på to forskellige måder.

250. Betragt $f(x) = \left(x + x^{-1}\right)^2$, og brug Jensens ulighed.

251. Vis at $\triangle PCM \sim \triangle LCA$.

252. Vis at $A(n,k) = \binom{n+1-k}{k}$.

253. Brug resultatet af sætning 3.4.3 til at vise sidste del.

254. Vis at grafen er sammenhængende.

255. Se på $\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)$.

256. Hvad er det særlige ved situationer med henholdsvis a, a, a og b, $b \geq a$, sten i de fire bunker?

257. Lav konstruktion der viser at $R(3,4) > 8$. Vis at $R(3,4) \leq 9$ ved at være systematisk og huske opgave 8.1.1.

258. Nej. Vis at de hver især kan sørge for at den anden aldrig vinder.

259. Der er en parring mellem mængden af skæringspunkter og mængden af alle mængder der består af fire af polygonens hjørner.

260. Vis at f er injektiv.

261. Lad p være et primtal på formen $p = 4m+1$. Udnyt Thues sætning samt at -1 er kvadratisk rest modulo p, til at vise at p kan skrives som sum af to kvadrattal.

262. Husk at firkant $EFGO$ er et parallelogram.

263. Læg et koordinatsystem så rektanglets nederste ventre hjørne er i $(0,0)$, og så koordinatsystemets akser er parallelle med rektanglets sider. Nummerér de mindre rektanglerne $1, 2, 3, \ldots, m$, og lad a_i være antallet hjørner i rektangel nummer i hvor begge koordinater er hele tal.

11 Løsninger

Opgave 1.1. Vi skal ved induktion bevise påstanden

$$q(n): \quad 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1=\frac{1(1+1)}{2}$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Så er

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots+n+(n+1)&=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\&=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\&=\frac{(n+1)(n+2)}{2},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.2. Vi skal ved induktion bevise påstanden

$$q(n): \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1=1^2$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2.$$

Så er

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2,$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.3. Vi skal ved induktion bevise at der for ethvert reelt tal $a\neq 1$ gælder at

$$q(n): \quad 1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1+a=\frac{1-a^2}{1-a}$, hvilket er sandt da $1-a^2=(1+a)(1-a)$.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

Så er

$$\begin{aligned}1+a+a^2+\cdots+a^n+a^{n+1}&=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}+a^{n+1}\\&=\frac{1-a^{n+1}+(1-a)a^{n+1}}{1-a}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n\in\mathbb{N}$.

Opgave 1.4. Vi skal ved induktion bevise påstanden

$$q(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Så er

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2},\end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.5. Vi skal gætte og ved induktion bevise en formel for summen af de første n kubiktal. For de første værdier af n har vi $1^3 = 1$, $1^3+2^3 = 9$, $1^3+2^3+3^3 = 36$, $1^3+2^3+3^3+4^3 = 100$. Vi genkender kvadrattallene på højre side og gætter ud fra dette på at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\ldots+n)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ved at benytte formlen fra opgave 1.1 kan dette skrives

$$q(n): \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Denne formel beviser vi nu ved induktion.

Induktionens start: Påstanden $q(1)$ lyder $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$, hvilket er sandt.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Så er

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2\big(n^2 + 4(n+1)\big)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}, \end{aligned}$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.6. Vi skal finde et udtryk for nummeret på det trin a_n som aben befinder sig på om morgenen den n'te dag. Betingelserne viser at $a_1 = 1$, og generelt at $a_{n+1} = 2a_n + 1$ for alle positive heltal n. Da $a_1 = 1$, $a_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $a_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $a_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$, gætter vi på at $a_n = 2^n - 1$. Dette gæt kan vi bevise ved induktion. Vi kalder påstanden $a_n = 2^n - 1$ for $q(n)$.

Induktionens start: For $n = 1$ har vi allerede set at formlen passer.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at $a_n = 2^n - 1$. Så er

$$a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 1 = 2 \cdot \big(2^n - 1\big) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1,$$

hvilket viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.7. Vi kalder påstanden at Georg kan identificere den falske mønt i n vejninger, for $q(n)$. Påstanden bevises ved induktion efter n.

Induktionens start: Når $n = 1$, har Georg $3^1 = 3$ mønter. Hvis han lægger én mønt i hver vægtskål, så kan han afgøre hvilken der er den falske mønt: Hvis de vejer lige meget, er det den tredje mønt der er falsk, og hvis den ene er lettere end den anden, så er det mønten i den lette vægtskål der er falsk. Altså er $q(1)$ sand.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand, dvs. at Georg kan udpege den falske mønt blandt 3^n mønter med n vejninger. Georg har nu 3^{n+1} mønter og deler dem i tre bunker med 3^n mønter i hver. Nu lægger han den første bunke på den ene vægtskål og den anden bunke på den anden vægtskål. Hvis bunkerne vejer lige meget, ved han at den falske mønt skal findes i den sidste bunke, og hvis den ene er lettere end den anden, så ved han at mønten skal findes i den letteste bunke. Georg har dermed ved én vejning afgjort hvilken bunke den falske mønt er i. Ifølge induktionsantagelsen kan han ved yderligere n vejninger afgøre hvilken mønt der er falsk, dvs. med 3^{n+1} mønter kan han med samlet $n+1$ vejninger finde den falske mønt. Ved induktion følger nu at påstanden er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

Opgave 1.8. Vi beviser ved induktion efter n at $2^n > n^2$ for alle $n \geq 5$. Kald påstanden for $q(n)$.

Induktionens start: Påstanden $q(5)$ er sand da $2^5 = 32 > 25 = 5^2$.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand for et positivt heltal $n \geq 5$, dvs. at $2^n > n^2$. Da er

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 5n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Dette viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle heltal $n \geq 5$.

Opgave 1.9. Vi beviser ved induktion at vinkelsummen i en n-kant, $n \geq 3$, er $(n-2) \cdot 180°$. Kald påstanden for $q(n)$.

Induktionens start: Påstanden $q(3)$ er sand da vinkelsummen i en trekant er 180°.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand for et positivt heltal $n \geq 3$, dvs. at vinkelsummen i en n-kant er $(n-2) \cdot 180°$. Betragt en $(n+1)$-kant. Den kan opdeles i en trekant og en n-kant. Vinkelsummen bliver derved summen af vinkelsummen i trekanten og i n-kanten, dvs. vinkelsummen i $n+1$-kanten er

$$180° + (n-2) \cdot 180° = \big((n+1)-2\big) \cdot 180°.$$

Dette viser at $q(n+1)$ er sand. Ved induktion følger nu at påstanden gælder for alle heltal $n \geq 3$.

Opgave 1.10. Lad a være et tal med den egenskab at tallet $a + \frac{1}{a}$ er et helt tal. Vi skal bevise at så er også $a^{19} + \frac{1}{a^{19}}$ et helt tal. Vi vil ved induktion bevise den mere generelle påstand

$$q(n): \quad a^n + \frac{1}{a^n} \text{ er et helt tal}$$

for alle positive heltal n.

Induktionens start: I induktionsskridtet har vi brug for at påstanden gælder for to på hinanden følgende hele tal. Derfor skal vi i induktionsstarten vise at påstanden er sand for både $n = 1$ og $n = 2$. Påstanden $q(1)$ er ifølge den grundlæggende antagelse sand. For at vise at $q(2)$ er sand, bemærker vi først at $a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2$ må være et et heltal. Dette betyder at også $a^2 + \frac{1}{a^2}$ er et helt tal, og altså at $q(2)$ er sand.

Induktionsskridtet: Antag at $q(k)$ er sand for alle positive heltal $k \leq n$, hvor $n \geq 2$. Nu er

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} + a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}.$$

Da venstresiden er et produkt af hele tal, og da $a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}$ er et heltal ifølge induktionsantagelsen, må også $a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}$ være et helt tal. Hermed er påstanden bevist.

Opgave 1.11. Vi beviser den mere generelle påstand $q(n)$: I et firma med $n \in \mathbb{N}$ ansatte hvor der for hvert par af ansatte gælder at den ene overvåger den anden, findes en ansat P med den egenskab at enhver anden person enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P. Påstanden vises ved induktion efter n.

Induktionens start: Hvis der kun er $n = 1$ ansat, er påstanden triviel.

Induktionsskridtet: Antag at $q(n)$ er sand. Betragt et firma med $n+1$ ansatte hvor der for hvert par af ansatte gælder at den ene overvåger den anden. Lad X være en tilfældig ansat, og betragt de resterende n ansatte. Vi ved fra induktionsantagelsen at da findes blandt de resterende n ansatte en ansat P med den egenskab at enhver anden ansat fraregnet X enten overvåger P eller overvåger en person der overvåger P. Hvis X overvåger P eller en ansat der overvåger P, så har P den ønskede egenskab. Antag derfor at dette ikke er tilfældet. Da må P og alle ansatte der overvåger P, altså overvåge X. Vi vil vise at i denne situation har X den ønskede egenskab. Betragt en ansat Y der ikke overvåger P. Da ved vi at Y overvåger en ansat Z som overvåger P, og at denne ansatte Z derfor overvåger X. Dermed har X den egenskab at enhver anden person enten overvåger X eller overvåger en person der overvåger X. Dette fuldfører induktionen.

Opgave 2.1.1. Samtlige divisorer i 60 er $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$. Samtlige divisorer i 98 er $1, 2, 7, 14, 49, 98$.

Opgave 2.1.2. 2) At $a \mid b$, betyder at der findes et helt tal q så $b = a \cdot q$. Dermed er $b \cdot c = a \cdot q \cdot c = a \cdot (q \cdot c)$, og det viser at $a \mid b \cdot c$.

3) At $a \mid b$ og $a \mid c$, betyder at der findes hele tal q_1 og q_2 så $b = a \cdot q_1$ og $c = a \cdot q_2$. Dermed er $b + c = a(q_1 + q_2)$ og $b - c = a(q_1 - q_2)$, og det viser at $a \mid b + c$ og $a \mid b - c$.

Opgave 2.1.3. Antag at n og m er hele tal så $2 \mid n$ og $6 \mid m$. Da er $n = 2n'$ og $m = 6m'$, og dette viser at $m(m+n) = 6m'(6m' + 2n') = 4(9m'^2 + 3n')$ altid er delelig med 4. Ingen af de andre tal er altid delelig med 4: a) $n+m$ er ikke altid delelig med 4, fx ikke for $n = 2$ og $m = 12$. b) $nm - m$, c) $m^2 + n$ og e) $n(m+1)$ er ikke altid delelig med 4, fx ikke for $n = 2$ og $m = 6$.

Opgave 2.1.4. Antag at m og n er hele tal som opfylder at $n + m = n^2$. Da er $m = n(n-1)$, hvilket viser at $n \mid m$. Man kan til gengæld ikke slutte at b) $m \mid n$,

c) n og m er ulige, eller d) n og m er lige, da fx $n = 3$ og $m = 6$ ikke opfylder hverken b), c) eller d).

Opgave 2.1.5. $\ldots, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$.

Opgave 2.1.6. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. $11400 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19$. Tallet $1024 = 2^{10}$ har kun en enkelt primfaktor, nemlig 2. Primfaktorerne i 1001 er 7, 11 og 13.

Opgave 2.1.7. Da primfaktoropløsningen af 2008 er $2008 = 2^3 \cdot 251$, er eneste mulighed for de fire tal $1, 2, 2^2, 251$. Dermed er deres sum 258.

Opgave 2.1.8. I primfaktoropløsningen af 20! er potensen af 5 netop 5^4 mens potensen af 2 er større end 2^4. Derfor ender 20! på netop fire nuller.

Opgave 2.1.9. Tallet 4004 går ikke op i $238 \cdot 65 \cdot 1221$ da 4 går op i 4004, men ikke i $238 \cdot 65 \cdot 1221$.

Opgave 2.1.10. Lad m være et positivt heltal større end 1 med primfaktoropløsning $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, hvor p_i'erne er forskellige primtal. Da er primfaktoropløsningen af $m^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_r^{2\alpha_r}$. Dette viser at alle primfaktorer i et kvadrattal indgår i en lige potens i primfaktoropløsningen. Antag omvendt at n er et positivt heltal, hvor alle primfaktorer i n indgår i en lige potens i primfaktoropløsningen. Da er $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_r^{2\alpha_r}$, dvs. $n = m^2$, hvor $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, og det viser at n er et kvadrattal.

Opgave 2.1.11. Lad n være det mindste positive heltal så $\sqrt{n \cdot 261}$ er et helt tal. Da må $n \cdot 261 = n \cdot 29 \cdot 3^2$ være et kvadrattal, og altså må 29 være en primfaktor i n da 29 skal indgå i en lige potens i primfaktoropløsningen af $n \cdot 29 \cdot 3^2$. For $n = 29$ er $\sqrt{n \cdot 261} = 3 \cdot 29$, dvs. $n = 29$ er det mindste positive heltal så $\sqrt{n \cdot 261}$ er et helt tal.

Opgave 2.1.12. Antag at p er et primtal, og at $p \mid ab$. Hvis et af tallene a og b er ± 1 eller 0, er udsagnet oplagt. Antag derfor at $|a|, |b| > 1$. Antag desuden i første omgang at a og b er positive. Primfaktoropløsningen af ab er netop primfaktoropløsningen af a gange primfaktoropløsningen af b da primfaktoropløsningen er entydig. Da p indgår i primfaktoropløsningen af ab, må p derfor også indgå i primfaktoropløsningen af a eller primfaktoropløsningen af b. Dermed må $p \mid a$ eller $p \mid b$. Beviset kører på helt samme måde hvis et eller begge af tallene a og b er negative.

Udsagnet gælder ikke altid hvis p ikke er et primtal. Fx går 6 op i $4 \cdot 9$, men hverken i 4 eller 9.

Opgave 2.1.13. Kun $10982 \cdot 505$ er delelig med 10 da det er det eneste af tallene der indeholder $2 \cdot 5$ i sin primfaktoropløsning. Kun $5025 \cdot 2092$ er delelig med 100 da det er det eneste af tallene der indeholder $2^2 \cdot 5^2$ i sin primfaktoropløsning.

Opgave 2.1.14. Blandt tre på hinanden følgende heltal findes altid mindst et som er deleligt med 2, og et som er deleligt med 3. Dermed er produktet af dem deleligt med $2 \cdot 3 = 6$. Blandt fem på hinanden følgende heltal er der altid mindst et der er deleligt med 3, mindst et der er deleligt med $4 = 2^2$, og et der er deleligt med 5. Dermed er produktet af dem deleligt med $3 \cdot 2^2 \cdot 5 = 60$.

Opgave 2.1.15. Da $a + b = 2002$, er $b = 2002 - a$. Derfor er $ab = a(2002 - a) = 2002a - a^2$. Hvis 2002 skal gå op i ab, skal 2002 derfor også gå op i a^2. Vi betragter nu primfaktoropløsningen af 2002, som er $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Dermed skal hver af primfaktorerne 2, 7, 11 og 13 gå op i a^2, og derfor også i a ifølge sætning 2.1.5. Men hvis 2, 7, 11 og 13 går op i a, så må $2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$ også gå op i a ifølge korollar 2.1.4. Men det er umuligt da $0 < a < 2002$ fordi a og b er positive heltal så $a + b = 2002$. Altså kan 2002 aldrig gå op i ab.

Opgave 2.2.1. Ved at omskrive fås

$$53 = x^6 - y^2 = (x^3 + y)(x^3 - y).$$

Da 53 er et primtal, må $x^3 + y = 53$ og $x^3 - y = 1$. Dermed er $x = 3$ og $y = 26$ eneste løsning.

Opgave 2.2.2. Tallet $m^3 - m$ er deleligt med 6 for alle hele tal m da

$$m^3 - m = m(m^2 - 1) = m(m-1)(m+1)$$

viser at $m^3 - m$ er et produkt af tre på hinanden følgende hele tal, og 2 og 3 hver især går op i mindst et af de tre tal.

Opgave 2.2.3. Kald den ukendte katete a og hypotenusen c. Da er

$$2^2 \cdot 997^2 = 1994^2 = c^2 - a^2 = (c + a)(c - a).$$

Da $c+a$ og $c-a$ har samme paritet (dvs. de enten begge er lige eller ulige), må de begge være lige. Vi har derfor

$$997^2 = \frac{c+a}{2} \cdot \frac{c-a}{2},$$

hvor 997 er et primtal. Heraf ses at $\frac{c+a}{2} = 997^2$ og $\frac{c-a}{2} = 1$. Dette giver $c = 1+997^2 = 994010$.

Opgave 2.2.4. Omskriv sammenhængen mellem p, q og r til

$$p = r^2 - q^2 = (r+q)(r-q).$$

For at vise at 6 går op i pqr, viser vi at 2 og 3 hver især går op i mindst et af tallene p, q og r, og dermed i deres produkt. Hvis hverken q eller r er lige, er de begge ulige, og så er $r+q$ lige, og altså $p=(r+q)(r-q)$ lige. Altså er mindst et af tallene p, q og r deleligt med 2. Hvis hverken q eller r er delelig med 3, da har de hver især rest 1 eller 2 ved division med 3. Hvis de har forskellig rest, er $r+q$ delelig med 3, og hvis de har samme rest, er $r-q$ delelig med 3. I begge tilfælde er p delelig med 3. Dermed er mindst et af tallene p, q og r deleligt med 3. Samlet giver dette at deres produkt pqr er deleligt med 6.

Opgave 2.2.5. Da

$$a^2+b^2+9ab = (a-b)^2 + 11ab,$$

er $(a-b)^2$ delelig med 11, og da 11 er et primtal, må $a-b$ også være delelig med 11. Altså er $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ delelig med 11.

Opgave 2.2.6. Lad $n=a^2+b^2$ og $m=c^2+d^2$. Vi skal nu vise at produktet nm også er en sum af to kvadrattal, og det gør vi ved at omskrive vha. af kvadratsætninger.

$$\begin{aligned} nm &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2 \\ &= (ac+bd)^2 - 2abcd + (ad-bc)^2 + 2abcd \\ &= (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2. \end{aligned}$$

Opgave 2.2.7. For alle $n>1$ viser omskrivningen

$$n^4+4 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

at n^4+4 ikke er et primtal. For $n=1$ er $n^4+4=5$ et primtal.

Opgave 2.2.8. Først omskriver vi således:

$$\begin{aligned} 2x^2y^2+16x^2+y^2 &= 448 \\ 2x^2(y^2+8)+y^2+8 &= 456 \\ (2x^2+1)(y^2+8) &= 2^3\cdot 3\cdot 19. \end{aligned}$$

Da $2x^2+1$ er ulige, må $2x^2+1$ være lig med $1,3,19$ eller 57. Af dette ser man at $x=0,1,3$. Ved at efterprøve disse muligheder får man følgende løsninger $(1,12)$ og $(3,4)$.

Opgave 2.2.9. Da $xy+3y=y(x+3)$ og $x^2+2x=(x+3)(x-1)+3$, kan ligningen omskrives til

$$1994 = (x+3)(x-1) - y(x+3) = (x+3)(x-1-y).$$

De eneste faktoriseringer af tallet 1994 er $1994\cdot 1$ og $997\cdot 2$, og da $x+3$ er den største af faktorerne, får vi derfor løsningerne $(x,y)=(1991,1989)$ og $(x,y)=(994,991)$.

Opgave 2.3.1. Det følger af korollar 2.1.4 at enhver positiv divisor i n er på formen

$$p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_m^{\beta_m},$$

hvor β_i er et af tallene $0,1,\dots,\alpha_i$. Dermed har n i alt $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_m)$ forskellige positive divisorer ifølge multiplikationsprincippet.

Opgave 2.3.2. Antag at $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ har et ulige antal positive divisorer, og altså at $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_m)$ er ulige. Da er $1+\alpha_i$ ulige og α_i lige for alle $i=1,2,\dots,m$. Dette viser at n er et kvadrattal. Omvendt har alle kvadrattal også et ulige antal positive divisorer. De hele tal som har et ulige antal positive divisorer, er derfor netop kvadrattallene.

Opgave 2.3.3. Hvis sandsynligheden er $\frac{1}{100}$ for at et tilfældigt valgt tal m blandt tallene $1,2,3,\dots,499,500$ går op i n, må n have præcis fem positive divisorer. Et tal med primfaktoropløsning $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$ har $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_i)$ divisorer, dvs. $n=p^4$ for et primtal p. Det størst mulige n med den ønskede egenskab er derfor $n=3^4=81$ da $5^4>500$.

Opgave 2.3.4. Tal med netop syv divisorer må ifølge sætning 2.3.1 være på formen p^6, hvor p er et primtal. Et sådant tal er derfor altid et kubiktal da $p^6 = (p^2)^3$, og produktet af sådanne tal er derfor også et kubiktal.

Opgave 2.3.5. Da n skal være delelig med $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, må både 7, 11 og 13 indgå i primfaktoropløsningen af n. Sæt

$$n = 7^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2} \cdot 13^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdots p_s^{\alpha_s}, \quad \alpha_i \geq 1,\ s \geq 3$$

Antallet af divisorer i n er netop $(\alpha_1+1)(\alpha_2+2)\cdots(\alpha_s+1)$, og dermed er

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1) = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Af denne ligning ses at $s \leq 3$, og dermed at $s = 3$ og $n = 7^{\alpha_1} \cdot 11^{\alpha_2} \cdot 13^{\alpha_3}$. Nu er

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) = 7 \cdot 11 \cdot 13,$$

og dvs. at α_1, α_2 og α_3 er 6, 10 og 12 i en eller anden rækkefølge. De mulige værdier af n er altså $7^6 \cdot 11^{10} \cdot 13^{12}$, $7^6 \cdot 11^{12} \cdot 13^{10}$, $7^{10} \cdot 11^6 \cdot 13^{12}$, $7^{10} \cdot 11^{12} \cdot 13^6$, $7^{12} \cdot 11^6 \cdot 13^{10}$ og $7^{12} \cdot 11^{10} \cdot 13^6$.

Opgave 2.4.1. $\gcd(12,45) = 3$, $\gcd(1000,1205) = 5$, $\gcd(1024,12) = 4$, $\gcd(88,90) = 2$ og $\gcd(1002,1003) = 1$.

Opgave 2.4.2. Hvis d er divisor i n og $n+1$, må d også være divisor i $(n+1)-1 = 1$, og altså $\gcd(n,n+1) = 1$. Hvis d er divisor i n og $n+2$, må d også være divisor i $2 = (n+2)-n$. Hvis n er lige, har vi derfor $\gcd(n,n+2) = 2$, og hvis n er ulige, $\gcd(n,n+2) = 1$.

Opgave 2.4.3. Da $754 = 2 \cdot 338 + 78$, $338 = 4 \cdot 78 + 26$ og $78 = 3 \cdot 26 + 0$, er $\gcd(754,338) = 26$.

Opgave 2.4.4. Da b og c ikke har nogen fælles primfaktorer, må de fælles divisorer i a og b være de samme som de fælles divisorer i ac og b. Dermed er $\gcd(a,b) = \gcd(ac,b)$.

Opgave 2.4.5. Brøken er uforkortelig når største fælles divisor for nævner og tæller er 1. Ifølge sætning 2.4.1 er

$$\begin{aligned}
\gcd(n^4+3n^2+1, n^3+2n) &= \gcd(n^4+3n^2+1-n(n^3+2n), n^3+2n) \\
&= \gcd(n^2+1, n^3+2n) \\
&= \gcd(n^2+1, n^3+2n-n(n^2+1)) = \gcd(n^2+1, n) \\
&= \gcd(n^2+1-n\cdot n, n) = \gcd(1,n) = 1.
\end{aligned}$$

Opgave 2.4.6. Brøken er uforkortelig når største fælles divisor for nævner og tæller er 1. Ifølge sætning 2.4.1 er

$$\begin{aligned}
&\gcd(m^4+3m^3-3m^2+2m-2, m-1) = \\
&\gcd(m^4+3m^3-3m^2+2m-2-3m^2(m-1)-2(m-1), m-1) = \\
&\gcd(m^4, m-1).
\end{aligned}$$

Da m og $m-1$ er indbyrdes primiske, må m^4 og $m-1$ også være indbyrdes primiske, dvs. $\gcd(m^4, m-1) = 1$. Dermed er brøken uforkortelig.

Opgave 2.4.7. At $\frac{3n^2+3n+9}{3n+2}$ er et helt tal, er ensbetydende med at $3n+2$ går op i $3n^2+3n+9$, dvs. at $\gcd(3n+2, 3n^2+3n+9) = 3n+2$. Ved at udnytte at $3n+2$ og 3 er indbyrdes primiske får vi af sætning 2.4.1 og sætning 2.4.2 at

$$\begin{aligned}
\gcd(3n+2, 3n^2+3n+9) &= \gcd(3n+2, 3n^2+3n+9-n(3n+2)) \\
&= \gcd(3n+2, n+9) \\
&= \gcd(3n+2, 3(n+9)) \\
&= \gcd(3n+2, 3n+27) \\
&= \gcd(3n+2, 25).
\end{aligned}$$

Altså er $\frac{3n^2+3n+9}{3n+2}$ er et helt tal, netop når $3n+2$ er divisor i 25, dvs. netop når $3n+2$ er blandt tallene $\pm1, \pm5, \pm25$. De eneste muligheder er derfor $n = -9$, $n = -1$ og $n = 1$.

Opgave 2.4.8. Først regner vi på $\gcd(a_n, a_{n+1})$. Ved at udnytte at $2n+1$ og 2 er indbyrdes primiske får vi af sætning 2.4.1 og sætning 2.4.2 at

$$\begin{aligned}
\gcd(a_n, a_{n+1}) &= \gcd(n^2+500, n^2+2n+1+500) \\
&= \gcd(n^2+500, n^2+2n+1+500-(n^2+500)) \\
&= \gcd(n^2+500, 2n+1) = \gcd(2(n^2+500), 2n+1) \\
&= \gcd(2n^2+1000, 2n+1) = \gcd(2n^2+1000-n(2n+1), 2n+1) \\
&= \gcd(1000-n, 2n+1) = \gcd(2(1000-n), 2n+1) \\
&= \gcd(2000-2n, 2n+1) = \gcd(2000-2n+(2n+1), 2n+1) \\
&= \gcd(2001, 2n+1).
\end{aligned}$$

Heraf ses at $\gcd(a_n, a_{n+1})$ altid er divisor i 2001 og dermed højst 2001. Da $\gcd(a_{1000}, a_{1001}) = 2001$, er det den mindste værdi for N.

Opgave 2.4.9. $\operatorname{lcm}(10,12) = 60$, $\operatorname{lcm}(2\cdot 3^4\cdot 7^8, 2^2\cdot 3^3\cdot 7^3\cdot 11) = 2^2\cdot 3^4\cdot 7^8\cdot 11$, $\operatorname{lcm}(13,17) = 13\cdot 17 = 221$.

Opgave 2.4.10. Den største potens af p_i som går op i både a og b, er $p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$ for $i = 1,2,\dots,n$. Derfor må deres største fælles divisor være

$$\gcd(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}\cdots p_n^{\min(\alpha_n,\beta_n)}.$$

Ifølge korollar 2.1.4 går a op i et tal, netop når p^{α_i} går op i tallet for $i = 1,2,\dots,n$. Tilsvarende for b. Både a og b går derfor op i et tal netop når $p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$ går op i tallet for $i = 1,2,\dots,n$. Derfor må mindste fælles multiplum være

$$\operatorname{lcm}(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}\cdot p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}\cdots p_n^{\max(\alpha_n.\beta_n)}.$$

Da $\alpha_i\cdot\beta_i = \min(\alpha_i,\beta_i)\cdot\max(\alpha_i,\beta_i)$ for alle $i = 1,2,\dots,n$, fås

$$a\cdot b = \gcd(a,b)\cdot\operatorname{lcm}(a,b)$$

som ønsket.

Opgave 2.4.11. Med brug af opgave 2.4.3 fås $\gcd(754,338) = 26 = 338-4\cdot 78 = 338-4(754-2\cdot 338) = -4\cdot 754+9\cdot 338$.

Opgave 2.4.12. Tallene på formen $s\cdot 35+t\cdot 15$, $s,t\in\mathbb{Z}$, er netop alle multipla af $\gcd(35,15) = 5$. Vi viser først at alle multipla af 5 kan skrives på denne form: Ifølge Bezouts identitet findes hele tal s' og t' så $5 = \gcd(35,15) = s'\cdot 35+t'\cdot 15$. (De kan også nemt findes, fx $5 = -2\cdot 35+5\cdot 15$). Dermed kan alle multipla af 5 skrives på formen $s\cdot 35+t\cdot 15$, da

$$5m = ms'\cdot 35+mt'\cdot 15.$$

Så viser vi at ethvert tal på denne form er et multiplum af 5: Da 5 går op i både 15 og 35, må 5 også gå op i $s\cdot 35+t\cdot 15$, $s,t\in\mathbb{Z}$.

Opgave 2.4.13. Vi viser først at alle multipla af $\gcd(a,b)$ kan skrives på formen $ax+by$, $x,y\in\mathbb{Z}$, og der dermed findes $x,y\in\mathbb{Z}$ der løser ligningen, når c er et multiplum af $\gcd(a,b)$. Ifølge Bezouts identitet findes hele tal x' og y' så $\gcd(a,b) = x'a+y'b$. Dermed er

$$m\gcd(a,b) = mx'a+my'b,$$

som ønsket.

Nu vises omvendt at c er et multiplum af $\gcd(a,b)$ hvis der findes $x,y\in\mathbb{Z}$ så $c = xa+yb$. Da $\gcd(a,b)$ går op i både a og b, må det også gå op i et c på formen $c = xa+by$. Dermed er c et multiplum af $\gcd(a,b)$.

Opgave 2.5.1. Antag først at a og b har samme rest ved division med n, dvs. at $a = q_a n+r$ og $b = q_b n+r$, $0\le r<n$. Da går n op i $a-b = (q_a n+r)-(q_b n+r) = (q_a-q_b)n$, og dermed er $a\equiv b \pmod{n}$.

Antag omvendt at $a\equiv b\pmod{n}$, dvs. at $n\mid a-b$. Lad $a = q_a n+r_a$ og $b = q_b n+r_b$, $0\le r_a, r_b<n$. Da ved vi at n går op i $a-b = (q_a-q_n)n+(r_a-r_b)$, og dermed også i r_a-r_b. Da $-n<r_a-r_b<n$, må $r_a-r_b = 0$, og altså $r_a = r_b$ som ønsket.

Opgave 2.5.2. At $a\equiv 0\pmod{n}$, betyder at $n\mid a-0 = a$, dvs. at n går op i a. Restklassen repræsenteret ved 0 er derfor netop alle multipla af n.

Opgave 2.5.3. At $a\equiv b\pmod{2}$ betyder at $2\mid a-b$, altså at a og b har samme paritet, dvs. at de enten begge er lige, eller begge er ulige.

Opgave 2.5.4. a) $182\equiv 92\pmod{18}$ da $18\mid 182-92 = 90$. b) $-43\equiv 1\pmod{4}$ da $4\mid 1-(-43) = 44$. c) $111\not\equiv 13\pmod{11}$ da $11\nmid 111-13 = 98$.

Opgave 2.5.5. ii) At $a\equiv b$ og $c\equiv d\pmod{n}$, betyder at $n\mid a-b$ og $n\mid c-d$. Dermed må $n\mid(a-b)-(c-d) = (a-c)-(b-d)$, og altså $a-c\equiv b-d\pmod{n}$.
iv) At $a\equiv b\pmod{n}$, betyder at $n\mid a-b$. Dermed må $n\mid c(a-b) = ca-cb$, og altså $c\cdot a\equiv c\cdot b\pmod{n}$.
v) For at vise at $a\equiv b\pmod{n}$ medfører at $a^k\equiv b^k\pmod{n}$, benyttes iii) $k-1$ gange.

Opgave 2.5.6. Ligningen $x-12\equiv 5\pmod{11}$ omskrives til $x\equiv 5+12\equiv 6 \pmod{11}$. Det er altså netop restklassen repræsenteret ved 6 modulo 11 der løser ligningen, og løsningsmængden er derfor $\{\dots,-16,-5,6,17,28,\dots\}$.

Opgave 2.5.7. Vi regner modulo 13 ved brug af regnereglerne fra sætning 2.5.1:

$$27^{103}\cdot 17^2\cdot 5^{14}\equiv 1^{103}\cdot 4^2\cdot(5^2)^7\equiv 1\cdot 3\cdot(-1)^7\equiv -3\equiv 10 \pmod{13}.$$

Opgave 2.5.8. Sidste ciffer i et positivt heltal er netop resten ved division med 10, derfor regnes modulo 10:

$$2007^{2007} \equiv 7^{2007} \equiv (7^2)^{1003} \cdot 7 \equiv (-1)^{1003} \cdot 7 \equiv -7 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Altså er 3 sidste ciffer i 2007^{2007}.

Opgave 2.5.9. Lad p være et primtal, og antag at $a \cdot b \equiv 0 \pmod{p}$. Dette betyder at $p \mid a \cdot b$, og altså at $p \mid a$ eller $p \mid b$, hvilket jo netop betyder at $a \equiv 0$ eller $b \equiv 0 \pmod{p}$.

Opgave 2.5.10. a) Løsningerne til $x^2 \equiv 4 \pmod 5$ er netop restklasserne repræsenteret ved 2 og 3 modulo 5. b) Ligningen $x^2 \equiv 2 \pmod 5$ har ingen løsninger. c) Løsningerne til $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ er netop alle ulige tal. d) Løsningerne til $x^2 \equiv 0 \pmod 2$ er netop alle lige tal.

Opgave 2.5.11. Ligningen $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ omskrives til

$$0 \equiv x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \pmod{p}.$$

Ifølge nulreglen ved vi nu at $x+1 \equiv 0$ eller $x-1 \equiv 0 \pmod{p}$. Dermed er de eneste løsninger restklasserne 1 og -1 modulo p.

Opgave 2.5.12. ii) Vi viser at $n \equiv t(n) \pmod 9$, da dette viser det ønskede:

$$\begin{aligned} n &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &\equiv a_m \cdot 1^m + a_{m-1} \cdot 1^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \\ &\equiv a_m + a_{m-1} + \cdots + a_1 + a_0 = t(n) \pmod 9. \end{aligned}$$

iii) Vi viser at n er kongruent med plus eller minus den alternerende tværsum af n modulo 11, da det viser det ønskede.

$$\begin{aligned} n &= a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 \\ &\equiv a_m \cdot (-1)^m + a_{m-1} \cdot (-1)^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot (-1) + a_0 \\ &\equiv (-1)^m (a_m - a_{m-1} + \cdots - (-1)^m a_1 + (-1)^m a_0) \pmod{11}. \end{aligned}$$

Opgave 2.5.13. Et tal er deleligt med 18 netop hvis det er lige, og tværsummen er delelig med 9. Et tal er deleligt med 22 netop hvis det er lige, og den alternerende tværsum er delelig med 11.

Opgave 2.6.1. De kvadratiske rester modulo 3 er 0 og 1. De kvadratiske rester modulo 4 er 0 og 1. De kvadratiske rester modulo 5 er 0, 1 og 4.

Opgave 2.6.2. a) Vi regner modulo 4. Bemærk først at et lige tal i anden har rest 0 ved division med 4, mens et ulige tal i anden har rest 1. Da der er to lige og to ulige tal blandt fire på hinanden følgende tal, så er summen af kvadraterne af fire på hinanden følgende tal kongruent med 2 modulo 4. Da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 4, kan denne sum ikke være et kvadrattal.

b) Vi regner igen modulo 4. De der er 2 eller 3 lige tal og tilsvarende 3 eller 2 ulige tal blandt fem på hinanden følgende tal, er summen af kvadraterne af fem på hinanden følgende tal kongruent med 2 eller 3 modulo 4. Da hverken 2 eller 3 er kvadratiske rester modulo 4, kan denne sum ikke være kvadrattal.

c) Vi regner igen modulo 4. Da der er tre lige og tre ulige tal blandt seks på hinanden følgende tal, er summen af kvadraterne af seks på hinanden følgende tal kongruent med 3 modulo 4, og da 3 ikke er kvadratisk rest modulo 4, kan denne sum ikke være et kvadrattal.

Opgave 2.6.3. Hvis vi betragter ligningen $x^2 + 10 = 5^y$ modulo 4, får vi at $x^2 + 2 \equiv 1 \pmod 4$. Altså er $x^2 \equiv 3 \pmod 4$, og da 3 ikke er kvadratisk rest modulo 4, har ligningen ingen løsninger.

Opgave 2.6.4. Hvis vi betragter ligningen $x^2 - 3y^2 = 17$ modulo 3, får vi at $x^2 \equiv 2 \pmod 3$, og da 2 ikke er kvadratisk rest modulo 3, har ligningen ingen løsninger.

Opgave 2.6.5. Produktet af to lige tal er altid deleligt med 4, dvs. produktet af to lige tal lagt til 2006 har rest 2 modulo 4, men 2 er ikke kvadratisk rest modulo 4. Hvis der findes fire tal med den ønskede egenskab, må tre af disse derfor være ulige. Blandt tre ulige tal findes to som har samme rest modulo 4. Produktet af disse to har rest 1 modulo 4, og dermed har produktet lagt til 2006 rest 3 modulo 4, men 3 er ikke kvadratisk rest modulo 4. Derfor findes der ikke fire tal med den ønskede egenskab.

Opgave 2.6.6. Hvis $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$, skal enten et eller tre af tallene x, y og z være lige. Antag at kun et af tallene er lige, fx $x = 2x_1$. Da vil $y^2 + z^2 = 4x_1yz - 4x_1^2 \equiv 0 \pmod 4$. Vi ved at et ulige tal i anden har rest 1 modulo 4, og dermed har ligningen i dette tilfælde ingen løsninger. Altså er alle tre tal lige. Ved at sætte $x = 2x_1$, $y = 2y_1$ og $z = 2z_1$ får vi $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$. Ved samme argumentation følger nu at x_1, y_1, z_1 er lige, og da dette kan gentages, vil x, y, z være delelige med 2^n for alle $n \in \mathbb{N}$. Dermed er den eneste løsning $x = y = z = 0$.

Opgave 2.6.7. Lad $x, y \in \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$ og $x \neq y$. Antag at $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$, hvilket betyder at $p \mid x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Da $x \not\equiv y \pmod{p}$, går p ikke op i $x-y$, og dermed går p ifølge nulreglen op i $x+y$. Da $x, y \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, må $x + y = p$. Af dette følger at tallene $1^2, 2^2, \dots, (\frac{p-1}{2})^2$ alle har forskellige rester modulo p, mens $x^2 \equiv (p-x)^2 \pmod{p}$. Dvs. blandt tallene $1^2, 2^2, \dots, (p-1)^2$ er der netop $\frac{p-1}{2}$ forskellige kvadratiske rester. Ingen af resterne $1^2, 2^2, \dots, (\frac{p-1}{2})^2$ kan være repræsentant for 0-restklassen ifølge nulreglen. Altså er netop halvdelen af tallene $1, 2, \dots, p-1$ kvadratiske rester modulo p.

Opgave 2.6.8. Hvis $m = 1$, er der ingen løsning. Hvis $m = 2$, er $n = 1$. Antag at $m > 2$. Betragter vi ligningen $7^n = 3 + 2^m$ modulo 8, får vi $(-1)^n \equiv 3 \pmod{8}$ hvilket er umuligt. Dermed er den eneste løsning $m = 2$ og $n = 1$.

Opgave 2.6.9. Af ligningen $6(x! + 3) = y^2 + 5$ ses at y^2 er ulige, og dermed at y også er ulige. Da alle kvadrater af ulige tal har rest 1 ved division med 8, er $y^2 \equiv 1 \pmod{8}$. For $x \geq 4$ er $6(x!+3) \equiv 6 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{8}$, mens $y^2 + 5 \equiv 6 \pmod{8}$. Der er altså ingen løsninger når $x \geq 4$. Nu er det let at tjekke mulighederne $x = 1, 2, 3$. Samtlige løsninger er dermed $(x, y) = (2, 5)$ og $(x, y) = (3, 7)$.

Opgave 2.6.10. Et tal er deleligt med $1599 = 39 \cdot 41$ netop hvis det er deleligt med både 39 og 41. Vi regner nu modulo henholdsvis 39 og 41 for at undersøge for hvilke n tallene 39 og 41 går op i $S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n$.

$$S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n \equiv 7^n + (-5)^n - 7^n - 5^n \equiv ((-1)^n - 1)5^n \pmod{39},$$

dvs. at S er delelig med 39, netop når n er lige.

$$S = 46^n + 34^n - 7^n - 5^n \equiv 5^n + (-7)^n - 7^n - 5^n \equiv ((-1)^n - 1)7^n \pmod{41},$$

dvs. at S er delelig med 41 netop når n er lige. Samlet er S delelig med 1599 netop når n er lige.

Opgave 2.6.11. Antag at $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$. Hvis n er ulige, er alle divisorer i n ulige. Altså vil $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv 1 + 1 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod{4}$, hvilket er umuligt.

Hvis n er lige, vil $d_1 = 1$ og $d_2 = 2$, og dermed $n \equiv 1 + 0 + d_3^2 + d_4^2 \not\equiv 0 \pmod{4}$, dvs. at 4 ikke går op i n. Samlet ser vi at $d_3 = p$, og at $d_4 = 2p$ eller $d_4 = q$, hvor p og q er ulige primtal. Hvis $d_4 = q$, vil $n \equiv 1 + 2^2 + p^2 + q^2 \equiv 3 \pmod{4}$, hvilket er umuligt da n er lige. Dermed er $n = 1 + 4 + p^2 + 4p^2 = 5p^2 + 5 = 5(p^2 + 1)$. Af dette ses at 3 ikke går op i n. Dermed er $p = 5$, og dvs. at $n = 5(5^2 + 1) = 130$ er det eneste tal der opfylder det ønskede.

Opgave 2.6.12. Hvis vi betragter ligningen $19x^3 - 84y^2 = 1984$ modulo 7, skal x opfylde at $5x^3 \equiv 3 \pmod{7}$, dvs. at $x^3 \equiv 3 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{7}$, men 2 er ikke kubisk rest modulo 7. Dermed har ligningen ingen heltallige løsninger. (Man finder samtlige kubiske rester modulo 7 ved at se på resterne af $0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3$).

Opgave 2.6.13. For $n = m = 1$ er $k = 14$. Antag at der findes et $k < 14$ med den ønskede egenskab.

Hvis n er ulige, er $k = 19^n - 5^m \equiv (-1)^n - 5 \equiv 4 \pmod{10}$. Sidste ciffer i k er derfor 4, dvs. $k = 4$. Men $19^n - 5^m \equiv 1 - 2^m \pmod{3}$ har aldrig rest 1 modulo 3, dvs. dette er ikke muligt.

Hvis n er lige, er $k = 19^n - 5^m \equiv (-1)^n - 5 \equiv 6 \pmod{10}$. Sidste ciffer i k er derfor 6, dvs. $k = 6$. Men $19^n - 5^m \equiv 3^n - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, dvs. $k = 6$ er ikke muligt.

Dermed er $k = 14$ det mindste k på denne form.

Opgave 2.7.1. Resultatet følger af sætning 2.7.1.

Opgave 2.7.2. Lad d være divisor i n, og sæt $n = dn'$. Ifølge sætning 2.7.1 i) er

$$a^n - b^n = (a^d)^{n'} - (b^d)^{n'} = (a^d - b^d)((a^d)^{n'-1} + (a^d)^{n'-1} b^d + \cdots + (b^d)^{n'-1}).$$

Altså går $a^d - b^d$ op i $a^n - b^n$.

Opgave 2.7.3. Antag at $a^n - 1$ er et primtal. Vi udnytter at

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1),$$

til at indse at $a = 2$. Hvis n har en ikke-triviel divisor d, ved vi fra opgave 2.7.2 at $a^n - 1$ er delelig med $a^d - 1$, hvilket viser at $a^n - 1$ ikke er et primtal da $1 < a^d - 1 < a^n - 1$. Dermed må n være et primtal hvis $a^n - 1$ er et primtal.

Opgave 2.7.4. Da

$$n^3 + 100 = n^3 + 10^3 - 900 = (n+10)(n^2 - 10n + 100) - 900,$$

går $n+10$ op i n^3+100 netop når $n+10$ går op i 900. Det største n så n^3+100 er delelig med $n+10$, er derfor $n=890$.

Opgave 2.7.5. Summen af samtlige positive divisorer i n er lig med

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_r+p_r^2+\cdots+p_r^{\alpha_r})$$

da hver divisor netop svarer til et led når man ganger alle parenteserne sammen. Vha. omskrivningen i sætning 2.7.1 i) giver dette det ønskede.

Opgave 2.7.6. Bemærk først at hvis $a+b$ er delelig med n, da er $b\equiv -a \pmod n$ og dermed

$$a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}\equiv na^{n-1}\equiv 0 \pmod n.$$

Altså er $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$ delelig med n^2 da begge parenteser er delelige med n. Dette medfører at

$$\begin{aligned}&1^n+2^n+\cdots+n^n=\\&\left(1^n+(n-1)^n\right)+\left(2^n+(n-2)^n\right)+\cdots+\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^n+\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right)+\left(n^n\right)\end{aligned}$$

er delelig med n^2.

Opgave 2.7.7. Vi ved at $v_p(a-1)>0$. Dette betyder at $a-1$ er delelig med p, og altså $a\equiv 1 \pmod p$. Ifølge sætning 2.7.1 er

$$a^k-1=(a-1)(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+1).$$

Nu undersøger vi den sidste faktor modulo p:

$$a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+1\equiv 1+1+\cdots+1=k\not\equiv 0 \pmod p.$$

Da k ikke er delelig med p, er

$$v_p(a^k-1)=v_p(a-1)+v_p(a^{k-1}+a^{k-2}+\cdots+1)=v_p(a-1),$$

som ønsket.

Opgave 2.7.8. Først faktoriseres $3^{1024}-1=3^{2^{10}}-1$ vha. sætning 2.7.1.

$$3^{2^{10}}-1=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^{2^2}+1)\cdots(3^{2^9}+1).$$

Da $3^m\equiv 1 \pmod 4$ for lige m, er alle parenteser pånær $(3+1)$ delelig med 2, men ikke med 4. Dermed er $v_2(3^{1024}-1)=12$.

Opgave 2.7.9. Antag at m er et ulige positivt tal som ikke er delelig med 5. Ved at faktorisere får vi

$$a^n=2^m+3^m=(2+3)(2^{m-1}-2^{m-2}\cdot 3+\cdots-2\cdot 3^{m-2}+3^{m-1}).$$

Dette viser at 5 går op i a. Hvis $n>1$, skal 5 også gå op i

$$2^{m-1}-2^{m-2}\cdot 3+\cdots-2\cdot 3^{m-2}+3^{m-1}.$$

Men da $2\equiv -3 \pmod 5$, er

$$\begin{aligned}2^{m-1}-2^{m-2}\cdot 3+\cdots-2\cdot 3^{m-2}+3^{m-1}&\equiv 2^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+2^{m-1}\\&=m2^{m-1}\\&\not\equiv 0 \pmod 5,\end{aligned}$$

Dermed er $n=1$.

Opgave 2.7.10. Lad $d=\gcd(a,b)$, og sæt $a=da'$ og $b=db'$.

Først viser vi at m^d-1 går op i $\gcd(m^a-1,m^b-1)$: Vi ved fra opgave 2.7.2 at m^d-1 går op i både m^a-1 og m^b-1, og dermed også i $\gcd(m^a-1,m^b-1)$.

Derefter viser vi at $\gcd(m^a-1,m^b-1)$ går op i m^d-1. Sæt $n=\gcd(m^a-1,m^b-1)$. Da er $m^a\equiv 1 \pmod n$ og $m^b\equiv 1 \pmod n$. Ifølge Bezouts identitet findes hele tal s og t så $d=sa+tb$. Da $d\le a$ og $d\le b$, må netop en af s og t være positiv. Antag uden tab af generalitet at s er positiv. Da er $d-tb=sa$ og altså

$$m^d\equiv m^d\cdot(m^b)^{-t}\equiv m^{d-bt}\equiv m^{as}\equiv(m^a)^s\equiv 1 \pmod n.$$

Dermed må n gå op i m^d-1, hvilket samlet viser at $\gcd(m^a-1,m^b-1)=m^{\gcd(a,b)}-1$.

Opgave 2.7.11. Lad n være et positivt heltal, $k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ og $N_{n,k}$ tallet med 2^n cifre som alle er k. Ved at faktorisere $N_{n,k}$ vha. sætning 2.7.1 fås

$$N_{n,k} = k \cdot \frac{10^{2^n}-1}{10-1} = k(10^{2^0}+1)(10^{2^1}+1)(10^{2^2}+1)\cdots(10^{2^{n-1}}+1).$$

Hvis $n_1 < n_2$, må $10^{2^{n_1}}+1$ gå op i

$$10^{2^{n_2}}-1 = (10-1)(10^{2^0}+1)(10^{2^1}+1)(10^{2^2}+1)\cdots(10^{2^{n_2-1}}+1).$$

Dermed må $\gcd(10^{2^{n_1}}+1, 10^{2^{n_2}}+1)$ gå op i $\gcd(10^{2^{n_2}}-1, 10^{2^{n_2}}+1) = 1$. De n faktorer $10^{2^i}+1$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$, i faktoriseringen af $N_{n,k}$ er derfor parvis indbyrdes primiske, dvs. de må hver have en primfaktor der ikke er primfaktor i de andre faktorer. Dette viser at $N_{n,k}$ har mindst n forskellige primfaktorer.

Opgave 2.7.12. Vi bestemmer 99^{703} modulo 10^4 vha. af binomialformlen:

$$99^{703} = (100-1)^{703} \equiv \binom{703}{1}100-1 = 70300-1 \equiv 299 \pmod{10^4}.$$

Dermed er de fire sidste cifre 0299.

Opgave 2.7.13. Vi regner modulo b^4 på udtrykket $(b^2+a)^b - a^b$ og udnytter undervejs binomialformlen:

$$(b^2+a)^b - a^b \equiv \binom{b}{1} b^2 a^{b-1} = b^3 a^{b-1} \pmod{b^4}.$$

Da a og b ikke har nogen fælles primfaktorer og $b > 1$, er a^{b-1} ikke delelig med b. Dette viser at $(b^2+a)^b - a^b$ er delelig med b^3, men ikke med b^4, dvs. at $n = 3$.

Opgave 2.8.1. $\phi(3)=2$, $\phi(4)=2$, $\phi(5)=4$, $\phi(6)=2$, $\phi(7)=6$, $\phi(8)=4$, $\phi(9)=6$, $\phi(10)=4$, $\phi(11)=10$, $\phi(12)=4$, $\phi(13)=12$, $\phi(14)=6$, $\phi(15)=8$, $\phi(16)=8$, $\phi(17)=16$, $\phi(18)=6$, $\phi(19)=18$.

Opgave 2.8.2. a) Samtlige primiske restklasser modulo 15 er repræsenteret ved $1,2,4,7,8,11,13,14$. Deres multiplikative inverse ses af følgende: $1\cdot 1 \equiv 1 \pmod{15}$, $2 \cdot 8 \equiv 1 \pmod{15}$, $4 \cdot 4 \equiv 1 \pmod{15}$, $7 \cdot 13 \equiv 1 \pmod{15}$, $11 \cdot 11 \equiv 1 \pmod{15}$, $14 \cdot 14 \equiv 1 \pmod{15}$. b) $7x + 19 \equiv 36 \Leftrightarrow 7x \equiv 2 \Leftrightarrow x \equiv 13 \cdot 2 \equiv 11 \pmod{15}$. Løsningen er altså restklassen 11 modulo 15.

Opgave 2.8.3. Det følger af sætning 2.5.3

Opgave 2.8.4. Det følger af sætning 2.8.3 og 2.8.7.

Opgave 2.8.5. Ifølge sætning 2.8.8 er $\phi(120) = \phi(2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^2 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ og $\phi(98) = \phi(2 \cdot 7^2) = 7 \cdot 6 = 42$.

Opgave 2.8.6. Lad $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, og antag at $\phi(n) = 8$. Da er

$$8 = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1).$$

Da $p_i - 1$ skal gå op i 8, må primdivisorerne i n være blandt primtallene 2, 3 og 5. Dermed kan man nemt tjekke at de eneste muligheder er $n = 2^4 = 16$, $n = 2^3 \cdot 3 = 24$, $2^2 \cdot 5 = 20$, $n = 3 \cdot 5 = 15$ og $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$.
Lad nu $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, og antag at $\phi(m) = 14$. Da er

$$14 = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \cdots p_r^{\alpha_r-1}(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_r-1).$$

Da $p_i - 1$ skal gå op i 14, må primdivisorerne i m være blandt primtallene 2 og 3. Når m ikke har andre primdivisorer end 2 og/eller 3, er 7 ikke en divisor i $\phi(m)$, hvilket er en modstrid. Derfor findes ingen m så $\phi(m) = 14$.

Opgave 2.8.7. Lad primfaktoropløsningen af n være $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$. Ifølge sætning 2.8.8 er

$$\begin{aligned}
\phi(n^\alpha) &= \phi(p_1^{\alpha\alpha_1} p_2^{\alpha\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha\alpha_m}) \\
&= p_1^{\alpha\alpha_1-1}(p_1-1)\cdots p_m^{\alpha\alpha_m-1}(p_m-1) \\
&= \left((p_1^{\alpha_1})^{\alpha-1}\cdots(p_m^{\alpha_m})^{\alpha-1}\right)\left(p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\cdots p_m^{\alpha_m-1}(p_m-1)\right) \\
&= n^{\alpha-1}\phi(n).
\end{aligned}$$

Opgave 2.8.8. Lad primfaktoropløsningen af n være $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$. Vi har tidligere set at summen af samtlige positive divisorer i n er

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{\alpha_2})\cdots(1+p_r+p_r^2+\cdots+p_r^{\alpha_r})$$

Desuden ved vi fra sætning 2.8.7 at $\phi(ab) = \phi(a)\cdot\phi(b)$ for to indbyrdes primiske hele tal a og b, og derfor må

$$\begin{aligned}\sum_{d\mid n}\phi(d) &= \prod_{i=1}^{m}\left(1+\phi(p_i)+\phi(p_i^2)+\cdots+\phi(p_i^{\alpha_i})\right)\\ &= \prod_{i=1}^{m}\left(1+(p_i-1)+(p_i-1)p_i+\cdots+(p_i-1)p_i^{\alpha_i-1}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{m}\left(1+(p_i-1)\frac{p^{\alpha_i}-1}{p_i-1}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i} = n.\end{aligned}$$

Opgave 2.9.1. Hvis n er et primtal, gælder ifølge Wilsons sætning at

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod{n},$$

dvs. at n går op i $(n-1)!+1$.

Hvis $n>1$ ikke er et primtal, findes et primtal p som går op i n, hvor $p<n$. Da p går op i $(n-1)!$, kan p og dermed heller ikke n gå op i $(n-1)!+1$. Altså er betingelsen kun opfyldt når n er et primtal eller $n=1$.

Opgave 2.9.2. Vi viser indirekte at svaret er nej. Antag at mængden

$$S = \{n, n+1, \ldots, n+9\}$$

kan deles i to disjunkte mængder S_1 og S_2 så produkterne π_1 og π_2 af henholdsvis elementerne i S_1 og S_2 er ens. Blandt ti på hinanden følgende tal kan højst et være deleligt med 11, men hvis et af tallene var deleligt med 11, ville de to produkter ikke være ens. Tallene i S repræsenterer således restklasserne $1,2,\ldots,10$ modulo 11. Ifølge Wilsons sætning gælder nu at

$$\pi_1^2 = \pi_1\pi_2 \equiv (11-1)! \equiv -1 \pmod{11}.$$

Ved at tjekke kvadratet på alle resterne modulo 11 ses at -1 ikke er kvadratisk rest modulo 11, hvilket viser at det ikke er muligt. (Senere skal vi se at -1 ikke er kvadratisk rest modulo nogen primtal på formen $4n+3$).

Opgave 2.9.3. Antag at p er et primtal på formen $p=4n+1$. Ifølge Wilsons sætning gælder

$$\begin{aligned}-1 \equiv (p-1)! &= 1\cdot 2\cdots 2n\cdot(2n+1)\cdots(p-2)\cdot(p-1)\\ &\equiv 1\cdot 2\cdots 2n\cdot(-2n)\cdots(-2)\cdot(-1)\\ &\equiv (-1)^{2n}((2n)!)^2 = ((2n)!)^2 \pmod{p}.\end{aligned}$$

Dvs. at $((2n)!)^2 \equiv -1 \pmod{p}$, og altså at -1 er kvadratisk rest modulo p.

Opgave 2.10.1. Hvis a ikke er primisk med p, er $a\equiv 0 \pmod{p}$, og da er $a\equiv 0\equiv a^p$. Hvis a er primisk med p, siger Fermats lille sætning at $a^{p-1}\equiv 1 \pmod{p}$, og dermed er $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Opgave 2.10.2. Bemærk først at $2730 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$, og at $p = 2,3,5,7,13$ opfylder at $p-1 \mid 12$. Ifølge Fermats lille sætning ved vi at

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

hvis a er primisk med p. I dette tilfælde vil yderligere $a^{13}\equiv a \pmod{p}$ da vi ved at $p-1\mid 12$. Hvis a ikke er primisk med p, vil $a^{13}\equiv 0\equiv a \pmod{p}$. Samlet er $a^{13}-a$ delelig med primtallene $2,3,5,7,13$ og dermed også med 2730 som er produktet af dem.

Opgave 2.10.3. Ifølge sætning 2.8.3 er $\phi(32) = \phi(2^5) = 2^4 = 16$. Da 17 er primisk med 32, gælder ifølge Eulers sætning at $17^{16}\equiv 1 \pmod{32}$. Altså er

$$17^{1601} = 17\cdot(17^{16})^{100} \equiv 17\cdot 1^{100} \equiv 17 \pmod{32}.$$

Opgave 2.10.4. Antag uden tab af generalitet at $a\geq b$. Da $a\equiv b \pmod{\phi(n)}$, er $a = q\cdot\phi(n)+b$ for et ikke-negativt heltal q. Ifølge Eulers sætning er $m^{\phi(n)}\equiv 1 \pmod{n}$, og dermed

$$m^a = m^{q\cdot\phi(n)+b} = (m^{\phi(n)})^q\cdot m^b \equiv 1^q\cdot m^b = m^b \pmod{n}.$$

Opgave 2.10.5. Bemærk først at $x_1+x_2+\cdots+x_k = 1492 \equiv 1 \pmod{7}$. Ifølge korollar 2.10.3 er $x^7\equiv x \pmod{7}$ for alle hele tal x. Dermed er

$$x_1^7+x_2^7+\cdots+x_k^7 \equiv x_1+x_2+\cdots+x_k \equiv 1 \pmod{7}.$$

Altså findes der ikke hele tal med sum 1492 så $x_1^7 + x_2^7 + \cdots + x_k^7 = 70707$, da $70707 \equiv 0 \pmod 7$.

Opgave 2.10.6. Da $\phi(100) = \phi(2^2) \cdot \phi(5^2) = 40$, og 3, 97 og 13 alle er primiske med 100, kan vi reducere eksponenterne modulo 40.

$$\begin{aligned} 3^{214} \cdot 97^{828} \cdot 13^{521} &\equiv 3^{14} \cdot (-3)^{28} \cdot 13 \\ &\equiv 3^{14} \cdot (-1)^{28} \cdot 3^{28} \cdot 13 \\ &\equiv (-1)^{28} \cdot 3^{42} \cdot 13 \\ &\equiv 3^2 \cdot 13 \equiv 17 \pmod{100}. \end{aligned}$$

De to sidste cifre i $3^{214} \cdot 97^{828} \cdot 13^{521}$ er derfor 17.

Opgave 2.10.7. Da $\phi(10) = 4$ og $\gcd(10,7) = 1$, ønsker vi at udregne eksponenten modulo 4. Vi ved at $7^x \equiv (-1)^x \pmod 4$ har rest 3 modulo 4 når x er ulige, dvs. at

$$\underbrace{7^{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}}_{1000} \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10}.$$

Dermed er sidste ciffer 3.

Opgave 2.10.8. Da $\phi(1000) = \phi(2^3) \cdot \phi(5^3) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 4 = 400$ og $\gcd(4007, 1000) = 1$, bestemmer vi først $4003^{4001} \pmod{400}$ så vi kan udnytte Eulers sætning til at reducere eksponenten i $4007^{4003^{4001}} \pmod{1000}$. Da $\gcd(4003, 400) = 1$, $\phi(400) = 160$ og $4001 \equiv 1 \pmod{160}$, følger det af Eulers sætning at

$$4003^{4001} \equiv 3 \pmod{400}.$$

Ved at benytte Eulers sætning igen får vi

$$4007^{4003^{4001}} \equiv 7^3 = 343 \pmod{1000}.$$

De tre sidste cifre i $4007^{4003^{4001}}$ er altså 343.

Opgave 2.10.9. For at bestemme de sidste tre cifre i $N = 2003^{2002^{2001}}$ ønsker vi at udregne N modulo 1000, dvs. at vi er interesserede i at udregne eksponenten $2002^{2001} \pmod{\phi(1000)}$ da $\gcd(2003, 1000) = 1$. Lad r være resten af 2002^{2001} modulo $\phi(100) = 400$, dvs. at $0 \le r < 400$ og $r \equiv 2002^{2001} \equiv 2^{2001} \pmod{400}$. Problemet er nu at $\gcd(2, 400) = 2$, dvs. de er ikke indbyrdes primiske, og vi udregner derfor i første omgang r modulo 2^4 og modulo 5^2 hver for sig. Da $\phi(5^2) = 20$, er

$$r \equiv 2^{2001} \equiv 2 \pmod{5^2} \text{ og } r \equiv 2^{2001} \equiv 0 \pmod{2^4}.$$

Altså er $r = k \cdot 2^4$, hvor $0 \le k < 5^2$ og $2^4 k \equiv 2 \pmod{2^5}$. Den inverse til 2 modulo 25 er 13, og derfor er

$$k \equiv 2 \cdot 13^4 \equiv 13^3 \equiv 22 \pmod{5^2}.$$

Derfor må $k = 22$, og dermed $r = 2^4 \cdot 22$. Altså er $2002^{2001} \equiv 2^4 \cdot 22 = 352 \pmod{400}$. Vi er nu klar til at udregne N modulo 1000.

$$\begin{aligned} N &\equiv 3^{2002^{2001}} \equiv 3^{352} \equiv 9^{176} = (10-1)^{176} \\ &\equiv \binom{176}{2} 10^2 - \binom{176}{1} 10 + 1 \equiv 241 \pmod{1000}. \end{aligned}$$

De tre sidste cifre i N er dermed 241.

Opgave 2.10.10. Lad m være et positivt heltal som hverken har 2 eller 5 som primfaktor. Da det om lidt viser sig at der er nogle særlige problemer omkring primfaktoren 3, sætter vi $m' = 3^2 m$. Lad yderligere $q \in \mathbb{N}$. Fordi $\gcd(m', 10) = 1$, ved vi fra Eulers sætning at

$$10^{q \cdot \phi(m')} = (10^{\phi(m')})^q \equiv 1 \pmod{m'}.$$

Dermed går m' op i

$$10^{q \cdot \phi(m')} - 1 = 3^2 \cdot \underbrace{1111111\ldots111}_{q \cdot \phi(m')}.$$

Da $m' = 3^2 m$, går m op i

$$n_q = \underbrace{1111111\ldots111}_{q \cdot \phi(m')}$$

for alle $q \in \mathbb{N}$. Der findes altså uendeligt mange tal n_q med den ønskede egenskab.

Opgave 2.10.11. Hvis p ikke er et primtal, er vi færdige. Antag derfor at p er et primtal. Vi skal nu vise at q ikke er et primtal for at vise at mindst et af tallene p og q ikke er primtal.

Af $p = n + k^n$ fås $n = p - k^n$ og $k^n - 1 = p - n - 1$, og samlet at

$$q = nk^{k^n-1} + 1 = (p-k^n)k^{p-n-1} + 1.$$

Fordi k er primisk med p, ved vi ifølge Fermats lille sætning at

$$q = (p-k^n)k^{p-n-1} + 1 \equiv -k^{p-1} + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da $k, n \geq 2$, kan man nemt vise ved induktion efter n at $k^n - 1 > n$. Altså er $q = nk^{k^n-1} + 1 > n + k^{k^n-1} > n + k^n = p$. Heraf følger at q ikke er et primtal.

Opgave 2.11.1. Da $2^1 \equiv 2, 2^2 \equiv 4, 2^3 \equiv 8, 2^4 \equiv 7, 2^5 \equiv 5, 2^6 \equiv 1 \pmod 9$ er $\operatorname{ord}_9(2) = 6$.

Da $3^1 \equiv 3, 3^2 \equiv 1 \pmod 8$ er $\operatorname{ord}_8(3) = 2$.

Da $7^1 \equiv 7, 7^2 \equiv 9, 7^3 \equiv 3, 7^4 \equiv 1 \pmod{10}$, er $\operatorname{ord}_{10}(7) = 4$.

Opgave 2.11.2. Lad $m = \operatorname{ord}_n(a)$. Et positivt helt tal k kan skrives som $q \cdot m + r$, hvor $0 \leq r < m$. Dermed er

$$a^k = a^{q\cdot m + r} = (a^m)^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}.$$

Bemærk at $a^r \equiv 1 \pmod n$ hvis og kun hvis $r = 0$, da $0 \leq r < m$, og m er det mindste positive hele tal så $a^m \equiv 1 \pmod n$. Altså er $a^k \equiv 1 \pmod n$ hvis og kun hvis $r = 0$, dvs. hvis og kun hvis ordenen m er divisor i k.

Ifølge Eulers sætning er $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod n$, og dermed er ordenen m divisor i $\phi(n)$.

Opgave 2.11.3. Hvis $a^m \equiv 1 \pmod n$ og $a^k \equiv 1 \pmod n$, så ved vi fra sætning 2.11.1 at $\operatorname{ord}_n(a)$ går op i både m og k og dermed i $\gcd(m,k)$, Altså er

$$a^{\gcd(m,k)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Opgave 2.11.4. Da q går op i $2^p - 1$, er $2^p \equiv 1 \pmod q$. Ifølge sætning 2.11.1 er $\operatorname{ord}_q(2)$ divisor i p, og da p er et primtal, må $\operatorname{ord}_q(2) = p$. Af Fermats lille sætning følger at $2^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, og dermed at p går op i $q-1$. Da $q-1$ er lige, må $q - 1 = 2pk$ for et positivt heltal k, dvs. at $q = 2pk + 1$.

Opgave 2.11.5. Lad p være en ulige primfaktor i $a^{2^n} + 1$. Da $p > 2$, er

$$a^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p} \text{ og } a^{2^{n+1}} = \left(a^{2^n}\right)^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dette viser at ordenen d af a modulo p er divisor i 2^{n+1}, men ikke i 2^n, og dermed at $d = 2^{n+1}$. Altså må 2^{n+1} gå op i $\phi(p) = p - 1$.

Opgave 2.11.6. Antag at der findes et helt tal n større end 1 så $2^n - 1$ er delelig med n, og lad p være den mindste primfaktor i n. Bemærk at p er ulige da p også er divisor i $2^n - 1$. Lad desuden $d = \operatorname{ord}_p(2)$. Nu ved vi at $d > 1$ og yderligere at d er divisor i $\phi(p) = p-1$ og dermed mindre end p. Men da $2^n \equiv 1 \pmod p$, går d også op i n i modstrid med at p var den mindste primfaktor i n.

Opgave 2.11.7. Lad d være ordenen af q modulo p. Fordi $p \mid q^r + 1$ og $p > 2$, må

$$q^r \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p} \text{ og } q^{2r} \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{p}.$$

Dette viser at d er divisor i $2r$, men ikke i r, og da r er et primtal, må $d = 2$ eller $d = 2r$.

Hvis $d = 2r$, da vil $2r$ gå op i $\phi(p) = p - 1$. Hvis $d = 2$, er $q^2 \equiv 1 \pmod p$, dvs. at p går op i $q^2 - 1$. Altså gælder enten at $2r \mid p-1$ eller at $p \mid q^2 - 1$.

Opgave 2.11.8. Bemærk først at hverken 2 eller 5 går op i $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$. Dermed er p og q forskellige fra 2 og 5. Ifølge Fermats lille sætning er $5^p \equiv 5 \pmod p$, og $2^p \equiv 2 \pmod p$. Altså er $5^p - 2^p \equiv 5 - 2 = 3 \pmod p$. Tilsvarende er $5^q - 2^q \equiv 3 \pmod q$. Dermed har vi at hvis $p \mid 5^p - 2^p$, er $p = 3$, og hvis $q \mid 5^q - 2^q$, er $q = 3$. En mulig løsning er $p = 3$, og $q = 3$.

Antag nu at $p = 3$, mens $q \neq 3$. Da vil $q \mid 5^3 - 2^3 = 125 - 8 = 117 = 3^2 \cdot 13$, dvs. $q = 13$. Tilsvarende får vi hvis $q = 3$ og $p \neq 3$, at $p = 13$.

Antag til slut at hverken p eller q er 3. Da må $p \mid 5^q - 2^q$ og $q \mid 5^p - 2^p$. Antag uden tab af generalitet at $p \geq q$ så $\gcd(p, q-1) = 1$. Da $5^p \equiv 2^p \pmod q$, er $(5\cdot 2^{-1})^p \equiv 1 \pmod q$. Dermed er ordenen af $5\cdot 2^{-1}$ modulo q divisor i $\gcd(p,q-1)=1$, dvs. ordenen er 1. Men dette betyder at $5\cdot 2^{-1}\equiv 1 \pmod q$, og dermed $5\equiv 5\cdot 2^{-1}\cdot 2\equiv 2 \pmod q$, hvilket betyder at $q=3$ i modstrid med antagelsen. Altså er der ingen løsninger i dette tilfælde.

Samtlige løsninger (p,q) er $(3,3)$, $(3,13)$, $(13,3)$.

Opgave 2.11.9. Lad $f_n=2^{2^n}+1$, og antag at f_n går op i $3^{(f_n-1)/2}+1=3^{2^{2^n-1}}+1$. Da er $3^{2^{2^n-1}}\equiv -1 \pmod k$, mens

$$3^{2^{2^n}}=\left(3^{2^{2^n-1}}\right)^2\equiv(-1)^2\equiv 1 \pmod{f_n}.$$

Altså er $\operatorname{ord}_{f_n}(3)$ divisor i 2^{2^n}, men ikke i 2^{2^n-1}. Dette viser at $\operatorname{ord}_{f_n}(3)=2^{2^n}=f_n-1$. Vi ved desuden ifølge Eulers sætning at $\operatorname{ord}_{f_n}(3)=f_n-1$ skal gå op i $\phi(f_n)$, og dermed specielt at $\operatorname{ord}_{f_n}(3)\le\phi(f_n)$. Men hvis f_n ikke er et primtal, så er $\phi(f_n)<f_n-1$. Altså må f_n være et primtal.

Opgave 2.11.10. Ved at indsætte ses at de eneste løsninger for $x=1$ er $(1,p)$, hvor p er et primtal, og at eneste løsning for $x=2$ eller $p<3$ er $(2,2)$.

Antag nu at $x,p\ge 3$, og at x^{p-1} går op i $(p-1)^x+1$. Da p er ulige, er $(p-1)^x+1$ ulige, og dermed er x også ulige. Lad q være den mindste primfaktor i x. Da er q også ulige, og $\gcd(x,q-1)=1$.

Da q går op i $(p-1)^x+1$, må

$$(p-1)^x\equiv -1 \pmod q \quad\text{og}\quad (p-1)^{2x}\equiv 1 \pmod q.$$

Lad $d=\operatorname{ord}_q(p-1)$. Ovenstående viser at $d>1$, og at d går op i $\gcd(2x,q-1)=2$, og altså $d=2$. Nu er

$$p-1\not\equiv 1 \pmod q \quad\text{og}\quad (p-1)^2\equiv 1 \pmod q.$$

Da q er et primtal, viser dette ifølge sætning 2.5.3 at $p-1\equiv -1 \pmod q$, og altså at $p=q$. Vi ved nu at $p\mid x$, x er ulige og $x\le 2p$. Dermed er $x=p$, når $x,p\ge 3$.

Ifølge antagelsen går x^{p-1} op i $(p-1)^x+1$, og derfor må

$$p^{p-1}\mid(p-1)^p+1=p^2\cdot\left(p^{p-2}-\binom{p}{1}p^{p-3}+\cdots-\binom{p}{p-2}+1\right).$$

Parentesen på højresiden er ikke delelig med p da alle led på nær det sidste er delelige med p, og derfor må $p^{p-1}\mid p^2$ og dermed $p\le 3$. Det er nemt at tjekke at $(3,3)$ er en løsning.

Samtlige løsninger er derfor $(1,p)$, $(2,2)$ og $(3,3)$, hvor p er et vilkårligt primtal.

Opgave 2.12.1. Følgen er selvfølgelig ikke periodisk, men regner vi modulo 4, er følgen periodisk fra et vist trin. Her får vi $1,1,2,3,3,2,3,3,2,3,3,\dots$, dvs. at følgen er periodisk fra $n=3$ med perioden $2,3,3$. Da 2 og 3 ikke er kvadratiske rester modulo 4, er a_n ikke et kvadrattal for noget $n>2$.

Opgave 2.12.2. Lad k være et fast helt tal, og lad a_n betegne resten ved division af F_n med k. Da der kun er k^2 par af restklasser modulo k, må der findes to ens par (a_i,a_{i+1}) og (a_j,a_{j+1}), $0\le i<j$. Det er klart ud fra definitionen af Fibonaccitallene at følgen $a_0,a_1,a_2,\dots$ dermed er periodisk fra et vist trin. Da a_{n-1} kan bestemmes ud fra a_n og a_{n+1} ($a_{n-1}\equiv a_{n+1}-a_n \pmod k$), er følgen desuden periodisk fra starten. Lad m være længden af perioden. Da har $a_0=0$ og a_m samme rest modulo k, dvs. at F_m er delelig med k.

Opgave 2.12.3. Bemærk først at hvis a_n er et kvadrattal, har a_n rest 0 eller 1 modulo 4.

Hvis a_0 har rest 2 eller 3 modulo 4, da har alle de resterende elementer i følgen skiftevis rest 2 og rest 3, og følgen indeholder derfor ingen kvadrattal. Hvis a_0 har rest 0 modulo 4, da har alle de resterende elementer i følgen skiftevis rest 2 og rest 3, og følgen kan derfor højst have a_0 som kvadrattal. Hvis a_0 har rest 1 modulo 4, da har a_1 rest 0, og derefter har alle de resterende elementer rest 2 eller rest 3. Dette viser at det højst er de to første led i følgen der kan være kvadrattal.

Antag at følgen indeholder to kvadrattal a_0 og a_1. Da er $a_0=s^2$, hvor s er ulige, og $a_1=s^{10}+487=t^2$. Lad $t=s^5+r$. Da er $t^2=(s^5+r)^2=s^{10}+2s^5r+r^2$, og dermed $2s^5r+r^2=487$. Hvis $s=1$, er $r(2+r)=487$ hvilket er umuligt. Hvis $s=3$, er $486r+r^2=487$, og dermed $r=1$. Hvis $s>3$, har ligningen ingen løsninger. Dermed er $m=a_0=9$ den værdi af m for hvilken følgen indeholder flest kvadrattal.

Opgave 2.12.4. Lad $A_n=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. Mængden A_n består af n forskellige tal da de har forskellige rester modulo n. Bemærk desuden at hvis $a_i,a_j\in A_n$, da må $k=|a_i-a_j|<n$, for ellers vil $a_i,a_j\in A_k$ og $a_i\equiv a_j \pmod k$.

Vi har nu at forskellen mellem det største og det mindste tal i A_n er mindre end n, og derfor må A_n indeholde n på hinanden følgende tal. Da følgen indeholder uendeligt mange både positive og negative tal, må alle hele tal forekomme mindst en gang. Samlet giver dette at alle heltal netop optræder en gang i følgen.

Et eksempel på en mulig følge: $0, -1, 1, -2, 2, \ldots$.

Opgave 2.12.5. Vi betragter i stedet følgen $y_n = 2x_n - 1$. Da er

$$\begin{aligned} y_n &= 2(2x_{n-1}x_{n-2} - x_{n-1} - x_{n-2} + 1) - 1 = 4x_{n-1}x_{n-2} - 2x_{n-1} - 2x_{n-2} + 1 \\ &= (2x_{n-1} - 1)(2x_{n-2} - 1) = y_{n-1}y_{n-2} \text{ når } n > 1. \end{aligned}$$

Bemærk at $y_1 = 3$, $y_2 = 3y_0$ og $y_3 = y_1 y_2 = 3^2 y_0$. Ved induktion ses let at $y_{3n} = 3^{2s} y_0^t$, hvor s og t er positive heltal. Dermed er y_{3n} et kvadrattal for alle $n \geq 1$ præcis når y_0 er et kvadrattal. Da $y_0 = 2a - 1$, fås det ønskede resultat netop når $a = \frac{(2m-1)^2+1}{2}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Opgave 2.12.6. Vi betragter i stedet følgen $y_n = x_n - 1$. Da er

$$y_n = x_n - 1 = 2(y_{n-1} + 1) - 4(y_{n-2} + 1) + 3 - 1 = 2y_{n-1} - 4y_{n-2}$$

for alle $n > 2$. Dette kan vi anvende endnu engang og få

$$y_n = 2(2y_{n-2} - 4y_{n-3}) - 4y_{n-2} = -8y_{n-3}.$$

Nu kan vi finde $x_{2011} - 1$:

$$x_{2011} - 1 = y_{2011} = -8y_{2008} = \cdots = (-8)^{670} y_1 = 2^{2011}.$$

Altså er $k = 2011$.

Opgave 2.12.7. Antag at følgen er periodisk fra et vist trin. Betragt det største hele tal m så 2^m går op i alle elementer i følgen. Sæt $b_k = \frac{a_k}{2^m}$. Følgen $b_1, b_2, \ldots$ opfylder samme rekursionsformel som $a_1, a_2, \ldots$ da 2015 er ulige, og vi ved at følgen indeholder mindst ét ulige tal. Betragt nu følgen $b_1, b_2, \ldots$ modulo 2. Da 2015 er ulige, må $b_{k+1} \equiv b_k + b_{k-1} \pmod 2$. Da vi yderligere ved at der findes mindst ét ulige element i følgen, må den modulo 2 være $\ldots, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$. Dette viser at periodelængden for $b_1, b_2, \ldots$ modulo 2 er 3, og dermed at periodelængden for $a_1, a_2, \ldots$ er delelig med 3.

Opgave 2.12.8. Bemærk først at

$$\begin{aligned} a_{2000} &\geq 2a_{1000} \geq 2^2 a_{500} \geq 2^3 a_{250} \geq 2^4 a_{125} \\ &\geq 2^5 a_{25} \geq 2^6 a_5 \geq 2^7 a_1 \geq 2^7 = 128. \end{aligned}$$

Betragt følgen $a_1 = 1$ og $a_n = 2^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}$ for $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Denne følge opfylder den ønskede betingelse, og da $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, er $a_{2000} = 128$. Dermed er 128 den mindst mulige værdi af a_{2000}.

Opgave 2.13.1. Samtlige løsninger er $x = 63 + k \cdot 114$, $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2.13.2. Først vælger vi n forskellige primtal $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Ifølge den kinesiske restklassesætning har følgende kongruenssystem en løsning:

$$\begin{aligned} x+1 &\equiv 0 \pmod{p_1^1} \\ x+2 &\equiv 0 \pmod{p_2^2} \\ &\vdots \\ x+n &\equiv 0 \pmod{p_n^n}. \end{aligned}$$

Hvis x er en løsning, da er $x+1, x+2, \ldots, x+n$ n på hinanden følgende hele tal så tal nummer i er delelig med en i'te potens af et helt tal større end 1.

Opgave 2.13.3. Vælg nm forskellige primtal $p_{11}, \ldots, p_{1m}, p_{21} \ldots, p_{2m}, \ldots p_{nm}$. Sæt $q_j = p_{j1} p_{j2} \ldots p_{jm}$ for $j = 1, 2, \ldots n$. Da er $q_1, q_2, \ldots, q_n$ indbyrdes primiske. Den kinesiske restklassesætning giver da at der findes et positivt heltal x som er løsning til kongruenssystemet

$$x + 1 \equiv 0 \pmod{q_1}, \quad x + 2 \equiv 0 \pmod{q_2}, \quad \ldots, \quad x + n \equiv 0 \pmod{q_n}.$$

De n på hinanden følgende tal $x+1, x+2, \ldots, x+n$ er nu delelige med mindst m forskellige primtal hver.

Opgave 2.13.4. Vi viser at følgen eksisterer ved at vise hvordan man konstruerer det næste element ud fra de foregående. Vælg først a_1 fuldstændigt frit.

Antag nu at $a_1, a_2, \ldots, a_m$ opfylder at summen af vilkårlige n på hinanden følgende elementer er delelig med n^2 for alle $n \leq m$. Vi ønsker at konstruere a_{m+1}, så $a_1 + a_2 + \ldots + a_m + a_{m+1}$ er delelig med n^2, dvs. så

$$a_{m+1} \equiv -(a_{m-n+2} + \ldots + a_m) \pmod{n^2} \qquad \dagger$$

for alle $n \le m+1$.

Lad $p_1,\dots,p_k$ være samtlige primtal mindre end eller lig med $m+1$, og lad α_i være det største hele tal så $p_i^{\alpha_i} \le m+1$. Lad yderligere a_{m+1} være en løsning til følgende kongruenssystem:

$$\begin{aligned} x &\equiv -(a_{m-p_1^{\alpha_1}+2}+\dots+a_m) \pmod{p_1^{2\alpha_1}} \\ &\vdots \\ x &\equiv -(a_{m-p_k^{\alpha_k}+2}+\dots+a_m) \pmod{p_k^{2\alpha_k}}. \end{aligned}$$

Vi ønsker nu at vise at a_{m+1} opfylder † for alle $n \le m+1$ da det giver det ønskede.

Først viser vi at a_{m+1} opfylder † for alle $n = p_i^{\beta_i}$, $i = 1,2,\dots,k$ og $\beta_i = 1,\dots,\alpha_i - 1$. Vi ved at summen af

$$a_{m-p_1^{\alpha_i}+2},\dots,a_{m+1}$$

er delelig med $p_i^{2\alpha_i}$ og dermed også med $p_i^{2\beta_i}$. Hvis vi grupperer elementerne i $p_i^{\alpha_i-\beta_i}$ grupper med $p_i^{\beta_i}$ på hinanden følgende elementer i hver, ved vi om samtlige grupper på nær den sidste, at summen af elementerne i gruppen er delelig med $p_i^{2\beta_i}$ pga. konstruktionen af $a_1,a_2,\dots,a_m$. Men da summen af samtlige elementer i alle grupperne er delelig med $p_i^{2\beta_i}$, må summen af elementerne i den sidste gruppe også være det. Vi har hermed vist at † er opfyldet for alle $n = p_i^{\beta_i}$, $i = 1,2,\dots,k$ og $\beta_i = 1,\dots,\alpha_i - 1$. Per konstruktion af a_{m+1} ved vi desuden at † er opfyldet for alle $n = p_i^{\alpha_i}$, $i = 1,2,\dots,k$.

Nu ønsker vi at vise at † er sand for alle $n \le m+1$. Da n er et produkt at primtalspotenser $p_i^{\beta_i}$, $i = 1,2,\dots,k$ og $\beta_i = 1,\dots,\alpha_i$, er det nok at vise at hvis † er sand for $n = n_1$ og $n = n_2$ med $n_1 n_2 \le m+1$ og $\gcd(n_1,n_2) = 1$, da er † også sand for $n = n_1 n_2$. Antag at † er sand for $n = n_1$ og $n = n_2$ med $n_1 n_2 \le m+1$ og $\gcd(n_1,n_2) = 1$. Da summen af n_1 på hinanden følgende elementer er delelig med n_1^2, må summen af $n = n_1 n_2$ på hinanden følgende elementer også være delelig med n_1^2. Tilsvarende gælder for n_2. Da $\gcd(n_1,n_2) = 1$ gælder altså at summen af $n_1 n_2$ på hinanden følgende elementer er delelig med $n^2 = n_1^2 n_2^2$ hvilket netop var hvad vi skulle vise.

Opgave 2.14.1. Af ligningen ses at $2bc + ac = ba$. Da a er ulige, må $a \mid bc$, $b \mid ac$ og $c \mid ab$. Dermed findes positive heltal u, v og w, så $au = bc$, $bv = ac$ og $cw = ab$. Af dette får vi $ab \cdot ac = cw \cdot bv$, dvs. $a^2 = vw$. Tilsvarende for b og c, så vi samlet har

$$a^2 = vw, \quad b^2 = uw, \quad c^2 = uv. \quad †$$

Vi vil nu vise at $\gcd(u,v) = \gcd(u,w) = 1$. Lad p være en primfaktor i u. Af † ses nu at p også er primfaktor i b og c, og dermed ikke i a da a, b og c ikke har nogen fælles divisorer. Da $a^2 = vw$, går p heller ikke op i v og w. På denne måde ses at $\gcd(u,v) = \gcd(u,w) = 1$.

Vi har nu at $c^2 = uv$ og $\gcd(u,v) = 1$. Dermed må u og v være kvadrattal. Tilsvarende ses at w er et kvadrattal. Da $abc = uvw$, må abc være et kvadrattal.

Opgave 2.14.2. Sæt $d = \gcd(x,y)$, $x = d\cdot x_1$ og $y = d \cdot y_1$. Ved at gange igennem med $x^2 \cdot y^2 \cdot 1997$ og dividere med d^2 fås

$$1997 \cdot 13 \cdot y_1^2 + 1997 \cdot 1999 \cdot x_1^2 = x_1^2 \cdot y_1^2 \cdot d^2 \cdot z.$$

Dette viser at $x_1^2 \mid 1997 \cdot 13$ og $y_1^2 \mid 1997 \cdot 1999$, og da 13, 1997 og 1999 er primtal, må $x_1 = y_1 = 1$. Nu er

$$z \cdot d^2 = 1997 \cdot (13 + 1999) = 1997 \cdot 2012 = 2^2 \cdot 503 \cdot 1997.$$

Dette giver mulighederne $d = 1$ og $d = 2$, og altså løsningerne $(x,y,z) = (1,1,2^2 \cdot 503 \cdot 1997)$ og $(x,y,z) = (2,2,503 \cdot 1997)$.

Opgave 2.14.3. Ved omrokering får vi

$$x^3 = 4y^2 + 4y - 3 = (2y+1)^2 - 4 = (2y-1)(2y+3).$$

Da $\gcd(2y-1, 2y+3) = \gcd(2y-1, 4) = 1$, er både $2y-1$ og $2y+3$ kubiktal, men der findes ikke to kubiktal hvis forskel er 4. Dermed har ligningen ingen heltallige løsninger.

Opgave 2.14.4. Hvis $m^n + 1$ er et kvadrattal, findes et positivt heltal x så

$$m^n = x^2 - 1 = (x-1)(x+1).$$

Da m er ulige, er x lige, dvs. at $\gcd(x-1, x+1) = 1$. Dermed findes to positive heltal a og b således at $x - 1 = a^n$ og $x + 1 = b^n$. Men da er $2 = (x+1) - (x-1) = b^n - a^n$, hvilket giver at $n = 1$.

Tallet $m^n + 1$ er dermed et kvadrattal, når $n = 1$ og $m = (2k+1)^2 - 1$ for alle $k \in \mathbb{N}$.

Opgave 2.14.5. Antag at der findes en løsning, og sæt $w = x + 1$. Da er

$$y^n = (w-1)w(w+1) = w(w^2-1).$$

Da $\gcd(w, w^2-1) = 1$, findes positive heltal a og b således at $w = a^n$ og $w^2 - 1 = b^n$. Dermed er $1 = w^2 - (w^2-1) = (a^2)^n - b^n$, hvilket er en modstrid da $n > 1$.

Opgave 2.14.6. Ved at tjekke $n = 1, 2, 3, 4, 5$ indses at blandt disse opfylder kun $n = 5$ det ønskede. Vi viser indirekte at der ikke er flere n der opfylder betingelsen.

Antag at $n \geq 6$, og at $m^2 = n2^{n-1} + 1$. Da er

$$(m+1)(m-1) = n2^{n-1},$$

dvs. at $2^{n-2} \mid m+1$ eller $2^{n-2} \mid m-1$. Dermed er $m \geq 2^{n-2} - 1$, og

$$m^2 \geq (2^{n-2}-1)^2 = 2^{2n-4} - 2^{n-1} + 1 = 2^{n-1}(2^{n-3}-1) + 1 > n2^{n-1} + 1 = m^2$$

da $2^{n-3} - 1 > n$ når $n \geq 6$. Men dette er en modstrid.

Opgave 2.14.7. Det er indlysende at der ikke er nogle løsninger for $x < 0$, og for $x = 0$ er der to løsninger $(0, 2)$ og $(0, -2)$.

Antag at $x > 0$. Hvis (x, y) er en løsning, da er også $(x, -y)$ en løsning, og derfor kan vi antage at også $y > 0$. Vi omskriver nu ligningen til

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y-1)(y+1),$$

hvilket viser et y er ulige. Da netop en af faktorerne $y - 1$ og $y + 1$ er delelig med 4, får vi at $x > 2$, samt at en af faktorerne er delelig med 2^{x-1}.

Sæt nu

$$y = 2^{x-1}m + \epsilon, \text{ hvor } m \text{ er ulige og positiv, og } \epsilon = \pm 1.$$

Når vi indsætter dette i ligningen, får vi

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (2^{x-1}m + \epsilon)^2 - 1 = 2^{2x-2}m^2 + 2^x m\epsilon,$$

eller ækvivalent

$$1 + 2^{x+1} = 2^{x-2}m^2 + m\epsilon.$$

Derfor er

$$1 - \epsilon m = 2^{x-2}(m^2 - 8).$$

Hvis $\epsilon = 1$, må $m^2 - 8 \leq 0$, hvilket giver $m = 1$. Dermed er

$$1 - 1 = 2^{x-2}(1 - 8)$$

hvilket er umuligt.

Hvis $\epsilon = -1$, må

$$1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geq 2(m^2 - 8),$$

dvs. at $2m^2 - m - 17 \leq 0$. Dette giver at $m = 1$ eller $m = 3$. Det er igen nemt at se at $m = 1$ ikke er en løsning. Hvis $m = 3$, får vi at $x = 4$, dvs. at $y = 23$, og disse værdier opfylder den oprindelige ligning.

Dermed er samtlige løsninger $(0, 2)$, $(0, -2)$, $(4, 23)$ og $(4, -23)$.

Opgave 2.14.8. Sæt $m = dn + r$, $0 \leq r < n$, for et ikke-negativt heltal d. Da er

$$2^m + 1 = 2^{dn+r} + 1 = (2^n)^d 2^r + 1 \equiv 1^d 2^r + 1 \equiv 2^r + 1 \pmod{2^n - 1}.$$

Da $n > r$, er der ingen positive heltal $m, n > 2$ som opfylder betingelserne.

Opgave 2.14.9. Antag modsat at det ikke er sandt, og lad s' og t' være de to positive heltal med den mindste sum for hvilke det ikke er sandt. Bemærk at både s' og t' må være større end 1, og at $s' \neq t'$. Antag uden tab af generalitet at $s' > t'$. Nu er

$$\begin{aligned}
1 \neq \gcd&\Big(\sum_{i=0}^{s'-1}(-1)^i x^i, \sum_{i=0}^{t'-1}(-1)^i x^i\Big) \\
&= \gcd\Big(\sum_{i=0}^{s'-1}(-1)^i x^i - (-1)^{s'-t'} x^{s'-t'} \sum_{i=0}^{t'-1}(-1)^i x^i, \sum_{i=0}^{t'-1}(-1)^i x^i\Big) \\
&= \gcd\Big(\sum_{i=0}^{s'-t'-1}(-1)^i x^i, \sum_{i=0}^{t'-1}(-1)^i x^i\Big).
\end{aligned}$$

Dermed er t' og $s'-t'$ endnu et par af indbyrdes primiske positive heltal for hvilke det ikke er sandt, nu med sum s' i modstrid med minimaliteten af $s'+t'$. Dette viser lemmaet.

Opgave 2.14.10. Først viser vi første del af sætningen:

$$\gcd(a^m+1,a^n+1)=\begin{cases} a^d+1 & \text{hvis både } n' \text{ og } m' \text{ er ulige,} \\ 2 & \text{hvis enten } n' \text{ eller } m' \text{ er lige, og } a \text{ er ulige,} \\ 1 & \text{hvis enten } n' \text{ eller } m' \text{ er lige, og } a \text{ er lige.} \end{cases}$$

Antag at både n' og m' er ulige. Da er

$$\begin{aligned} a^n+1 &= (a^d+1)((a^d)^{n'-1}-(a^d)^{n'-2}+\cdots-a^d+1), \\ a^m+1 &= (a^d+1)((a^d)^{m'-1}-(a^d)^{m'-2}+\cdots-a^d+1). \end{aligned}$$

Ifølge lemma 2.14.2 ved vi nu at

$$\gcd\left(\frac{(a^d)^{n'}+1}{a^d+1},\frac{(a^d)^{m'}+1}{a^d+1}\right)=1,$$

og altså at $\gcd(a^n+1,a^m+1)=a^d+1$.

Antag nu at enten n' eller m' er lige, og lad det uden tab af generalitet være m'. Da

$$\begin{aligned} (a^d)^{n'} &= a^n \equiv -1 \pmod{\gcd(a^n+1,a^m+1)} \text{ og} \\ (a^d)^{m'} &= a^m \equiv -1 \pmod{\gcd(a^n+1,a^m+1)}, \end{aligned}$$

er

$$\begin{aligned} a^{dn'm'} &= ((a^d)^{n'})^{m'} \equiv (-1)^{m'} = 1 \pmod{\gcd(a^n+1,a^m+1)}, \\ a^{dn'm'} &= ((a^d)^{m'})^{n'} \equiv (-1)^{n'} = -1 \pmod{\gcd(a^n+1,a^m+1)}. \end{aligned}$$

Dermed er $\gcd(a^n+1,a^m+1)$ lig med 1 eller 2, og det er nemt at se at $\gcd(a^n+1,a^m+1)=1$ når a er lige, og $\gcd(a^n+1,a^m+1)=2$ når a er ulige.

Nu viser vi det vi mangler af anden del af sætningen, nemlig at

$$\gcd(a^m-1,a^n+1)=a^d+1 \text{ hvis } m' \text{ er lige.}$$

Antag at m' er lige, og sæt $m'=2^k u$, hvor u er ulige. Da er

$$\begin{aligned} a^m-1 &= (a^{du})^{2^k}-1 \\ &= (a^{du}-1)(a^{du}+1)((a^{du})^2+1)((a^{du})^{2^2}+1)\cdots((a^{du})^{2^{k-1}}+1) \end{aligned}$$

ifølge sætning 2.7.1. Vi ved fra første del af sætning 2.14.1 at når $j \geq 1$ er $\gcd(a^{dn'}+1,a^{du2^j}+1)$ lig med 1 eller 2 afhængig af om a er lige eller ulige, og desuden at $\gcd(a^{dn'}+1,a^{du}+1)=a^d+1$ da $\gcd(n',u)=1$ og både n' og u er ulige. Den del af sætningen vi allerede har vist, giver at $\gcd(a^{dn'}+1,a^{du}-1)=\gcd((a^d)^{n'}+1,(a^d)^u-1)$ er 1 eller 2 afhængig af om a er lige eller ulige. Da

$$a^n+1=(a^d+1)((a^d)^{n'-1}-(a^d)^{n'-2}+\cdots+1),$$

hvor sidste faktor er ulige uanset pariteten af a, kan vi samlet konkludere at $\gcd(a^m-1,a^n+1)=a^d+1$.

Opgave 2.14.11. Det følger af sætning 2.14.1 at

$$\gcd(f_n,f_m)=\gcd(2^{2^n}+1,2^{2^m}+1)=1$$

når $n \neq m$.

Opgave 2.14.12. Det følger af sætning 2.14.1 at

$$\gcd(f_n,2^{f_n}-2)=\gcd(2^{2^n}+1,2^{2^{2^n}+1}-2)=\gcd(2^{2^n}+1,2^{2^{2^n}}-1)=2^{2^n}+1=f_n.$$

Opgave 2.15.1. Sæt $v_p(a)=k$ og $v_p(b)=m$, og antag uden tab af generalitet at $k \geq m$. Dermed er $a=p^k u$ og $b=p^m v$, hvor u og v er hele tal som er primiske med p. Da u og v er primiske med p, ved vi også at $\gcd(u,v)$ og $\operatorname{lcm}(u,v)$ er primiske med p.

1) Da $ab=p^{k+m}uv$, er $v_p(ab)=k+m=v_p(a)+v_p(b)$.

2) Da

$$\gcd(a,b)=\gcd(p^k u,p^m v)=p^m\cdot\gcd(u,v)$$

fordi $k \geq m$, er

$$v_p\big(\gcd(a,b)\big)=m=\min\big(v_p(a),v_p(b)\big).$$

3) Da

$$\operatorname{lcm}(a,b)=\operatorname{lcm}(p^k u, p^m v)=p^k\cdot\operatorname{lcm}(u,v)$$

fordi $k\geq m$, er

$$v_p(\operatorname{lcm}(a,b))=k=\max\bigl(v_p(a),v_p(b)\bigr).$$

4) Da $a+b=p^m(u+p^{k-m}v)$, er

$$v_p(a+b)\geq m=\min\bigl(v_p(a),v_p(b)\bigr).$$

5) Hvis $v_p(a)>v_p(b)$, dvs. $k>m$, er $a+b=p^m(u+p^{k-m}v)$, hvor $u+p^{k-m}v$ ikke er delelig med p, og dermed er $v_p(a+b)=m=v_p(b)$.

Opgave 2.15.2. Antag for modstrid at b ikke er en n'te potens af et heltal. Da findes en primdivisor p i b så n ikke går op i $v_p(b)$. Dermed ved vi at $v_p(b)\neq v_p(a_k^n)$ for ethvert a_k, og ifølge sætning 2.15.1, 5), betyder det at

$$v_p(b-a_k^n)=\min\bigl(v_p(b),v_p(a_k^n)\bigr)\leq v_p(b).$$

Hvis vi vælger et k med $v_p(k)>v_p(b)$, betyder det at k ikke går op i $b-a_k^n$, hvilket er en modstrid. Dermed må $b=A^n$ for et helt tal A.

Opgave 2.15.3. Vi skal bestemme alle n hvor $v_2(n!)\geq n-1$. Ifølge sætning 2.15.2 er det netop de n hvor

$$n-1\leq v_2(n!)=n-s_2(n),$$

dvs. alle n hvor $1\geq s_2(n)$. Dette er tilfældet netop når n er en potens af 2, dvs. 2^{n-1} går op i $n!$ netop når n er en potens af 2.

Opgave 2.15.4. Først viser vi 2). Lad p være et primtal, og lad a og b være to hele tal som er primiske med p. Antag yderligere at $p\mid a+b$, og at n er ulige. Ifølge LTE (sætning 2.15.3), 1), er

$$v_p(a^n+b^n)=v_p\left(a^n-(-b)^n\right)=v_p\left(a-(-b)\right)+v_p(n)=v_p(a+b)+v_p(n).$$

Nu viser vi 3). Antag at a og b er ulige, og at n er ulige. Fra sætning 2.15.1 ved vi at

$$v_2(a^n-b^n)=v_2(a-b)+v_2\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\right)=v_2(a-b)$$

da $a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}$ er ulige fordi a, b og n er ulige.

Nu viser vi 4) ved induktion efter $v_2(n)$. Antag først at $v_2(n)=1$, dvs. at $n=2n'$, hvor n' er ulige. Ved at benytte LTE (sætning 2.15.3), 3), fås

$$\begin{aligned}v_2(a^n-b^n)&=v_2\left((a^2)^{n'}-(b^2)^{n'}\right)=v_2(a^2-b^2)\\&=v_2(a-b)+v_2(a+b)=v_2(a-b)+v_2(a+b)+v_2(n)-1.\end{aligned}$$

Antag nu at 4) er sand for positive hele tal n med $v_2(n)=N$ for et positivt heltal N. Betragt n hvor $v_2(n)=N+1$, og sæt $n=2^{N+1}n'$. Nu er

$$\begin{aligned}v_2(a^n-b^n)&=v_2\left(\left(a^2\right)^{2^N n'}-\left(b^2\right)^{2^N n'}\right)\\&=v_2(a^2-b^2)+v_2(a^2+b^2)+v_2(2^N n')-1\\&=v_2(a-b)+v_2(a+b)+1+N-1\\&=v_2(a-b)+v_2(a+b)+v_2(n)-1,\end{aligned}$$

da a^2+b^2 er delelig med 2, men ikke med 4. Hermed er induktionen fuldført.

Opgave 2.15.5. Ved at sætte $a=-1$ ses at n må være lige. Lad $n=2m$ for et helt tal m. Ifølge LTE (sætning 2.15.3), 3), har vi

$$v_2(a^n-1)=v_2(a-1)+v_2(a+1)+v_2(n)-1=v_2(a^2-1)+v_2(m),$$

dvs. vi skal bestemme alle positive heltal n så $v_2(a^2-1)+v_2(m)\geq 2017$ for alle ulige tal a. Når $a=3$, må $v_2(m)\geq 2014$, og det er også en tilstrækkelig betingelse da $v_2(a^2-1)=v_2(a-1)+v_2(a+1)\geq 3$. Dermed er svaret alle positive n med $v_2(n)\geq 2015$, dvs. alle tal på formen $n=2^{2015}\cdot n'$, hvor n' er et positivt heltal.

Opgave 2.15.6. Antag at p er et primtal, $p>2025$, og at $v_p(a+b)=1$ og $v_p(a^{2025}+b^{2025})>1$. Først ser vi på tilfældet hvor a og b er primiske med p. Ifølge LTE (sætning 2.15.3), 2), er

$$v_p(a^{2025}+b^{2025})=v_p(a+b)+v_p(2025)=1,$$

hvilket er umuligt. Altså må p gå op i enten a eller b, og dermed i dem begge, dvs. $v_p(a^{2025}+b^{2025})\geq 2025$.

Opgave 2.15.7. Tallet n må være ordenen af 2025 modulo 2^{1000}. Da $\gcd(2025, 2^{1000}) = 1$, findes ordenen af 2025 modulo 2^{1000}, og den er divisor i $\phi(2^{1000}) = 2^{999}$. Altså er n en potens af 2. Sæt $n = 2^m$. Ifølge LTE (sætning 2.15.3), 4), er

$$\begin{aligned}v_2(2025^{2^m} - 1) &= v_2(2025^{2^m} - 1^{2^m}) = v_2(2025 - 1) + v_2(2025 + 1) + v_2(2^m) - 1 \\ &= v_2(2024) + v_2(2026) + m - 1 = v_2(2^3 \cdot 253) + 1 + m - 1 = 3 + m.\end{aligned}$$

Det mindste positive heltal n så 2^{1000} går op i $2025^n - 1$ er altså $n = 2^{997}$.

Opgave 2.15.8. Det er oplagt at $n = 1$ er en løsning. Antag derfor at $n > 1$, og at n^2 går op i $2^n + 1$. Lad p være den mindste primdivisor i n, og bemærk at p er ulige da p går op i $2^n + 1$. Vi ved at $2^n \equiv -1 \pmod p$, hvilket viser at $2^{2n} \equiv 1 \pmod p$, og altså at $\operatorname{ord}_p(2)$ er divisor i $\gcd(2n, p-1)$. Fordi p er mindste primdivisor i n, må $\gcd(n, p-1) = 1$, dvs. $\operatorname{ord}_p(2) \le 2$. Dermed er $2^2 \equiv 1 \pmod p$, og vi kan slutte at $p = 3$. Sæt $v_3(n) = k$. Af LTE (sætning 2.15.3), 2), fås

$$v_3(2^n + 1) = v_3(2 + 1) + v_3(n) = 1 + k.$$

Da n^2 går op i $2^n + 1$, er $2k = v_3(n^2) \le 1 + k$, dvs. $k = 1$. Ved indsættelse ses at $n = 3$ er en løsning. Sæt nu $n = 3n'$, hvor n' er et helt tal større end 1 som er primisk med 3. Lad q være mindste primdivisor i n'. Vi ved at $q > 3$, og at $2^{3n'} \equiv -1 \pmod q$, dvs. specielt at $8^{2n'} \equiv 1 \pmod q$. Det betyder at $\operatorname{ord}_q(8)$ er divisor i $\gcd(2n', q-1)$, og da q er mindste primdivisor i n', må $\operatorname{ord}_q(8) \le 2$. Altså ved vi at q går op i $8^2 - 1 = 63$, dvs. $q = 7$. Men $2^n + 1 = (2^3)^{n'} + 1 \equiv 2 \pmod 7$, hvilket er en modstrid. Dermed er $n = 1$ og $n = 3$ de eneste løsninger.

Opgave 2.15.9. I stedet for kun at vise at der findes et positivt heltal n med præcis $N = 2000$ forskellige primdivisorer, så n går op i n^2+1, viser vi følgende mere generelle udsagn, som også dækker $N = 2000$: For ethvert positivt heltal N findes et positivt ulige tal n med præcis N forskellige primdivisorer som opfylder at n går op i $2^n + 1$. Dette viser vi ved induktion efter N.

For $N = 1$ har $n = 3$ den ønskede egenskab. Lad nu n være et positivt ulige tal med præcis N forskellige primdivisorer som opfylder at n går op i $2^n + 1$. Lad yderligere p være en fast primfaktor i $2^n + 1$. For ethvert positivt heltal k gælder ifølge LTE (sætning 2.15.3), 2), at $v_p(2^{np^k} + 1) = v_p(2^n + 1) + k$, og for enhver primfaktor q i $2^n + 1$, $q \neq p$, følger det af LTE (sætning 2.15.3), 2), at $v_q(2^{np^k} + 1) = v_q(2^n + 1)$. Dermed må $2^{np^k} + 1 = p^k(2^n + 1)u$ hvor u er primisk med $2^n + 1$. Hvis vi vælger k tilstrækkelig stor, må $u > 1$, hvilket betyder at $2^{np^k} + 1$ har en primfaktor p_0 som ikke går op i $2^n + 1$ og dermed heller ikke i n.

Sæt $m = p_0 n p^k$. Nu har m i alt $N + 1$ forskellige ulige primfaktorer. For enhver primfaktor q i 2^n+1, dvs. specielt alle primfaktorer i n, giver LTE (sætning 2.15.3), 2), at

$$v_q(2^m + 1) = v_q(2^n + 1) + v_q(p^k p_0) \ge v_q(n) + v_q(p^k p_0) = v_q(m).$$

Og for p_0 giver LTE (sætning 2.15.3), 2), at

$$v_{p_0}(2^m + 1) = v_{p_0}(2^{np^k} + 1) + 1 \ge 1 = v_{p_0}(m).$$

Dermed må $v_q(2^m+1) \ge v_q(m)$ for enhver primdivisor q i m, dvs. m må gå op i $2^m + 1$. Dette afslutter induktionen.

Opgave 2.16.1. Antag at $a^2 + b^2 = n$, og lad $n = p_1 p_2 \dots p_s$. Da er $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p_i}$ for alle $i = 1, 2, \dots, s$. Ifølge sætning 2.16.1 må p_i gå op i både a og b, dvs. at n går op i a og b hvilket er en modstrid.

Opgave 2.16.2. Antag at $n^2 + 3 = m^3$. Hvis man betragter ligningen modulo 8, ser man ved at gennemgå de mulige restklasser for n og m at n må være lige samt at m har rest 3 modulo 4. Ifølge antagelsen er

$$n^2 + 2^2 = m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1).$$

Desuden er $m^2 - m + 1 \equiv 3^2 - 3 + 1 \equiv 3 \pmod 4$, dvs. at der findes en primfaktor p i $m^2 - m + 1$ som har rest 3 modulo 4. Dermed er $n^2 + 2^2 \equiv 0 \pmod p$, og ifølge sætning 2.16.1 må p gå op i 2. Dette er en modstrid, og dermed er antagelsen forkert.

Opgave 2.16.3. Fra korollar 2.16.2 ved vi at primtal på formen $p = 4n + 3$ ikke kan skrives som sum af to kvadrattal. Vi mangler derfor blot at vise at primtal på formen $p = 4n + 1$ altid kan skrives som sum af to kvadrattal.

Lad $p = 4n + 1$. Vi ved at der findes et helt tal z så $z^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$. Da $\gcd(z, p) = 1$, findes ifølge Thues sætning hele tal x og y, hvor $0 < x < \sqrt{p}$ og $0 < y < \sqrt{p}$, så

$$zy \equiv x \pmod p \quad \text{eller} \quad zy \equiv -x \pmod p.$$

Da $z^2+1 \equiv 0 \pmod p$, må $(yz)^2+y^2 \equiv 0 \pmod p$, og dermed

$$x^2+y^2 \equiv 0 \pmod p.$$

Da $0 < x^2+y^2 < 2p$, må $x^2+y^2 = p$.

Opgave 2.16.4. Bemærk først at alle kvadrattal kan skrives som sum af to kvadrater da 0 er et kvadrattal. Hvis to tal kan skrives som sum af to kvadrattal, da kan deres produkt også ifølge opgave 2.2.6. Tallet 2, alle primtal på formen $4m+1$ samt alle kvadrater kan skrives som sum af to kvadrater, og dermed kan alle positive heltal, hvor primtal på formen $4n+3$ indgår i en lige potens i primfaktoropløsningen, også skrives som sum af to kvadrater.

Antag at $n = a^2+b^2$, og at primfaktoropløsningen for n indeholder et primtal q på formen $4n+3$. Da q går op i en sum af to kvadrater, vil q ifølge sætning 2.16.1 gå op i både a og b. Dermed vil q^2 gå op i $a^2+b^2 = n$. Vi reducerer nu n, a^2 og b^2 med q^2 og får $a_1^2+b_1^2 = n_1$. Hvis n_1 er delelig med q, kan vi gentage proceduren en gang til og se at q^2 vil gå op i n_1. På denne måde indses at q indgår i primfaktoropløsningen for n i en lige potens.

Opgave 2.17.1. Blandt tre på hinanden følgende ulige tal vil det ene være deleligt med 3, og da de alle tre skal være primtal, må det ene primtal i et sæt trillingeprimtal være 3. Dermed er der kun et sæt trillingeprimtal, og det er 3, 5 og 7.

Opgave 2.17.2. For $n=1$ er $\binom{2n}{n} = 2$ ikke er et kvadrattal. For $n>1$ findes ifølge Bertrands postulat et primtal p så $n<p<2n$. Da

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+1)}{n!},$$

må p gå op netop én gang i tælleren, men ikke i nævneren. Binomialkoefficienten $\binom{2n}{n}$ er derfor delelig med p, men ikke med p^2, hvilket viser at $\binom{2n}{n}$ ikke kan være et kvadrattal.

Opgave 2.17.3. Vi viser det ved stærk induktion efter n. Det er oplagt sandt for $n = 1,2,3$ da $1+2=3$, $3+4=7$ og $5+6=11$. Antag at $N>3$, og at påstanden er sand for alle $n<N$. Ifølge Bertrands postulat findes et primtal p, $2N < p < 4N-2$, dvs. $p = 2N+r$, hvor $0<r<2N-2$. Desuden må r være ulige da p er ulige. Dermed kan tallene $r, r+1, \dots, 2N$ parres så parrenes sum er p:

$$p = (2N)+(r) = (2N-1)+(r+1) = \cdots = \frac{2N+r+1}{2} + \frac{2N+r-1}{2}.$$

Ifølge induktionsantagelsen ved vi yderligere at tallene $1,2,3,\dots,r-1$ kan parres så parrenes sum er primtal. Dette afslutter induktionen.

Opgave 2.17.4. Primtal på formen $4n+3$: Antag at der kun findes endeligt mange primtal på formen $4n+3$, og kald disse $p_1, p_2, \dots, p_r$, hvor $p_1 = 3$. Betragt tallet

$$N = 4p_2p_3p_4\cdots p_r + 3.$$

Primtallet $p_1 = 3$ kan ikke være divisor i N da det ikke går op i $4p_2p_3p_4\cdots p_r$. Primtallene $p_2, p_3, \dots, p_r$ kan heller ikke være divisorer i N da de går op i $4p_2p_3p_4\cdots p_r$, men ikke i 3. Da $N \equiv 3 \pmod 4$, kan N ikke kun have primfaktorer på formen $4n+1$, og N har derfor en primfaktor på formen $q = 4n+3$, men dette er en modstrid.

Primtal på formen $6n+5$: Bemærk først at alle primtal på nær 2 og 3 er på formen $6n+1$ eller $6n+5$. Antag at der kun findes endeligt mange primtal på formen $6n+5$, og kald disse $p_1, p_2, \dots, p_r$, hvor $p_1 = 5$. Betragt tallet

$$N = 6p_2p_3p_4\cdots p_r + 5.$$

Primtallet 5 kan ikke være divisor i N, da 5 ikke går op i $6p_2p_3p_4\cdots p_r$. Primtallene $p_2, p_3, \dots, p_r$ kan heller ikke være divisorer i N da de går op i $6p_2p_3p_4\cdots p_r$, men ikke i 5. Da $N \equiv 5 \pmod 6$, kan N ikke kun have primfaktorer på formen $6n+1$, og N har derfor en primfaktor på formen $q = 6n+5$, men dette er en modstrid.

Primtal på formen $2^k n+1$, hvor $k \geq 1$: Antag at der kun findes endeligt mange primtal på formen $2^k n+1$, og kald disse $p_1, p_2, \dots, p_r$. Betragt tallet

$$N = (2p_1p_2p_3\cdots p_r)^{2^{k-1}} + 1,$$

og lad q være en primfaktor i N. Sæt $x = 2p_1p_2\cdots p_r$. Da $x^{2^{k-1}} \equiv -1 \pmod q$, er $x^{2^k} \equiv 1 \pmod q$, og dermed må $\mathrm{ord}_q(x) = 2^k$. Dette betyder at 2^k går op i $\phi(q) = q-1$, og altså er q på formen $2^k n+1$. Dette er i modstrid med at ingen af primtallene $p_1, p_2, \dots, p_r$ går op i N. Altså findes der uendeligt mange primtal på formen $2^k n+1$.

Opgave 2.18.1. Da $i^2 \equiv (p-i)^2 \pmod p$ og $1^2, 2^2, \dots, (\frac{p-1}{2})^2$ er $\frac{p-1}{2}$ forskellige kvadratiske rester (det sidste skyldes at $a^2 \equiv b^2 \pmod p$ medfører at p går op i $(a+b)(a-b)$), er netop halvdelen af tallene $1, 2, 3, \dots, p-1$ kvadratiske rester modulo p. Dette giver det ønskede.

Opgave 2.18.2. Hvis $p \equiv 3 \pmod 4$, er

$$\begin{aligned} 2^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! &\equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdots(p-1) \\ &\equiv 2\cdot 4\cdot 6\cdots\left(\frac{p-3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{p-1}{2}\right)\cdots(-5)\cdot(-3)\cdot(-1) \\ &\equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}}\left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod p) \end{aligned}$$

Ifølge Eulers kriterium gælder nu at

$$\left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p+1}{4}} \pmod p.$$

Dermed er $\left(\frac{2}{p}\right) = 1$ når $p \equiv 7 \pmod 8$, og $\left(\frac{2}{p}\right) = -1$ når $p \equiv 3 \pmod 8$.

Opgave 2.18.3. Antag at a er kvadratisk rest modulo b. Da findes et x så $x^2 \equiv a \pmod b$, og dermed også $x^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. Altså er a også kvadratisk rest modulo $p_i^{\alpha_i}$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$.

Antag omvendt at a er kvadratisk rest modulo $p_i^{\alpha_i}$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$, dvs. at der findes et x_i så $x_i^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. Ifølge den kinesiske restklassesætning findes en løsning x til kongruenssystemet

$$x \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \text{ for alle } i = 1, 2, \dots n.$$

Dermed er $x^2 \equiv x_i^2 \equiv a \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$, og altså $x^2 \equiv a \pmod b$.

Opgave 2.18.4. Lad $n = 2m+1$ og p en primdivisor i $2^n - 1$. Da er $2^{2m+1} \equiv 1 \pmod p$, og altså $2 \equiv \left((2^{-1})^m\right)^2 \pmod p$. Dette viser at 2 er kvadratisk rest modulo p, og altså at $p \equiv \pm 1 \pmod 8$ ifølge korollar 2.18.3.

Opgave 2.18.5. Hvis p er primdivisor i $x^2 + 2y^2$, er $x^2 + 2y^2 \equiv 0 \pmod p$. Da vi ved at x og y er indbyrdes primiske, må de begge være primiske med p, og dermed har y en multiplikativ invers y^{-1} modulo p. Altså er $(y^{-1}x)^2 \equiv -2 \pmod p$, hvilket viser at -2 er kvadratisk rest modulo p. Ifølge korollar 2.18.2 er

$$1 = \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\cdot\left(\frac{2}{p}\right).$$

Derfor giver korollar 2.18.3 at $p \equiv 1$ eller $p \equiv 3$ modulo 8.

Opgave 2.18.6. Antag at p er et primtal, $p \equiv 3 \pmod 4$, samt at $2p+1$ er divisor i $M_p = 2^p - 1$. Da $2^p \equiv 1 \pmod{2p+1}$, og p er et primtal, er p ordenen af 2 modulo $2p+1$. Ifølge Euler-Fermat er p da divisor i $\phi(2p+1)$. Vi ved yderligere at $\phi(2p+1) \le 2p$, dvs. $\phi(2p+1) = p$ eller $\phi(2p+1) = 2p$. Ifølge formlen for Eulers phi-funktion, er $\phi(n)$ kun et primtal hvis både n og $n-1$ er primtal, så vi kan udelukke $\phi(2p+1) = p$. Dermed må $\phi(2p+1) = 2p$, hvilket ifølge formlen for Eulers phi-funktion giver at $2p+1$ er et primtal.

Antag omvendt at p er et primtal, $p \equiv 3 \pmod 4$ samt at $q = 2p+1$ er et primtal. Da $q \equiv 7 \pmod 8$, kan vi ifølge Eulers kriterium og korollar 2.18.3 slutte at

$$2^{\frac{q-1}{2}} \equiv \left(\frac{2}{q}\right) = 1 \pmod q,$$

og altså at primtallet $q = 2p+1$ går op i $2^{\frac{q-1}{2}} - 1 = 2^p - 1 = M_p$.

Opgave 2.18.7. For Sophie Germain-primtallene $p = 23$ og $p = 83$ viser kriteriet fra opgave 2.18.6 at $2p+1$ er divisor i M_p, og dermed at M_p ikke er et primtal.

Opgave 2.18.8. Hvis $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, da er 2 kvadratisk rest modulo p ifølge korollar 2.18.3. Dermed findes et x så $2 \equiv x^2 \pmod p$ og altså $16 = 2^4 \equiv x^8 \pmod p$.

Hvis $p \equiv 3 \pmod 8$, da er -2 kvadratisk rest modulo p ifølge korollar 2.18.3 og korollar 2.18.2. Dermed findes et x så $-2 \equiv x^2 \pmod p$ og altså $16 = (-2)^4 \equiv x^8 \pmod p$.

Hvis $p \equiv 5 \pmod 8$, da er $p = 8n+5$. Ifølge Fermats lille sætning er $2^{8n+4} \equiv 1 \pmod p$, og dermed $16 = 2^4 \equiv \left((2^{-1})^n\right)^8 \pmod p$, hvor 2^{-1} er den multiplikative inverse til 2 modulo p.

Opgave 2.18.9. Antag at p er primfaktor i $f_n = 2^{2^n}+1$. Da er $2^{2^n} \equiv -1 \pmod p$ og $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod p$. Dette viser at ordenen af 2 modulo p er divisor i 2^{n+1}, men ikke i 2^n, dvs. ordenen er 2^{n+1}. Dermed er 2^{n+1} divisor i $p-1$, og altså $p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$. Specielt er $p \equiv 1 \pmod 8$, dvs. 2 er kvadratisk rest modulo p. Ifølge Eulers kriterium har vi dermed at

$$1 = \left(\frac{2}{p}\right) \equiv 2^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Dette viser at 2^{n+1}, som er ordenen af 2 modulo p, går op i $\frac{p-1}{2}$, og altså at 2^{n+2} går op i $p-1$.

Opgave 2.18.10. Antag at x og y er indbyrdes primiske, og at p er en primdivisor i $N = ax^2+bxy+cy^2$, hvor p ikke går op i abc. Da x og y er indbyrdes primiske, går p ikke op i nogen af dem da p går op i begge to eller ingen af dem fordi $\gcd(p, abc) = 1$. Sæt $D = b^2-4ac$. Da er

$$0 \equiv 4aN = (2ax+by)^2 - Dy^2 \pmod p.$$

Da p ikke går op i y, har y en invers y^{-1} modulo p. Dermed er

$$D \equiv (y^{-1}(2ax+by))^2 \pmod p,$$

og D er altså kvadratisk rest modulo p.

Opgave 2.18.11. Ifølge den kvadratiske reciprocitetssætning og korollar 2.18.2 og 2.18.3 er

$$\left(\frac{37}{2003}\right) = \left(\frac{2003}{37}\right) = \left(\frac{5}{37}\right) = \left(\frac{37}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right) = -1.$$

$$\left(\frac{143}{2003}\right) = \left(\frac{11}{2003}\right)\left(\frac{13}{2003}\right) = -\left(\frac{2003}{11}\right)\left(\frac{2003}{13}\right) = -\left(\frac{1}{11}\right)\left(\frac{1}{13}\right) = -1.$$

Altså er hverken 37 eller 143 kvadratiske rester modulo 2003.

Opgave 2.18.12. Den eneste primiske kvadratiske rest modulo 3 er 1, og de primiske kvadratiske rester modulo 5 er 1 og 4. Ifølge den kvadratiske reciprocitetssætning har vi derfor at

$$\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = \begin{cases} 1\cdot 1 = 1 & \text{hvis } p \equiv 1 \pmod{12} \\ -1\cdot(-1) = 1 & \text{hvis } p \equiv -1 \pmod{12} \\ 1\cdot(-1) = -1 & \text{hvis } p \equiv 5 \pmod{12} \\ -1\cdot 1 = -1 & \text{hvis } p \equiv -5 \pmod{12} \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } p \equiv \pm 1 \pmod 5 \\ -1 & \text{hvis } p \equiv \pm 2 \pmod 5 \end{cases}$$

Opgave 2.18.13. Antag at (x, y) opfylder ligningen. Da er $11x^2 \equiv 7 \pmod{151}$, hvilket er ækvivalent med at $(11x)^2 \equiv 7\cdot 11 \pmod{151}$. Nu undersøger vi om $7\cdot 11$ er kvadratisk rest modulo 151, som er et primtal. Ifølge den kvadratiske reciprocitetssætning og korollar 2.18.2 og 2.18.3 er

$$\left(\frac{7\cdot 11}{151}\right) = \left(\frac{7}{151}\right)\left(\frac{11}{151}\right) = \left(\frac{151}{7}\right)\left(\frac{151}{11}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{8}{11}\right) = 1\cdot\left(\frac{2}{11}\right)\left(\frac{4}{11}\right) = -1.$$

Da $7\cdot 11$ ikke er kvadratisk rest modulo 151, har vi opnået en modstrid og dermed vist at ligningen ikke har nogen løsninger.

Opgave 2.18.14. Antag at $a^2 - ab + b^2 = c^2$, og lad p være en primdivisor i c. Ifølge sætning 2.18.5 er $D = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = -3$ dermed kvadratisk rest modulo p. Altså er

$$1 = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right).$$

Ifølge korollar 2.18.3 og opgave 2.18.12 viser dette at $p \equiv 1 \pmod 6$.

Opgave 2.18.15. Antag at $p = 2^n+1$, $n > 1$, er et primtal. Da p er et primtal, må n være lige, for hvis n er ulige, er p delelig med 3. Dermed er $p = 4^m + 1 \equiv 2 \pmod 3$ og altså ikke kvadratisk rest modulo 3. Ifølge den kvadratiske reciprocitetssætning og Eulers kriterium er

$$-1 = \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right) \equiv 3^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Altså går p op i $3^{\frac{p-1}{2}}+1$.

Opgave 2.18.16. Bemærk først at $2007=3^2\cdot 223$. Lad k være et positivt heltal, og antag at der findes et heltal a så

$$k^3+3k^2a+3ka^2=(k+a)^3-a^3\equiv 0 \pmod{3^2\cdot 223} \quad \dagger$$

Hvis vi regner modulo 3, ses at $k\equiv 0 \pmod 3$. Sæt $k=3m$. Da er † ensbetydende med

$$3^2m(3m^2+3ma+a^2)\equiv 0 \pmod{3^2\cdot 223}$$

Hvis 223 går op i m, er ligningen sand for alle a. Antag derfor at 223 ikke går op i m, og lad m^{-1} være den inverse til m modulo 223. Da er † ensbetydende med at

$$\begin{aligned}3m^2+3ma+a^2&\equiv 0 \pmod{223}\Leftrightarrow\\ 3+3am^{-1}+(am^{-1})^2&\equiv 0 \pmod{223}\Leftrightarrow\\ 3-220am^{-1}+(am^{-1})^2&\equiv 0 \pmod{223}\Leftrightarrow\\ (am^{-1}-110)^2-55&\equiv 0 \pmod{223}\end{aligned}$$

Ifølge den kvadratiske reciprocitetssætning er

$$\begin{aligned}\left(\frac{55}{223}\right)&=\left(\frac{5}{223}\right)\left(\frac{11}{223}\right)=\left(\frac{223}{5}\right)\left(-\left(\frac{223}{11}\right)\right)\\ &=-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{11}\right)=-\left(\frac{11}{3}\right)=-\left(\frac{2}{3}\right)=1.\end{aligned}$$

Dermed findes altså et helt tal x så $x^2\equiv 55 \pmod{223}$. Når $am^{-1}-110\equiv x \pmod{223}$, hvilket er ensbetydende med at $a\equiv(x+110)m \pmod{223}$, er † opfyldt. Hvis 3 går op i k, findes derfor et heltal a så $(k+a)^3-a^3\equiv 0 \pmod{2007}$.

Opgave 2.18.17. Antag at a er et positivt heltal som ikke er et kvadrattal, og a er kvadratisk rest modulo alle primtal. Lad m være det største hele tal så m^2 går op i a, og sæt $a=m^2b$. Da er b kvadratfrit. Da a er kvadratisk rest modulo alle primtal, er b pr. konstruktion også kvadratisk rest modulo alle primtal. Antag først at $b=2$. Da er b ikke kvadratisk rest modulo $p=5$, modstrid. Dermed er $b>2$.

Hvis b er lige, sættes $b=2b'$, og hvis b er ulige, sættes $b=b'$. Bemærk at b' også er kvadratfri, og primfaktoropløsningen af b' derfor kan skrives som

$$b'=p_1p_2\cdots p_n,$$

hvor p_i'erne er forskellige ulige primtal.

Lad c være et helt tal så $\left(\frac{c}{p_n}\right)=-1$. Vi ønsker at finde et primtal der opfylder at

$$\begin{aligned}p&\equiv 1 \pmod 8\\ p&\equiv 1 \pmod{p_i},\ i=1,\dots,n-1\\ p&\equiv c \pmod{p_n}.\end{aligned}$$

Ifølge den kinesiske restklassesætning udgør samtlige løsninger til kongruenssystemet netop en restklasse modulo $8b'$. Da denne restklasse er primisk med $8b'$, findes ifølge Dirichlets sætning et primtal blandt repræsentanterne for restklassen. Derfor et det muligt at vælge et primtal p der opfylder kongruenssystemet. Da 2 er kvadratisk rest modulo p fordi $p\equiv 1 \pmod 8$, er

$$\left(\frac{b}{p}\right)=\left(\frac{b'}{p}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{p}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p}{p_i}\right)=\left(\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{p_i}\right)\right)\cdot\left(\frac{c}{p_n}\right)=-1$$

hvilket er en modstrid.

Opgave 2.18.18 For $n=3$ og $n=4$ ved vi at f_n er et primtal, og vi kan derfor antage at $n\geq 5$. Lad nu

$$f_n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_m^{k_m}$$

være primfaktoropløsningen af f_n.

Vi ved fra opgave 2.18.9 at $p_i\equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ for alle $i=1,2,\dots,m$. Vælg $x_1,x_2,\dots,x_m$ så $p_i=2^{n+2}x_i+1$. For at vise at der findes en primdivisor i f_n som er større end $2^{n+4}(n+2)$, mangler vi nu blot at vise at der findes et i så

$$x_i\geq 2^2(n+2).$$

Først vurderer vi summen $k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ opad til. Da $p_i \geq 2^{n+2} + 1$, er

$$2^{2^n} + 1 \geq (2^{n+2} + 1)^{k_1 + k_2 + \cdots + k_m} \geq 2^{(n+2)(k_1 + k_2 + \cdots + k_m)} + 1.$$

Altså er

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m \leq \frac{2^n}{n+2}.$$

Nu vurderer vi summen $x_1 k_1 + x_2 k_2 + \cdots x_m k_m$ nedad til. Ifølge binomialformlen er

$$p_i^{k_i} = (2^{n+2} x_i + 1)^{k_i} \equiv 2^{n+2} x_i k_i + 1 \pmod{2^{2n+4}}.$$

Da $2^n > 2n + 4$ for $n \geq 5$, er $f_n \equiv 1 \pmod{2^{2n+4}}$. Dermed er

$$\begin{aligned} 0 &\equiv (2^{n+2} x_1 k_1 + 1)(2^{n+2} x_2 k_2 + 1) \cdots (2^{n+2} x_m k_m + 1) - 1 \\ &\equiv 2^{n+2} x_1 k_1 + 2^{n+2} x_2 k_2 + \cdots 2^{n+2} x_m k_m \\ &\equiv 2^{n+2}(x_1 k_1 + x_2 k_2 + \cdots x_m k_m) \pmod{2^{2n+4}}. \end{aligned}$$

Dette viser at

$$0 \equiv x_1 k_1 + x_2 k_2 + \cdots + x_m k_m \pmod{2^{n+2}}.$$

Da alle x_i'erne og k_i'erne er positive, er

$$x_1 k_1 + x_2 k_2 + \cdots + x_m k_m \geq 2^{n+2}.$$

Sæt $x_i = \max(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Da er

$$x_i (k_1 + k_2 + \cdots + k_m) \geq 2^{n+2},$$

og dermed

$$x_i \geq \frac{2^{n+2}}{k_1 + k_2 + \cdots + k_m} \geq \frac{2^{n+2}}{\frac{2^n}{n+2}} = 2^2(n+2)$$

som ønsket.

Opgave 3.1.1. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 - 9 + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-3)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 3 = \pm 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 2 \lor x = 4. \end{aligned}$$

Dermed har ligningen præcis to løsninger $x = 2$ og $x = 4$.

Opgave 3.1.2. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} 5x^2 - 6x + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 25x^2 - 30x + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (5x-3)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{3 \pm 2}{5} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{5} \lor x = 1. \end{aligned}$$

Dermed har ligningen præcis to løsninger $x = \frac{1}{5}$ og $x = 1$.

Opgave 3.1.3. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat og bruge nulreglen:

$$a^2 - a + \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

Dermed har ligningen præcis en løsning $a = \frac{1}{2}$.

Opgave 3.1.4. Ligningen løses ved at omskrive til kvadrat:

$$3x^2 + 4x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2 + 12x + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x+2)^2 = -2.$$

Dermed har ligningen ingen løsninger.

Opgave 3.1.5. Uligheden løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x > 3 \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 > 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x + 1 < -2 \lor 2 < x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x < -3 \lor 1 < x. \end{aligned}$$

Dermed er de x der opfylder uligheden, netop $x < -3$ eller $1 < x$.

Opgave 3.1.6. Uligheden løses ved at omskrive til kvadrat:

$$\begin{aligned} 3y^2+7y+2 \le 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 9y^3+21y+6 \le 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(3y+\frac{7}{2}\right)^2 \le -6+\frac{49}{4} = \frac{25}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{5}{2} \le 3y+\frac{7}{2} \le \frac{5}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \le y \le -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dermed er de y der opfylder uligheden, netop $-2 \le y \le -\frac{1}{3}$.

Opgave 3.1.7. Uligheden bevises ved at omskrive til kvadrat:

$$a^2+1 \ge 2a \quad \Leftrightarrow \quad (a-1)^2 \ge 0.$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle reelle tal a.

Opgave 3.1.8. Bemærk at x er positiv, og vi derfor kan gange med x på begge sider af ulighedstegnet. Uligheden bevises derefter ved at omskrive til kvadrat:

$$x+\frac{1}{x} \ge 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \ge 0.$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle positive reelle tal x.

Opgave 3.1.9. Uligheden bevises ved at omskrive til kvadrat:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2 \ge 2\sqrt{a}\sqrt{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0.$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle positive reelle tal a og b.

Opgave 3.1.10. Antag at $x+y=1$, og at x og y begge er positive. Ved at udnytte at $(x+y)^2 = x+y$ fordi $x+y=1$, fås:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{y+x}{xy} \ge 4 \\ &\Leftrightarrow \quad x+y \ge 4xy \\ &\Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \ge 4xy \\ &\Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, er uligheden sand for alle positive reelle tal x og y med sum 1.

Opgave 3.1.11. Uligheden bevises ved at omskrive til en sum af kvadrater:

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx \quad \Leftrightarrow \\ &(x^2+y^2)+(y^2+z^2)+(z^2+x^2) \ge 2xy+2yz+2zx \quad \Leftrightarrow \\ &(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, og summen af flere kvadrater dermed heller ikke er negativ, er uligheden sand for alle reelle tal x, y og z.

Opgave 3.1.12. Uligheden bevises ved at omskrive til en sum af to kvadrater:

$$\begin{aligned} 8x^2+2y^2+y+\frac{5}{8} \ge 4x \quad &\Leftrightarrow \quad 16x^2-8x+1+4y^2+2y+\frac{1}{4} \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (4x-1)^2+\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2 \ge 0. \end{aligned}$$

Da et kvadrat aldrig er negativt, og summen af to kvadrater dermed heller ikke er negativ, er uligheden sand for alle positive reelle tal x og y.

Opgave 3.1.13. Faktorisering:

$$9x^2-3x+\frac{1}{4} = \left(3x-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Opgave 3.1.14. Faktorisering:

$$2n^2+8m^2+8nm = 2(n+2m)^2.$$

Opgave 3.1.15. Faktorisering:

$$9a^2-b^2+6a+2b=(3a+b)(3a-b)+2(3a+b)=(3a+b)(3a-b+2).$$

Opgave 3.1.16. Faktorisering:

$$a^2-b^2+6a+9=(a+3)^2-b^2=(a+b+3)(a-b+3).$$

Opgave 3.1.17. Faktorisering:

$$\begin{aligned} a^2+2b^2+3ab+b-1 &= (a+b)^2-1+b^2+ab+b \\ &= (a+b+1)(a+b-1)+b(a+b+1) \\ &= (a+b+1)(a+2b-1). \end{aligned}$$

Opgave 3.1.18. Faktorisering:

$$n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2).$$

Opgave 3.2.1. Betragt andengradsligningen $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, med diskriminant $d=b^2-4ac$. Vi omskriver først ligningen:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 \quad &\Leftrightarrow \quad 4a^2x^2+4abx+4ac=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2ax+b)^2=b^2-4ac=d. \end{aligned}$$

Dette er tilladt da $a\neq 0$. Nu inddeler vi i tre tilfælde:

Hvis $d>0$, er $2ax+b=\pm\sqrt{d}$, dvs. der er to løsninger $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}$.

Hvis $d=0$, er $2ax+b=0$, dvs. der er ´n løsning $x=\dfrac{-b}{2a}$.

Hvis $d<0$, er der ingen løsninger da et kvadrat aldrig er negativt. Dette viser sætningen.

Opgave 3.2.2. Ligningen omskrives ved at gætte løsningerne $x=2$ og $x=4$:

$$x^2-6x+8=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(x-4)=0.$$

Opgave 3.2.3. Ligningen omskrives ved at gætte løsningerne $x=-5$ og $x=1$:

$$2x^2+8x-10=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x^2+4x-5x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2(x+5)(x-1)=0.$$

Opgave 3.2.4. Ligningen omskrives ved først at sætte -4 uden for en parentes og derefter gætte løsningerne $x=-1$ og $x=7$.

$$-4x^2+24x+28=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(x^2-6x-7)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -4(x-7)(x+1)=0.$$

Opgave 3.2.5. Ligningen er en skjult andengradsligning i x^2. Vi omskriver og gætter løsninger:

$$\begin{aligned} x^4-8x^2+7=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x^2)^2-8x^2+7=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x^2-1)(x^2-7)=0. \end{aligned}$$

Samtlige løsninger er altså $x=\pm 1$ og $x=\pm\sqrt{7}$.

Opgave 3.2.6. Ligningen er en skjult andengradsligning i u^5. Vi omskriver til kvadrat:

$$\begin{aligned} u^{10}+1=2u^5 \quad &\Leftrightarrow \quad (u^5)^2-2u^5+1=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (u^5-1)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \quad u^5=1. \end{aligned}$$

Eneste løsning er derfor $u=1$.

Opgave 3.2.7. Ligningen er en skjult andengradsligning i $\sqrt{x}$. Vi omskriver og gætter løsninger:

$$\begin{aligned} x-5\sqrt{x}+6=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x})^2-5\sqrt{x}+6=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)=0. \end{aligned}$$

Samtlige løsninger er altså $x=2^2=4$ og $x=3^2=9$.

Opgave 3.2.8. Ligningen er en skjult andengradsligning i a^4. Vi omskriver og gætter løsninger:

$$\begin{aligned} a^4=15+\frac{16}{a^4} \quad &\Leftrightarrow \quad (a^4)^2-15a^4-16=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (a^4-16)(a^4+1)=0. \end{aligned}$$

Da a^4 ikke kan være negativ, er samtlige løsninger $a = \pm 2$.

Opgave 3.2.9. Ligningen er en skjult andengradsligning i 2^x. Vi omskriver til kvadrat:

$$\begin{aligned} 4^x - 2\cdot 2^x + 1 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 2\cdot 2^x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (2^x - 1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Altså er $2^x = 1$, og derfor er eneste løsning $x = 0$.

Opgave 3.2.10. Kald højden på et A4-ark for y og bredden for x. Da bliver højden på et A5-ark x og bredden $\frac{y}{2}$. Da et A4-ark og et A5-ark er ligedannede, er forholdet mellem højde og bredde det samme:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\frac{y}{2}} = 2\cdot\frac{x}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2.$$

Da x og y begge er positive, er forholdet mellem højde og bredde $\frac{y}{x} = \sqrt{2}$.

Opgave 3.2.11. Lad P være et punkt på linjestykket AB så $\frac{|AB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|PB|}$. Sæt $|BP| = 1$ og $|AP| = x$. Da svarer betingelsen til

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1} \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Da linjestykkerne har positiv længde, er $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Dette svarer netop til forholdet $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{x}{1} = x$.

Opgave 3.3.1. Ved at bruge lige store koefficienters metode fås

$$(3x+4y) - 2(5x+2y) = -5 - 2\cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad -7x = -7 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Nu findes y ved at indsætte $x = 1$ i første ligning:

$$5\cdot 1 + 2y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = -4 \quad \Leftrightarrow \quad y = -2.$$

Dermed er den eneste mulige løsning $x = 1$ og $y = -2$, og ved indsættelse ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 3.3.2. Ved at bruge lige store koefficienters metode fås

$$\begin{aligned} (3x + 2y - 5z) - 3(x + 4y - 10z) &= 5 - 3\cdot 0, \\ (2x + y + 7z) - 2(x + 4y - 10z) &= -6 - 2\cdot 0, \end{aligned}$$

som reduceres til

$$\begin{aligned} -2y + 5z &= 1, \\ -7y + 27z &= -6. \end{aligned}$$

Ved endnu engang at bruge lige store koefficienters metode fås

$$7(-2y+5z) - 2(-7y+27z) = 7\cdot 1 - 2\cdot(-6) \quad \Leftrightarrow \quad -19z = 19 \quad \Leftrightarrow \quad z = -1.$$

Ved indsættelse ses at når $z = -1$, er $y = -3$ og $x = 2$. Dette er eneste løsning.

Opgave 3.3.3. Ved at dividere nederste ligning med 2 og trække de to ligninger fra hinanden fås

$$(y+2x) - (y-x) = (x^2 - 10) - (-10) \quad \Leftrightarrow \quad 3x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x(x-3)$$

dvs. $x = 0$ eller $x = 3$. Hvis $x = 0$, er $y = -10$, og hvis $x = 3$, er $y = -7$. Samtlige mulige løsninger er derfor $(x, y) = (0, -10)$ og $(x, y) = (3, -7)$, og ved indsættelse ses at de faktisk er løsninger.

Opgave 3.3.4. Ved at gange den nederste ligning med 3 og lægge de to ligninger sammen fås

$$\frac{11}{x} = 22 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Ved indsættelse ses at $y = \frac{1}{3}$. Eneste mulige løsning er altså $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, og ved indsættelse ses at den faktisk løser ligningssystemet.

Opgave 3.3.5. Af sidste ligning ses at $y = 0$ ikke er en løsning. Antag derfor at $y \neq 0$, og omskriv til

$$\begin{aligned} \frac{12y}{x^2+y} + y^2 &= 4y, \\ \frac{12y}{x^2+y} + 8y &= 20. \end{aligned}$$

Ved at trække de to ligninger fra hinanden og omskrive fås $y^2-12y+20=0$ og altså $(y-2)(y-10)=0$. Dermed er $y=2$ eller $y=10$. Hvis $y=2$, er $\frac{12}{x^2+2}+2=4$, dvs. $\frac{12}{2}=x^2+2$, og altså $x=\pm 2$. Hvis $y=10$, er $\frac{12}{x^2+10}+10=4$, og altså $\frac{12}{x^2+10}=-6$ hvilket er umuligt. Eneste mulige løsninger er derfor $(x,y)=(\pm 2,2)$, og ved indsættelse tjekkes at de begge løser ligningssystemet.

Opgave 3.3.6. Hvis $x=0$, er anden ligning opfyldt for alle y, hvor $y\neq 0$. Første ligning giver i dette tilfælde $y=1$. Dermed er $(x,y)=(0,1)$ eneste løsning hvor $x=0$. Antag derfor at $x\neq 0$, og divider anden ligning med x. Kvadrer desuden første ligning:

$$x^2+y^2+2xy=1,$$
$$\frac{1}{x^2+y^2}=2.$$

Af den nederste ligning fås at $x^2+y^2=\frac{1}{2}$. Dette indsættes i den øverste ligning, og vi får $\frac{1}{2}+2xy=1$, og altså $xy=\frac{1}{4}$. Da vi yderligere ved at $x+y=1$, giver dette $x(1-x)=\frac{1}{4}$. Dermed er $x^2-x+\frac{1}{4}=0$, og altså $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$. I dette tilfælde er $x=y=\frac{1}{2}$, og ved indsættelse ses at dette er en løsning. Samtlige løsninger er dermed $(x,y)=(0,1)$ og $(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Opgave 3.3.7. Bemærk først at ingen af de tre ubekendte kan være 0. Ved at udtrykke x ved y i første ligning, z ved y i anden ligning og derefter indsætte dette i sidste ligning fås

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{3}{y}=12 \quad\Leftrightarrow\quad y^2=\frac{1}{4} \quad\Leftrightarrow\quad y=\pm\frac{1}{2}.$$

Eneste mulige løsninger er derfor $(x,y,z)=(6,\frac{1}{2},2)$ og $(x,y,z)=(-6,-\frac{1}{2},-2)$, og ved at indsætte i ligningssystemet ses at de begge er løsninger.

Opgave 3.3.8. Ved at lægge alle tre ligninger sammen og udnytte at $x=\lfloor x\rfloor+\{x\}$ fås

$$x+y+z=3{,}3.$$

Ved at trække de oprindelige ligninger fra fås

$$\lfloor z\rfloor+\{y\}=2{,}2$$
$$\lfloor y\rfloor+\{x\}=1{,}1$$
$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=0.$$

Da $0\leq\{u\}<1$ og $\lfloor u\rfloor$ altid er et helt tal, er $x=0{,}1$, $y=1{,}2$ og $z=2$ eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at det faktisk er en løsning til ligningssystemet.

Opgave 3.4.1. At differens, produkt og kvotient af to rationale tal igen er rationale tal, følger direkte af brøkregneregler.

Opgave 3.4.2. At differensen, produktet og kvotienten af et rationalt tal $\frac{a}{b}$ og et irrationalt tal x er et irrationalt tal, ses ved at antage det modsatte og se at det medfører at x er rational. (Bemærk at vi mht. produkt og kvotient skal antage at $a\neq 0$ da vi i beviset gerne vil dividere med a).

At differensen, produktet og kvotienten af to irrationale tal både kan være rational og irrational ses af følgende eksempler:

Differens:

$$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0 \quad\text{og}\quad \sqrt{8}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}.$$

Produkt:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4 \quad\text{og}\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}.$$

Kvotient:

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=2 \quad\text{og}\quad \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}.$$

Her udnytter vi sætning 3.4.3, der giver at $\sqrt{2}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{3}$ og $\sqrt{6}$ er irrationale tal.

Opgave 3.4.3. Det er oplagt at hvis n er en m'te potens af et positivt helt tal, da er $\sqrt[m]{n}$ et helt tal og altså rational. Antag at n ikke er en m'te potens af et positivt heltal. Vi viser indirekte at $\sqrt[m]{n}$ er irrational ved at antage det modsatte og nå frem til en modstrid. Antag derfor at $\sqrt[m]{n} = \frac{a}{b}$ hvor a og b er hele tal. Dermed er

$$b^m n = a^m$$

Betragt nu primfaktoropløsningen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$. Fordi n ikke er en m'te potens af et positivt heltal, er mindst en af eksponenterne, lad os sige α_i, ikke et multiplum af m da m'te potenser netop er de hele tal hvor alle eksponenterne i primfaktoropløsningen er multipla af m. Eksponenten til p_i på venstresiden $b^m n$ er derfor ikke et multiplum af m da alle eksponenter i primfaktoropløsningen af b^m er multipla af m. Eksponenten til p_i på højresiden a^m er derimod et multiplum af m. Dette er en modstrid da primfaktoropløsning er entydig, og dermed er $\sqrt[m]{n}$ irrational.

Opgave 3.4.4. Lad a og b være to forskellige reelle tal, og antag uden tab af generalitet at $a < b$. Vi ved allerede at der ligger et rationalt tal q_1 mellem a og b. Der ligger yderligere et rationalt tal q_2 mellem q_1 og b. Sådan kan vi fortsætte og få uendeligt mange rationale tal $q_1, q_2, \ldots$ mellem a og b.

Nu viser vi at der findes uendeligt mange irrationale tal mellem a og b. Lad c og d være to forskellige rationale tal mellem a og b med $c < d$. Lad yderligere n være et helt tal så $\frac{1}{n} < d - c$. Da følger det at $x_1 = c + \frac{\sqrt{2}}{2n}$ ligger mellem c og d, og desuden må x være irrational ifølge sætning 3.4.2 og sætning 3.4.3. Nu har vi vist at der mellem to vilkårlige forskellige reelle tal findes et irrationalt tal x_1. Dermed findes der igen et irrationalt tal x_2 mellem x_1 og b. Sådan kan vi fortsætte og få uendeligt mange irrationale tal $x_1, x_2, \ldots$ mellem a og b.

Opgave 3.4.5. Lad a og b være rationale tal. Antag at $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ er rational. Hvis $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$, er $a = b = 0$, og dermed er a og b begge rationale. Antag derfor at a og b ikke begge er 0. Da er

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

også rational fordi kvotienten mellem to rationale tal er rational. Dermed er $\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2}$ rational, og også $\sqrt{b} = (\sqrt{a} + \sqrt{b}) - \sqrt{a}$ rational. Helt tilsvarende hvis $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ er rational.

Opgave 3.4.6. Vi beviser at tallet $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rationalt netop hvis mn er et kvadrattal. Antag at $nm = a^2$ hvor a er et ikke-negativt helt tal. Da er $\sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2}{n^2}} = \frac{a}{n}$, hvilket viser at $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational. Antag at $\sqrt{\frac{m}{n}}$ er rational, dvs. $\sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{c}{d}$ hvor c og d er to ikke-negative heltal, og $d \neq 0$. Da er $d^2 nm = c^2 n^2$, hvilket betyder at nm er et kvadrattal.

Opgave 3.4.7. Omskriv ligningen til $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2014} - \sqrt{c}$, og kvadrer:

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 2014 + c - 2\sqrt{2014c}$$

Dette viser at $\sqrt{ab} + \sqrt{2014c}$ er rational, og dermed fra opgave 3.4.5 at $\sqrt{ab}$ og $\sqrt{2014c}$ begge er rationale. Da ab og $2014c$ er hele tal, ved vi fra sætning 3.4.3 at de begge er kvadrattal. Tallet $2014c = 2 \cdot 19 \cdot 53 \cdot c$ er et kvadrattal netop når $c = 2014 \cdot n^2$ hvor n er et ikke-negativt helt tal. Tilsvarende ses at $a = 2014 \cdot l^2$ og $b = 2014 \cdot m^2$, hvor l og m er ikke-negative hele tal, da der er symmetri mht. a, b og c. Den oprindelige ligning kan altså reduceres til $l + m + n = 1$, og samtlige løsninger er derfor $(a, b, c) = (2014, 0, 0)$, $(a, b, c) = (0, 2014, 0)$ og $(a, b, c) = (0, 0, 2014)$.

Opgave 3.5.1.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{200} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 200^2.$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{20} (6 + 3n) = 6 + 9 + 12 + \cdots + 66.$

c) $\displaystyle\sum_{k=5}^{105} \frac{k+1}{k} = \frac{6}{5} + \frac{7}{6} + \frac{8}{7} + \cdots + \frac{106}{105}.$

d) $\displaystyle\sum_{a=10}^{199} \frac{1}{5a(5a+5)} = \frac{1}{50 \cdot 55} + \frac{1}{55 \cdot 60} + \frac{1}{60 \cdot 65} + \cdots + \frac{1}{995 \cdot 1000}.$

Opgave 3.5.2.

a) $\displaystyle 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{400} = \sum_{i=0}^{400} 2^i.$

b) $$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{101\cdot 104}=\sum_{i=2}^{101}\frac{1}{i\cdot(i+3)}.$$

c) $$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4999}+\sqrt{5001}}=\sum_{i=1}^{2500}\frac{1}{\sqrt{2i-1}+\sqrt{2i+1}}.$$

Opgave 3.5.3. Summen af de første n led i differensrækken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med differens d er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+(n-1)d)\\ &= na_1+d(1+2+\cdots+(n-1))\\ &= na_1+d\frac{(n-1)n}{2}.\end{aligned}$$

Summen af de 333 første led i differensrækken $2, 5, 8, \ldots$ er dermed

$$333\cdot 2+3\cdot\frac{332\cdot 333}{2}=333\cdot 2+333\cdot 3\cdot 166=333\cdot 500=166500.$$

Opgave 3.5.4. Summen af de første n led i kvotientrækken $a_1, a_2, a_3, \ldots$ med kvotient q er

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})\\ &= a_1\frac{(q-1)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})}{q-1}\\ &= a_1\frac{(q+q^2+q^3+\cdots+q^n)-(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})}{q-1}\\ &= a_1\frac{q^n-1}{q-1}.\end{aligned}$$

Summen af de 11 første led i kvotientrækken $1, 2, 4, 8, \ldots$ er ifølge formlen lig med

$$1\cdot\frac{2^{11}-1}{2-1}=2^{11}-1=2047.$$

Opgave 3.5.5.

$$\sum_{k=1}^{1000}\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{1000}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2002}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1000}{2002}=\frac{250}{1001}.$$

$$\sum_{a=10}^{199}\frac{1}{5a(5a+5)}=\frac{1}{5}\sum_{a=10}^{199}\left(\frac{1}{5a}-\frac{1}{5a+5}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{1000}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{19}{1000}=\frac{19}{5000}.$$

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{302}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{150}{302}=\frac{25}{151}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{1000}\frac{3}{n^2+3n+2}&=3\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{(n+2)(n+1)}=3\sum_{n=1}^{1000}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\ &=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1002}\right)=3\cdot\frac{500}{1002}=\frac{250}{167}.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.6.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i\cdot a_{i+1}}&=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_1+(i-1)\cdot d)\cdot(a_1+i\cdot d)}\\ &=\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{a_1+(i-1)\cdot d}-\frac{1}{a_1+i\cdot d}\right)\\ &=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+n\cdot d}\right)\\ &=\frac{1}{d}\left(\frac{n\cdot d}{a_1(a_1+n\cdot d)}\right)\\ &=\frac{n}{a_1(a_1+n\cdot d)}.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.7.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{132}\frac{1}{\sqrt{3k+1}+\sqrt{3k+4}} &= \sum_{k=1}^{132}\frac{\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1}}{(3k+4)-(3k+1)}\\ &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{132}\left(\sqrt{3k+4}-\sqrt{3k+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{3\cdot 132+4}-\sqrt{3\cdot 1+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{400}-\sqrt{4}\right)=6.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.8.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5000}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} &= \sum_{k=1}^{5000}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(2k+1)-(2k-1)}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5000}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{10001}-\sqrt{1}\right)\\ &> \frac{1}{2}(100-1)>49.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.9. For at vi kan omskrive summen til en teleskopsum, bliver vi nødt til at tilføje alle de led vi mangler. Den sum vi skal vurdere størrelse af, er

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{16}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{431}+\sqrt{436}}.$$

Hvis vi tilføjer summen

$$\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{11}}+\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{21}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{436}+\sqrt{441}},$$

kan vi omskrive til en teleskopsum. I den sum vi tilføjer, er hvert led mindre end det tilsvarende i den oprindelige, dvs. den sum vi får bliver mindre end det dobbelte af den oprindelige:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{43}\frac{1}{\sqrt{10k+1}+\sqrt{10k+6}} &> \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{87}\frac{1}{\sqrt{5k+1}+\sqrt{5k+6}}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{87}\frac{\sqrt{5k+6}-\sqrt{5k+1}}{(5k+6)-(5k+1)}\\ &= \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{87}\left(\sqrt{5k+6}-\sqrt{5k+1}\right)\\ &= \frac{1}{10}\left(\sqrt{441}-\sqrt{1}\right)\\ &= \frac{1}{10}(21-1)=2\end{aligned}$$

Opgave 3.5.10. Vi omskriver til teleskopsum:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{100} n!\cdot n &= \sum_{n=1}^{100} n!((n+1)-1)\\ &= \sum_{n=1}^{100}((n+1)!-n!)\\ &= 101!-1.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.11. Vi omskriver til teleskopsum:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)\\ &= 1-\frac{1}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Opgave 3.5.12. Vi omskriver til teleskopsum:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4}\left((k+1)^2k^2 - k^2(k-1)^2\right)$$
$$= \frac{(n+1)^2n^2}{4}.$$

Opgave 3.5.13. Vi omskriver til teleskopsum. Der gælder at

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k}{\sqrt{k(k-1)}} - \frac{\sqrt{(k+1)(k-1)}}{\sqrt{k(k-1)}}\right)$$
$$= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}} - \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$$
$$< \sqrt{2}$$

for alle hele tal $n \geq 2$.

Opgave 3.6.1. Vi omskriver rekursionsbetingelsen til $a_{n+1}+1 = (a_n+1)^2$, og sætter $b_n = a_n + 1$. Da er $b_{n+1} = b_n^2$, dvs. at $b_{1001} = b_1^{2^{1000}}$. Ud fra dette ses at

$$a_{1001} = b_{1001} - 1 = (a_1+1)^{2^{1000}} - 1 \geq -1,$$

og at a_{1001} kan være et vilkårligt reelt tal $\alpha \geq -1$, da

$$a_1 = \sqrt[2^{1000}]{\alpha+1} - 1$$

giver $a_{1001} = \alpha$.

Opgave 3.6.2. Konstruer en ny følge $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ved at sætte $b_n = \frac{1}{a_n}$. Da er $b_1 = 1$ og

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = 2019 + \frac{1}{a_n} = 2019 + b_n.$$

Dermed ses rekursivt at $b_{n+1} = 1 + n\cdot 2019$. Nu er

$$S = \frac{1}{b_1b_2} + \frac{1}{b_2b_3} + \cdots + \frac{1}{b_{2019}b_{2020}}$$
$$= \frac{1}{1\cdot(1+2019)} + \frac{1}{(1+2019)(1+2\cdot 2019)} + \cdots + \frac{1}{(1+2018\cdot 2019)(1+2019\cdot 2019)}.$$

Da

$$\frac{1}{(1+k\cdot 2019)(1+(k+1)\cdot 2019)} = \frac{1}{2019}\left(\frac{1}{1+k\cdot 2019} - \frac{1}{1+(k+1)\cdot 2019}\right),$$

teleskoperer S til

$$S = \frac{1}{2019}\left(1 - \frac{1}{1+2019^2}\right).$$

Opgave 3.6.3. Med udgangspunkt i relationen $b_n = \left(1-\frac{1}{a_n}\right)b_{n-1}$ dividerer vi med b_nb_{n-1} på begge sider. Det giver

$$\frac{1}{b_{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)\frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_nb_n}$$

hvilket kan omskrives til $\frac{1}{a_nb_n} = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n-1}}$. Det ses altså at vi har en teleskopsum, og derfor at

$$S = \frac{1}{a_1b_1} + \frac{1}{a_2b_2} + \cdots + \frac{1}{a_{2019}b_{2019}} = \frac{1}{b_{2019}} - \frac{1}{b_0}.$$

Da brøker og summer af rationale tal igen er rationale tal, ses at hvis b_0 og b_{2019} begge er rationale tal, så er S også et rationalt tal. Altså kan b_0 og b_{2019} ikke begge være rationale tal.

Opgave 3.6.4. Konstruer en ny følge $k_1, k_2, k_3, \ldots$ ved at sætte

$$k_n = \frac{a_{n+1}}{n} = \frac{1}{n}\left(n\left\lfloor\frac{a_n}{n}\right\rfloor + n\right) = \left\lfloor\frac{a_n}{n}\right\rfloor + 1.$$

Da er

$$k_{n+1} = \left\lfloor\frac{a_{n+1}}{n+1}\right\rfloor + 1 = \left\lfloor\frac{nk_n}{n+1}\right\rfloor + 1 = \left\lfloor\frac{n}{n+1}k_n\right\rfloor + 1 \leq k_n - 1 + 1 = k_n,$$

da k_n er et helt tal. Følgen $k_1, k_2, k_3, \ldots$ af positive hele tal er derfor aftagende og begrænset nedadtil, og derfor må den være konstant fra et vist trin, dvs. der findes et helt tal N og et helt positivt tal k så $k_i = k$ for alle $i \geq N$. For $j \geq N$ gælder dermed

$$a_{j+1} - a_j = jk - (j-1)k = k.$$

Hvis vi sætter $b_i = a_{N+i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, er $b_1, b_2, b_3, \ldots$ altså en differenrække.

Opgave 3.6.5. Bemærk først at

$$\frac{1}{x_n} = \frac{2x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2}x_{n-1}} = \frac{2}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_{n-2}}.$$

Sæt nu $y_n = \frac{1}{x_n}$. Da er $y_n - y_{n-1} = y_{n-1} - y_{n-2}$, dvs. at $y_1, y_2, \ldots$ er en differensrække.

a) Hvis differensen er forskellig fra nul, ligger der kun et endeligt antal y_i'er i intervallet $[-1;1]$, og der kan derfor kun være et endeligt antal x_i'er som er hele tal. Hvis der skal være uendeligt mange x_i'er som er hele tal, må differensen derfor være 0, og det sker netop når $x_1 = x_2$. I dette tilfælde er følgen konstant. De eneste muligheder for x_1 og x_2 er derfor $x_1 = x_2 = n$, hvor $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

b) Vælg $x_1 = n$ og $x_2 = \dfrac{n!}{(n-1)!+1}$. Da er $y_1 = \dfrac{1}{n}$, og $y_1, y_2, \ldots$ er en differensrække med differens

$$d = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{(n-1)!+1}{n!} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

Da differensen $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$ er et multiplum af d for $k = 1, 2, \ldots, n-1$, må alle de hele tal $1, 2, 3, \ldots, n$ ligge i følgen.

Opgave 3.7.1. Da

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x+7}$$

er en voksende funktion, er der maksimalt én løsning til ligningen

$$5 = \sqrt{x + \sqrt{x+2}} + \sqrt{x+7}.$$

Det ses let at $x = 2$ løser ligningen, og det er dermed også eneste løsning.

Opgave 3.7.2. Vi omskriver til en andengradsligning:

$$\begin{aligned}
3^{2+x} + 3^{2-x} &= 82\\
9 \cdot 3^x + \frac{9}{3^x} &= 82\\
9 \cdot (3^x)^2 - 82 \cdot 3^x + 9 &= 0\\
(9 \cdot 3^x - 1)(3^x - 9) &= 0
\end{aligned}$$

Ifølge nulreglen betyder det at

$$3^x = \frac{1}{9} \quad \vee \quad 3^x = 9.$$

Da 3^x er en voksende funktion, er de eneste løsninger $x = \pm 2$.

Opgave 3.7.3. Ligningen

$$8(4^x + 4^{-x}) - 54(2^x + 2^{-x}) + 101 = 0.$$

indeholder udtrykkene $4^x + 4^{-x}$ og $2^x + 2^{-x}$. For at omskrive ligningen laver vi en omskrivning til kvadrat

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2.$$

Ligningen kan nu skrives som

$$8(2^x + 2^{-x})^2 - 54(2^x + 2^{-x}) + 85 = 0.$$

Dette er en andengradsligning i $2^x + 2^{-x}$, og dermed er

$$2^x + 2^{-x} = \frac{54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 85}}{2 \cdot 8} = \frac{27 \pm 7}{8}.$$

Hvis

$$2^x + 2^{-x} = \frac{17}{4},$$

får vi en andengradsligning

$$(2^x)^2 - \frac{17}{4} \cdot 2^x + 1 = 0$$

i 2^x, dvs. $2^x = 4$ eller $2^x = \frac{1}{4}$.

Hvis

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2},$$

får vi på samme måde at $2^x = 2$ eller $2^x = \frac{1}{2}$.

Da 2^x er en voksende funktion, er der højst en løsning for hver af de fire ligninger. Disse er $x = \pm 1, \pm 2$, og de er også løsninger til den oprindelige ligning.

Opgave 3.7.4. Bemærk først at x, y og z ikke kan være negative, og at hvis en af de ubekendte er 0, så er de andre to også, og dette er en løsning. Antag derfor at x, y og z er positive reelle tal. Vi bemærker nu at

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} \leq x$$

med lighedstegn netop når $x = \frac{1}{2}$, da uligheden kan omskrives til $0 \leq (2x-1)^2$. Her har vi brugt at x er positiv, da vi har divideret med x på begge sider af ulighedstegnet. Dermed er

$$x = \frac{4z^2}{1+4z^2} \leq z = \frac{4y^2}{1+4y^2} \leq y = \frac{4x^2}{4x^2+1} \leq x,$$

dvs. at $x = y = z = \frac{1}{2}$. Samlet ses at $x = y = z = 0$ og $x = y = z = \frac{1}{2}$ er de eneste løsninger.

Opgave 3.7.5. Lad x, y, z være tre ikke-negative tal som opfylder ligningssystemet

$$x^2 - y = (z-1)^2, \quad y^2 - z = (x-1)^2, \quad z^2 - x = (y-1)^2.$$

Ved at lægge ligningerne sammen og reducere ses at $x+y+z = 3$. Vi har derfor enten $x = y = z = 1$, som faktisk er en løsning, eller også at mindst en af de tre variable er mindre end 1. Antag uden tab af generalitet at $0 \leq x < 1$. Dermed er

$$1 > x^2 = (z-1)^2 + y \geq y \geq 0.$$

Det medfører yderligere at

$$1 > y^2 = (x-1)^2 + z \geq z.$$

Nu er $x + y + z < 1 + 1 + 1 = 3$, hvilket er en modstrid. Altså er eneste løsning $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Opgave 3.7.6. Ligningssystemet kan omskrives til

$$y+1 = x(x+1), \qquad z+1 = y(y+1), \qquad x+1 = z(z+1).$$

Ved multiplikation af de tre ligninger fås

$$xyz(x+1)(y+1)(z+1) = (x+1)(y+1)(z+1).$$

Enten er $xyz = 1$, $x = -1$, $y = -1$ eller $z = -1$.

Antag først at $xyz = 1$, og at $x \neq -1$, $y \neq -1$ og $z \neq -1$. Enten er $x = y = z = 1$, eller også er den numeriske værdi af enten x, y eller z større end 1. Antag uden tab af generalitet at x har numerisk værdi er større end 1.

Hvis $x > 1$, er $y = x^2 + x - 1 > x > 1$, og af symmetrigrunde også $z > y$ og $x > z$ hvilket er umuligt.

Hvis $x < -1$, er

$$x = z^2 + z - 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq -\frac{5}{4}.$$

Da både x og $x+1$ er negative, og $x \geq -\frac{5}{4}$, må

$$x(x+1) \leq -\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{5}{4} + 1\right) = \frac{1}{16} < 1.$$

Dermed er $y = x(x+1) - 1 < 0$ og tilsvarende $z = y(y+1) - 1 < 0$, hvilket er umuligt da $xyz = 1$.

Antag nu at $x = -1$. Da er også $y = x^2 + x - 1 = -1$ og $z = y^2 + y - 1 = -1$. Det samme sker hvis $y = -1$ eller $z = -1$.

Løsningerne er derfor $(1,1,1)$ og $(-1,-1,-1)$.

Opgave 3.7.7. Da vi skal bestemme antallet af løsninger til

$$0 = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$$

er det en god idé at få bedre overblik over hvornår højresiden er positiv, og hvornår den er negativ. Det er ofte nemmere at overskue når vi har faktoriseret så meget som vi kan:

$$\begin{aligned}0 &= x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}\\ &= x(x-1)(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) + \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

For $x \le 0$ og $x \ge 1$ fremgår det af omskrivningen at højresiden er positiv. For $0 < x < 1$ er

$$0 > x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \ge -\frac{1}{4},$$

og

$$x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

Samlet giver dette at

$$x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2} > -\frac{1}{4} \cdot 10 + \frac{5}{2} = 0,$$

dvs. at ligningen ikke har nogen reelle løsninger.

Opgave 3.7.8. Først eliminerer vi x og z så vi får en ligning i y og k. Da $x + \frac{1}{y} = k$, er $\frac{1}{x} = \frac{y}{ky-1}$, og da $y + \frac{1}{z} = k$, er $z = \frac{1}{k-y}$ Bemærk at $ky - 1 \neq 0$ og $k - y \neq 0$. Ved at udnytte dette omformes ligningen $z + \frac{1}{x} = k$ til

$$\frac{1}{k-y} + \frac{y}{ky-1} = k.$$

Yderligere omskrivninger giver

$$ky - 1 + y(k-y) = k(k-y)(ky-1).$$

Hvis $k^2 \neq 1$, får vi en andengradsligning i y

$$y^2\left(1-k^2\right) + y\left(k^3 - k\right) + 1 - k^2 = 0.$$

Af symmetrigrunde skal x og z opfylde præcis den samme andengradsligning, og dermed må mindst to af x, y og z være ens, men dette giver ifølge den oprindelige ligning at alle tre er ens. Altså er $k = \pm 1$. Begge disse værdier af k er mulige: For $x = 2$, $y = -1$ og $z = \frac{1}{2}$ er $k = 1$. Ved at ændre fortegn ser man at $k = -1$ også er mulig.

Opgave 3.8.1. For $y = -1$ er

$$f(x-1) = -f(x) + f(x) = 0$$

for alle $x \in \mathbb{R}$. Altså er $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x) = 0$ er en løsning.

Opgave 3.8.2. Når vi indsætter $x = y = 0$ i funktionalligningen, får vi at $f(0)^2 = f(0)$, dvs. at $f(0) = 0$ eller $f(0) = 1$. Når vi indsætter $y = 0$, får vi

$$f(x)f(0) - f(0) = x$$

for alle x, hvilket viser at $f(0) \neq 0$. Samlet er $f(0) = 1$ og $f(x) = x + 1$. Vi har nu vist at hvis der findes en funktion som opfylder betingelsen, kan det kun være $f(x) = x + 1$. Det ses nemt ved indsættelse at denne funktion opfylder den ønskede betingelse.

Opgave 3.8.3. Når vi indsætter $x = 1$, får vi

$$f\left(y + f(y)\right) = 2f(y),$$

og når vi indsætter $y = 1$, får vi

$$f\left(x + f(x)\right) = 2xf(1).$$

Dermed er $f(x) = xf(1)$ for alle $x \in \mathbb{R}$. Altså er samtlige mulige løsninger på formen $f(x) = ax$ for en konstant $a \in \mathbb{R}$. Vi indsætter $f(x) = ax$ i funktionalligningen for at undersøge for hvilke a dette er en løsning. Tallet a skal opfylde at

$$a(xy + axy) = 2xay \quad \Leftrightarrow \quad a^2xy = axy$$

for alle reelle tal x og y. Altså må $a = 0$ eller $a = 1$. Dermed er der to løsninger, nemlig $f(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ og $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Opgave 3.8.4. Når vi indsætter $x=1$ og $x=0$, får vi

$$f\big(f(1)\big)=1^2-1+1=1 \quad \text{og} \quad f\big(f(0)\big)=0^2-0+1=1.$$

Nu kan vi indsætte $x=f(1)$, og det giver

$$f(1)^2-f(1)+1=f\Big(f\big(f(1)\big)\Big)=f(1),$$

og altså $0=f(1)^2-2f(1)+1=\big(f(1)-1\big)^2$, dvs. $f(1)=1$. Nu kan vi finde $f(0)$ ved at indsætte $x=f(0)$:

$$f(0)^2-f(0)+1=f\Big(f\big(f(0)\big)\Big)=f(1)=1.$$

Dette giver $0=f(0)^2-f(0)=f(0)\big(f(0)-1\big)$, og altså $f(0)=0$ eller $f(0)=1$. Antag at $f(0)=0$. Da er $1=f\big(f(0)\big)=0$ hvilket er en modstrid. Dermed er $f(0)=1$.

Opgave 3.8.5. Antag at der findes et reelt tal a så $f(a)=-2$. Ved at indsætte $x=a$ fås

$$f(-2)=f\big(f(a)\big)=af(a)+2a=a(-2)+2a=0.$$

Nu indsætter vi $x=-2$ og udnytter at $f(-2)=0$:

$$f(0)=f\big(f(-2)\big)=-2f(-2)+2(-2)=-4.$$

Ved at indsætte først $x=0$

$$f(-4)=f\big(f(0)\big)=0,$$

og derefter $x=-4$

$$f(0)=f\big(f(-4)\big)=-4f(-4)+2(-4)=-8,$$

får vi en modstrid, da vi ikke både kan have $f(0)=-4$ og $f(0)=-8$. Dermed findes der ikke et a så $f(a)=-2$.

Opgave 3.9.1. Vi viser ved induktion efter n at $f(n)=n+1$ for alle positive heltal n. Vi ved at $f(1)=2$, dvs. induktionsstarten er på plads. Antag at $f(n)=n+1$. Da er

$$f(n+1)=f\big(f(n)\big)=f(n)+1=n+1+1=n+2.$$

Det fuldfører induktionen, og vi ved nu at $f(n)=n+1$ er eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 3.9.2. Først viser vi ved induktion efter n at $f(2n)=2n+2$ for alle positive heltal n. For $n=1$ er $f(2\cdot 1)=f\big(f(1)\big)=f(1)+2=4$, dvs. induktionsstarten er på plads. Antag nu at $f(2n)=2n+2$. Da er

$$f(2(n+1))=f(2n+2)=f\big(f(2n)\big)=f(2n)+2=2n+2+2=2(n+1)+2.$$

Nu har vi fundet de mulige funktionsværdier for alle lige tal n.

For at bestemme funktionsværdierne for de ulige tal pånær 1 viser vi at $f(2n+1)=2n+3$ for alle positive heltal n ved induktion efter n. For $n=1$ ved vi at $f(2\cdot 1+1)=f(3)=5=2\cdot 1+3$. Antag at $f(2n+1)=2n+3$. Da er

$$f(2(n+1)+1)=f(2n+3)=f\big(f(2n+1)\big)=f(2n+1)+2=2(n+1)+1+2.$$

Nu har vi også fundet de funktionsværdierne for alle de ulige tal pånær 1. Dermed er den eneste mulige løsning at $f(n)=n+2$ for alle positive heltal $n>1$ og $f(1)=2$. Ved indsættelse ses at det er en løsning.

Opgave 3.9.3. Ved at indsætte $x=y=0$ ses at $f(0)^2=f(0)$, dvs. at $f(0)=0$ eller $f(0)=1$. Hvis $f(0)=0$, får vi ved at indsætte $y=0$ at

$$f(x)=f(x-0)=f(x)f(0)=0$$

for alle x i modstrid med at $f(2011)=1$. Dermed er $f(0)=1$. Ved at indsætte $x=y=n$ får vi nu at $f(n)^2=f(0)=1$, dvs. $f(n)=\pm 1$. Bemærk at bare fordi vi ved at alle funktionsværdier er ± 1, så ved vi ikke om de alle er den samme værdi. Derfor har vi brug for yderligere undersøgelser. Ved at indsætte $x=2n$ og $y=n$ ses at $f(2n)f(n)=f(n)$ for alle n, og altså $f(n)=1$ for alle lige n. Antag at der findes et ulige n så $f(n)=-1$. Da er $f(2011)=f(2011+n)f(n)=-1$, da $2011+n$ er lige, hvilket er en modstrid. Dermed er $f(n)=1$ for alle n eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 3.9.4. For $x=2$ og $y=1$ er $f(3)+f(1)=12$, for $x=3$ og $y=2$ er $f(5)+f(1)=28$, og for $x=4$ og $y=1$ er $f(5)+f(3)=36$. Ved at løse disse tre ligninger med tre ubekendte fås $f(1)=2$, $f(3)=10$ og $f(5)=26$. På tilsvarende måde kan man ved at indsætte henholdsvis $x=3$ og $y=1$, $x=4$ og $y=2$

samt $x=5$ og $y=1$ bestemme $f(2)=5$, $f(4)=17$ og $f(6)=37$. Vi viser nu ved induktion efter n at $f(n)=n^2+1$ for alle positive heltal n. Vi ved allerede at $f(1)=2=1^2+1$ og $f(2)=5=2^2+1$. Antag at $f(n)=n^2+1$ for alle positive heltal $n \le N$. Da er $f(N+1)=-f(N-1)+2N^2+2\cdot 1^2+2=(N+1)^2+1$. Dermed er $f(x)=x^2+1$ den eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 3.9.5. Først bemærkes at $f(2)=2f(1)+1=1$, $f(3)=2f(1)=0$, $f(4)=2f(2)+1=3$, osv. På denne måde kan man rekursivt finde $f(n)$ for alle naturlige tal n. Der er altså højst en løsning til funktionalligningen.

Lad n være et positivt heltal, og skriv n på formen $n=2^m+l$, $0\le l<2^m$. Vi påstår at $f(n)=2^{m+1}-n-1$. Det eftervises let at denne funktion opfylder de tre betingelser, og da vi ved at der højst er én løsning, må dette være den eneste løsning.

Opgave 3.10.1. Først substitueres x med $3-x$:

$$f(x)+2f(3-x)=3-x$$

Vi kan nu gange den oprindelige ligning med 2 og trække ovenstående fra:

$$2f(3-x)+4f(x)-\big(f(x)+2f(3-x)\big)=2x-(3-x)$$

hvilket giver $f(x)=x-1$ som eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at den opfylder betingelsen.

Opgave 3.10.2. Substituer først x med $\frac{1}{1-x}$ i den oprindelige ligning. Det giver:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}.$$

Substituer nu x med $\frac{x-1}{x}$ i den oprindelige ligningen. Det giver:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{x-1}{x}.$$

Bemærk at de to ovenstående ligninger sammen med den oprindelige udgør tre ligninger med de tre ubekendte $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ og $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$. For at løse dem trækker vi først de to ovenstående fra hinanden:

$$f(x)-f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{x-1}{x}-\frac{1}{1-x}.$$

Lægges denne ligning sammen med den oprindelige fås

$$2f(x)=x+\frac{x-1}{x}-\frac{1}{1-x}=x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x},$$

og altså

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\right).$$

Ved indsættelse ses at denne funktion er løsning til ligningen.

Opgave 3.10.3. Af symmetrigrunde er

$$f(x)+y=f(xy)f\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=f(y)+x \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Dermed er $f(x)-x=f(y)-y$ for alle $x,y\in\mathbb{R}_+$, hvilket viser at f er på formen $f(x)=x+k$. Vi undersøger nu for hvilke reelle tal k at $f(x)=x+k$ er en løsning.

$$(xy+k)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+k\right)=x+k+y,$$

som omskrives til

$$k\left(xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+k-1\right)=0.$$

Da denne ligning skal gælde for alle x og y, må $k=0$, dvs. at den eneste løsning er $f(x)=x$.

Opgave 3.10.4. Ved at dividere med x^2-y^2, under antagelse af at $x\neq\pm y$, fås

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-\frac{f(x-y)}{x-y}=4xy=(x+y)^2-(x-y)^2.$$

Dermed er

$$\frac{f(x+y)}{x+y}-(x+y)^2=\frac{f(x-y)}{x-y}-(x-y)^2 \text{ for alle } x\neq\pm y.$$

Dette viser at $\frac{f(x)}{x} - x^2$ er konstant, og altså at $f(x) = x^3 + kx$ for alle $x \neq 0$. Ved at indsætte $x = y = 1$ i den oprindelige ligning fås $f(0) = 0$. Dermed er de mulige løsninger $f(x) = x^3 + kx$, hvor k er et reelt tal, og ved indsættelse ses at disse er løsninger for alle reelle tal k.

Opgave 3.10.5. Først viser vi at f er injektiv. Antag at $f(x) = f(y)$. Da er

$$3y - 3x = f\left(2x + 2y - f(x)\right) - f(y) = f\left(2y + 2x - f(y)\right) - f(x) = 3x - 3y,$$

og dermed $x = y$. Dette viser at f er injektiv. Når $x = y$, fås

$$3x + f\left(4x - f(x)\right) = 3x + f(x).$$

Da f er injektiv, er $4x - f(x) = x$, og dermed $f(x) = 3x$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x) = 3x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ er en løsning til funktionalligningen.

Opgave 3.10.6. Bemærk først at funktionen er injektiv da $f(x) = f(y)$ medfører at

$$x = 4f\left(f(x)\right) - 2f(x) = 4f\left(f(y)\right) - 2f(y) = y.$$

Vi skal dermed blot vise at $f(0) = 0$. Ved at indsætte $x = 0$ fås

$$4f\left(f(0)\right) = 2f(0) + 0 = 2f(0),$$

og altså $2f\left(f(0)\right) = f(0)$. Ved at indsætte $x = f(0)$ og udnytte det foregående fås

$$4f\left(f\left(f(0)\right)\right) = 2f\left(f(0)\right) + f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0).$$

Samlet er $f\left(f\left(f(0)\right)\right) = f\left(f(0)\right)$, og da f er injektiv, er $f(0) = 0$.

Opgave 3.10.7. For at vise at f er injektiv, antager vi at $f(n) = f(m)$. Ved at tage f på begge sider opnås $f\left(f(n)\right) = f\left(f(m)\right)$, og dermed ifølge betingelsen i opgaven at $m = n$. Funktionen f er altså injektiv, og vi ved derfor at $f(n) = f(n+2) + 2$. Nu viser vi ved induktion efter n at $f(n) = 1 - n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Da $f(0) = 1$, får vi yderligere at $f(1) = f\left(f(0)\right) = 0$. Nu har vi som induktionsstart at $f(0) = 1$ og $f(1) = 0$. Antag at $f(n) = 1 - n$ for alle ikke-negative heltal mindre end N, hvor $N \geq 2$. Nu kan vi udnytte $f(n) = f(n+2) + 2$ til at få

$$f(N) = f(N-2) - 2 = 1 - (N-2) - 2 = 1 - N,$$

hvilket fuldfører induktionen. Nu har vi bestemt funktionsværdierne for alle ikke-negative hele tal. Det er let at vise induktivt at det også gælder for de negative heltal da $f(n+2) = f(n) - 2$. Ved indsættelse ses at $f(n) = 1 - n$ faktisk er en løsning.

Opgave 3.10.8. Sæt $x = 1$. Da er

$$f\left(f(y) + 1\right) = y + f(1),$$

hvilket viser at f surjektiv da $y + f(1)$ kan antage alle værdier. Derfor findes et $k \in \mathbb{R}$ så $f(k) = -1$. Når $y = k$, fås $f(0) = kx + f(x)$. Altså er f en lineær funktion $f(x) = ax + b$. Vi indsætter i den oprindelige ligning for at finde de mulige værdier af a og b:

$$\begin{aligned} f\left(xf(y) + x\right) &= xy + f(x) \\ f\left(x(ay + b) + x\right) &= xy + ax + b \\ a(axy + bx + x) + b &= xy + ax + b \\ (a^2 - 1)xy + abx &= 0 \end{aligned}$$

Da dette skal gælde for alle værdier af x og y, må $a^2 = 1$ og $b = 0$. Samtlige løsninger er derfor $f(x) = x$ og $f(x) = -x$.

Opgave 3.10.9. Ved at indsætte $x = f(y)$ fås $f(0) = 1 - f(y) - y$ for alle y, og altså $f(y) = -y + 1 - f(0)$. Løsningerne skal derfor findes blandt $f(x) = -x + a$, og ved indsættelse ses at kun $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ er en løsning.

Opgave 3.10.10. Antag at a er et reelt tal så der findes et reelt tal b og en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at $f(b) = 0$ og $f\left(f(x)\right) = xf(x) + a$, $x \in \mathbb{R}$. Ved at indsætte $x = b$ fås

$$f(0) = f\left(f(b)\right) = bf(b) + a = a.$$

Nu indsættes $x = 0$:

$$f(a) = f\left(f(0)\right) = 0 \cdot f(0) + a = a.$$

Ved at udnytte at $f(a) = a$ og indsætte $x = a$ fås

$$a = f\left(f(a)\right) = af(a) + a = a^2 + a,$$

dvs. $a=0$. Den eneste mulige værdi af a er altså $a=0$. Hvis $a=0$, opfylder $b=0$ og $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}$ det ønskede.

Opgave 3.10.11. Når vi indsætter $y=0$, får vi

$$f(x)f(0)=f(x)+3f(x)=4f(x)$$

for alle x, dvs. $f(0)=4$ eller $f(x)=0$ for alle x. Da

$$f(x)f(y)-f(xy+x)-3f(x+y)=y,$$

kan $f(x)$ ikke være nul for alle x, dvs. $f(0)=4$. Ved at indsætte $x=0$ og udnytte at $f(0)=4$, får vi

$$4f(y)=4+3f(y)+y.$$

Altså er $f(y)=y+4$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x)=x+4$ opfylder betingelserne.

Opgave 3.10.12. Ved at indsætte $y=x$ fås

$$2xf(x)=2xf(x)^2,$$

dvs. $f(x)=f(x)^2$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dermed er $f(x)=0$ eller $f(x)=1$ for $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Antag at der findes et $z\neq 0$ så $f(z)=1$. Ved at indsætte $x=z$ fås

$$zf(y)+y=(z+y)f(y),$$

og altså $y=f(y)y$ for alle y, dvs. $f(y)=1$ for alle $y\neq 0$. De mulige løsninger i dette tilfælde er derfor $f(x)=1$ for $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ og $f(0)=a$, hvor a er et vilkårligt reelt tal. Ved indsættelse ses at de alle er løsninger.

Antag at der ikke findes et $z\neq 0$ så $f(z)=1$. Da er $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Hvis man indsætter funktioner af typen $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ og $f(0)=a$, hvor a er et vilkårligt reelt tal, ser man at $a=0$, dvs. $f(x)=0$ for alle x.

Opgave 3.10.13. Ved at kombinere $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$ og $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=(n-1)^2f(n-1)$ fås

$$f(n)=\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}{n^2-1}=\frac{(n-1)^2f(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n-1}{n+1}f(n-1).$$

Dermed er

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}f(n-2)=\cdots=\frac{2}{n(n+1)}f(1).$$

Dette giver at $f(1995)=\frac{2}{1995\cdot 1996}f(1)=\frac{1}{998}$.

Opgave 3.10.14. Ved at indsætte $x=0$, fås

$$f\left(f(0)^2+f(y)\right)=y.$$

Dermed er f surjektiv, og det betyder at der findes et z så $f(z)=0$. Indsæt nu $x=z$:

$$f\left(f(z)^2+f(y)\right)=zf(z)+y.$$

Dette viser at $f\left(f(y)\right)=y$ for alle y, og dermed at funktionen er injektiv. Ved at indsætte $x=f(t)$ og dermed $t=f\left(f(t)\right)=f(x)$ fås

$$f\left(t^2+f(y)\right)=f(t)t+y.$$

Sammenholdt med $f\left(f(z)^2+f(y)\right)=zf(z)+y$ har vi at

$$f\left(f(x)^2+f(y)\right)=f\left(x^2+f(y)\right).$$

Da f er injektiv, betyder det at $f(x)^2+f(y)=x^2+f(y)$, og dermed at $f(x)=\pm x$ for alle reelle tal x. Antag at der findes en løsning f hvor $f(a)=a$ og $f(b)=-b$ for to reelle tal a og b forskellige fra 0. Ved at indsætte $x=a$ og $y=b$ fås $f(a^2-b)=a^2+b$, og altså $|a^2-b|=|a^2+b|$, men det er ikke muligt da a og b er forskellige fra 0. Dermed ved vi nu at der kun er to mulige løsninger, nemlig $f(x)=x$ og $f(x)=-x$. Ved indsættelse ses at de begge er løsninger.

Opgave 3.10.15. Hvis $m\geq 3$, gælder at

$$f\left((m+1)^2\right)=f(2m+1)f(1)=f(2m)f(2)=f(2m-1)f(3). \qquad (*)$$

Denne ligning viser at

$$f(2m)=\frac{f(2m-1)f(3)}{f(2)} \quad \text{og} \quad f(2m+1)=\frac{f(2m)f(2)}{f(1)},$$

dvs. hvis $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$ er bestemt, kan alle andre funktionsværdier herefter bestemmes induktivt.

Nu bestemmer vi $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$, og det kræver ret mange overvejelser: Ved at benytte (*) med $m = 1, 2, 3, 4$ fås

$$\begin{aligned} f(4) &= f(3)f(1) = f(2)f(2) = f(1)f(3) \\ f(9) &= f(5)f(1) = f(4)f(2) = f(3)f(3) \\ f(16) &= f(7)f(1) = f(6)f(2) = f(5)f(3). \\ f(25) &= f(9)f(1) = f(8)f(2) = f(7)f(3). \end{aligned}$$

Først udtrykker vi $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ og $f(7)$ udelukkende ved $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$:

$$f(4) = f(2^2) = f(3)f(1), \quad f(5) = \frac{f(4)f(2)}{f(1)} = f(2)f(3),$$
$$f(6) = \frac{f(5)f(3)}{f(2)} = f(3)^2, \quad f(7) = \frac{f(6)f(2)}{f(1)} = \frac{f(2)f(3)^2}{f(1)}.$$

Nu kan vi få tre forskellige udtryk for $f(9)$ hvor kun $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$ indgår:

$$f(9) = f(3^2), \; f(9) = f(5)f(1) = f(1)f(2)f(3), \; f(9) = \frac{f(7)f(3)}{f(1)} = \frac{f(2)f(3)^3}{f(1)^2},$$

og dermed

$$f(3)^2 = f(1)f(2)f(3) = \frac{f(2)f(3)^3}{f(1)^2}.$$

Af dette ses at $f(1)^3 = f(3)^2$ og $f(2) = f(1)^2$. Ved at udregne $f(36)$ på to måder fås yderligere $f(9)f(3) = f(7)f(5)$, og altså $f(1)f(2)f(3)^2 = \frac{f(2)^2 f(3)^3}{f(1)}$. Sammenholdt med at $f(2) = f(1)^2$, giver dette $f(3) = 1$, og dermed også $f(1) = f(2) = 1$. Den eneste mulige løsning er derfor $f(n) = 1$ for alle n, og ved indsættelse ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 3.10.16. Vi ønsker at vise at $f(n) \leq n$, for når f er injektiv, giver det induktivt at $f(n) = n$ da $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Vi viser dette indirekte.

Antag derfor at der findes et positivt helt tal m så $f(m) > m$. Lad $f^k(n)$ betegne $f\big(f\big(\ldots f(n)\ldots\big)\big)$ hvor f er taget k gange. Da er

$$\begin{aligned} f^2(m) &\leq \frac{m + f(m)}{2} < f(m) \\ f^3(m) &\leq \frac{f(m) + f^2(m)}{2} < f(m) \end{aligned}$$

Vi viser ved induktion efter k at $f^k(m) < f(m)$. Vi har allerede induktionsstarten. Antag at det er sandt for alle $2 \leq k \leq K$. Da er

$$f^{K+1}(m) \leq \frac{f^{K-1}(m) + f^K(m)}{2} < f(m).$$

Da der kun findes endeligt mange positive heltal som er mindre end $f(m)$, må der findes to positive hele tal p og q, $p < q$, så $f^p(m) = f^q(m)$. Da f er injektiv, giver dette at $m = f^{q-p}(m)$, men det betyder at $f(m) = f^{q-p+1}(m)$ hvor $q - p + 1 \geq 2$, hvilket er en modstrid. Dermed er $f(n) \leq n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Som vi allerede konkluderede tidligere, betyder dette at $f(n) = n$ er eneste mulige løsning da f skal være injektiv. Ved at indsætte ses at denne funktion faktisk er en løsning.

Opgave 3.10.17. Ved at indsætte $x = 1$ og $y = 0$ fås

$$1 = f(1+0) \geq f(1) + f(0) = 1 + f(0),$$

og altså $f(0) = 0$.

Først viser vi ved induktion efter n at $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$ for $n \geq 1$. For $n = 1$ er $2f(\frac{1}{2}) \leq f(1) = 1$, og dermed $f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$. Antag at $f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}$. Da er

$$2f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq f\left(\frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n},$$

og dermed $f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$, hvilket fuldfører induktionen.

Nu er vi klar til at vise den egentlige ulighed. For $x \in]0;1[$ vælges et positivt heltal n så $x \in [\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}]$. Ved at indsætte $y = \frac{1}{2^{n-1}} - x$ fås

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{1}{2^{n-1}} - x\right) \leq \frac{1}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{1}{2^n} \leq 2x.$$

Da $f(0)=0$ og $f(1)=1$, har vi vist at $f(x)\leq 2x$ for alle $x\in[0;1]$.

Opgave 3.10.18. Ved at substituere x og y med henholdsvis $\frac{1}{x}$ og $\frac{1}{y}$ fås

$$f\left(\frac{1}{x}\right)-f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)f(y)-f(x)f\left(\frac{1}{y}\right),$$

og ved addition af den oprindelige ligning fås

$$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dermed er $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=c$ for en konstant c. Vi har nu

$$f(x)-f(y)=f(x)f\left(\frac{1}{y}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)f(y)=f(x)\big(c-f(y)\big)-\big(c-f(x)\big)f(y),$$

og altså $(c-1)f(x)=(c-1)f(y)$. Hvis $c\neq 1$, da er $f(x)=f(y)$ for alle x og y, og dermed er funktionen konstant, dvs. $f(-1)=\frac{1}{2}$. Hvis $c=1$, er

$$2f(-1)=f(-1)+f\left(\frac{1}{-1}\right)=1,$$

dvs. $f(-1)=\frac{1}{2}$.

Opgave 3.11.1. Bevis for QA-uligheden for $n=2$:

$$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\geq\frac{x_1+x_2}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 2(x_1^2+x_2^2)\geq x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\quad\Leftrightarrow\quad (x_1-x_2)^2\geq 0,$$

med lighedstegn netop når $x_1=x_2$.
Bevis for GH-uligheden for $n=2$:

$$\sqrt{x_1x_2}\geq\frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\geq\sqrt{\frac{1}{x_1}\frac{1}{x_2}}.$$

Dette er AG-uligheden for $a_1=\frac{1}{x_1}$ og $a_2=\frac{1}{x_2}$, og den har vi allerede vist er sand. Vi ved yderligere at der er lighedstegn netop når $\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}$, dvs. netop når $x_1=x_2$.

Opgave 3.11.2. Pointen er at AG-uligheden kan omskrives til GH–uligheden. Lad $x_1,x_2,\dots,x_n$ være n positive reelle tal. Dermed er $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\dots,\frac{1}{x_n}$ også n positive reelle tal. Ifølge AG-uligheden gælder at

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{x_1x_2\cdots x_n}},$$

og dermed følger GH-uligheden

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

Bemærk at der gælder lighedstegn netop når $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Opgave 3.11.3. Ifølge QA-uligheden er

$$\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{3}}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Da begge sider af lighedstegnet er positive, kan vi kvadrere:

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3}\geq\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^2.$$

Fordi $abc\neq 0$, og dermed $a^2+b^2+c^2\neq 0$, følger det at

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Opgave 3.11.4. Lad n være et positivt heltal, og a og b positive reelle tal. Uligheden

$$\frac{a+nb}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{ab^n}$$

er blot AG-uligheden med de $n+1$ tal $a,b,b,\dots,b$.

Opgave 3.11.5. Ifølge AG-uligheden er

$$\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{abbcca}=\left(\sqrt[3]{abc}\right)^2$$

for positive reelle tal a, b og c. Dette giver

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

Opgave 3.11.6. Lad a, b og c være positive reelle tal. Vi viser de to uligheder

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

en ad gangen. Ifølge AH-uligheden er

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{2}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{a}}{2} \geq \frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}.$$

AH-uligheden giver yderligere

$$\frac{\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}}{3} \geq \frac{3}{\frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}} = \frac{3}{a+b+c},$$

hvilket viser at

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Opgave 3.11.7. Lad a, b og c være positive reelle tal. Betragt uligheden

$$\sqrt[3]{abc}+1 \leq \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Ved at opløfte begge sider af ulighedstegnet i tredje potens får man

$$abc+3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abc}^2+1 \leq abc+ab+ac+bc+a+b+c+1.$$

Vi skal altså vise at

$$3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{abc}^2 \leq ab+ac+bc+a+b+c.$$

Det følger ved at bruge AG-uligheden to gange:

$$ab+ac+bc \geq 3\sqrt[3]{(ab)(ac)(bc)} = 3\sqrt[3]{abc}^2 \quad \text{og} \quad a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}.$$

Opgave 3.11.8. Lad a og b være to positive reelle tal med sum 1. For at bevise at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2},$$

benytter vi først QA-uligheden til at vurdere venstresiden. Der gælder at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$$

med lighedstegn netop når $a=b$. Da $a+b=1$, giver AH-uligheden at

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \frac{2}{a+b} = 2$$

med lighedstegn netop når $a=b$. Samlet er

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(1+4)^2 = \frac{25}{2}$$

med lighedstegn netop når $a=b$, hvilket vil sige når $a=b=\frac{1}{2}$.

Opgave 3.11.9. Lad a, b og c være reelle tal der opfylder at $c>0$, $a>c$ og $b>c$. Da begge sider af ulighedstegnet

$$\sqrt{ab} \geq \sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}.$$

er positive, kan vi kvadrere og få

$$ab \geq ca+cb-2c^2+2\sqrt{c^2(a-c)(b-c)}.$$

Ved omrokering får man yderligere

$$\frac{(a-c)(b-c)+c^2}{2} \geq \sqrt{c^2(a-c)(b-c)},$$

hvilket er sandt ifølge AG-uligheden.

Opgave 3.11.10. Lad x, y, z være positive reelle tal som opfylder at $xyz=32$. For at bestemme den mindst mulige værdi af

$$x^2+4xy+4y^2+2z^2$$

overvejer vi hvordan vi kan udnytte at $xyz = 32$. Da vi kender xyz, forsøger vi at vurdere udtrykket ved et udtryk af formen $(xyz)^n$. Derfor benytter vi AG-uligheden to gange på følgende måde

$$\begin{aligned} x^2+4xy+4y^2+2z^2 &\geq 2\sqrt{x^2\cdot 4y^2}+4xy+2z^2 \\ &= 4xy+4xy+2z^2 \\ &\geq 3\sqrt[3]{32x^2y^2z^2} \\ &= 3\sqrt[3]{32^3} = 96. \end{aligned}$$

Der er lighedstegn netop når $x^2 = 4y^2$ og $4xy = 2z^2$, dvs. når $x = z = 4$ og $y = 2$.

Opgave 3.12.1. Ved at gange ud og reducere ses at uligheden er ensbetydende med

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

Denne ulighed er omarrangeringsuligheden, dvs. uligheden følger direkte om omarrangeringsuligheden.

Opgave 3.12.2. Da uligheden er symmetrisk i a, b og c, kan vi uden tab af generalitet antage at $a \leq b \leq c$. Ved at bruge omarrangeringsuligheden flere gange fås

$$\begin{aligned} \frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3} &= a^5\cdot\frac{1}{b^3c^3}+b^5\cdot\frac{1}{c^3a^3}+c^5\cdot\frac{1}{a^3b^3} \\ &\geq a^5\cdot\frac{1}{a^3c^3}+b^5\cdot\frac{1}{b^3a^3}+c^5\cdot\frac{1}{c^3b^3} = a^2\cdot\frac{1}{c^3}+b^2\cdot\frac{1}{a^3}+c^2\cdot\frac{1}{b^3} \\ &\geq a^2\cdot\frac{1}{a^3}+b^2\cdot\frac{1}{b^3}+c^2\cdot\frac{1}{c^3} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Opgave 3.12.3. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n)$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1b_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2b_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{a_nb_n}}\right)$ er

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_ib_i}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{a_i+b_i}{\sqrt{a_ib_i}}.$$

Ifølge AG-uligheden er hvert led på højresiden større end eller lig med 2, og ved yderligere at kvadrere får man

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i+b_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_ib_i}\right) \geq 4n^2.$$

Opgave 3.12.4. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \ldots, \sqrt{x_n})$ og $\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$ er

$$\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\sqrt{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \geq n$$

Ved at kvadrere og omskrive fås AH-uligheden

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$

Opgave 3.12.5. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $\left(\frac{a}{\sqrt{c}}, \frac{b}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{b}}\right)$ og $(\sqrt{c}, \sqrt{a}, \sqrt{b})$ er

$$\frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c}+\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{a}+\frac{c}{\sqrt{b}}\sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}}\sqrt{a+b+c}.$$

Ved at kvadrere og dividere med $a+b+c$ fås

$$a+b+c \leq \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}.$$

Opgave 3.12.6. Vi skal vise at der for vilkårlige n reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gælder at

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}},$$

med lighedstegn netop hvis $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Lad $f(x) = x^2$ være defineret på de reelle tal. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er konveks da $f''(x) = 2 \geq 0$. Ifølge Jensens ulighed er

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n},$$

og dermed

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2 \le \frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}$$

med lighedstegn netop hvis $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Dette giver det ønskede.

Opgave 3.12.7. Funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x}$ er konkav på $\mathbb{R}_+$ da $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} < 0$ for $x \in \mathbb{R}_+$. Ifølge Jensens ulighed med tallene $a+1, b+1, c+1$ er

$$\sqrt[3]{\frac{a+1+b+1+c+1}{3}} \ge \frac{\sqrt[3]{a+1}+\sqrt[3]{b+1}+\sqrt[3]{c+1}}{3},$$

hvilket viser det ønskede.

Opgave 3.12.8. Funktionen $f(x) = x^4$ er konveks på $\mathbb{R}_+$ da $f''(x) = 12x^2 > 0$ for $x \in \mathbb{R}_+$. Ifølge Jensens ulighed med tallene $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ gælder derfor at

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3}\right)^4$$

hvilket viser det ønskede.

Opgave 3.12.9. Funktionen $f(x) = (x + x^{-1})^2$ er konveks på $\mathbb{R}_+$ da $f''(x) = 2 + 6x^{-4} > 0$ for $x \in \mathbb{R}_+$. Dermed giver Jensens ulighed at

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \ge 3\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{3}{a+b+c}\right)^2 = 3\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{3}.$$

Opgave 3.12.10. Vi skal vise at der for vilkårlige $2n$ reelle tal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ og $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gælder at

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Da begge sider er ikke-negative, kan vi kvadrere:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Ifølge Cauchy-Schwartz gælder at

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Dette giver det ønskede.

Opgave 3.12.11. Funktionen $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$ er konveks i $x \in]0;1[$ da

$$f''(x) = \frac{4-x}{4(1-x)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

for $x \in]0;1[$. Ifølge Jensens ulighed gælder dermed at

$$\frac{a_1}{\sqrt{1-a_1}} + \frac{a_2}{\sqrt{1-a_2}} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{1-a_n}} = n \cdot \frac{f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_n)}{n} \ge$$

$$n \cdot f\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

Opgave 3.12.12. Ifølge AG-uligheden er $a^2 + bc \ge 2a\sqrt{bc}$. Dermed er

$$\frac{2a}{a^2+bc} + \frac{2b}{b^2+ca} + \frac{2c}{c^2+ab} \le \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Ifølge omarrangeringsuligheden er

$$\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{b}} \le \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Da udtrykket er symmetrisk, kan vi antage at $c \ge b \ge a$, og altså $\frac{1}{ab} \ge \frac{1}{ac} \ge \frac{1}{bc}$. Ved at benytte omarrangeringsuligheden endnu engang fås

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b}{ab} + \frac{c}{bc} + \frac{a}{ac} \le \frac{c}{ab} + \frac{b}{ca} + \frac{a}{bc}.$$

Dermed er det ønskede vist.

Opgave 3.12.13. Ifølge Cauchy-Schwarz med vektorerne $(\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z})$ og $\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}, \sqrt{\frac{y-1}{y}}, \sqrt{\frac{z-1}{z}}\right)$ er

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} &\le \sqrt{x+y+z}\sqrt{\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}}\\ &= \sqrt{x+y+z}\sqrt{3-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}\\ &= \sqrt{x+y+z}\end{aligned}$$

da $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$.

Opgave 3.12.14. Lad $x_1, x_2, \dots, x_n$ og $y_1, y_2, \dots, y_n$ være reelle tal. Hvis vi kan vise at

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right), \quad (*)$$

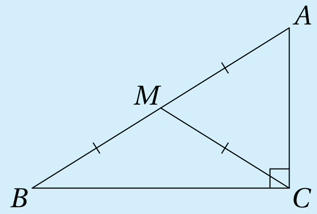
er sand, da må Cauchy-Schwarz også være sand. Omarrangeringsuligheden siger at hvis vi har reelle tal $a_1, a_2, \dots, a_m$ og en permutation af dem $a_1', a_2', \dots, a_m'$, da er

$$\sum_{i=1}^m a_i a_i' \le \sum_{i=1}^m a_i^2. \quad (**)$$

Hvis vi betragter de n^2 reelle tal $x_i y_j$ hvor $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, da er højresiden i (*) netop $\sum (x_i y_j)^2$, dvs. den svarer til højresiden i (**), mens venstresiden i (*) er $\sum (x_i y_j)(x_j y_i)$ dvs. den svarer til venstresiden i (**), hvor permutationen er den der bytter om på $x_i y_j$ og $x_j y_i$. Dermed har vi vist Cauchy-Schwarz.

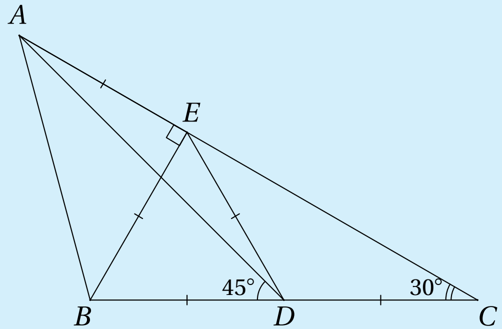
Opgave 4.1.1. Betragt en retvinklet trekant ABC, hvor vinkel C er ret, og lad M være midtpunktet af hypotenusen AB. Fra sætning 4.1.1 i) ved vi at trekant AMC er ligebenet med $|AM| = |CM|$.

Antag først at kateten AC er halvt så lang som hypotenusen. Da er $|AC| = |AM| = |CM|$. Det viser at trekant AMC er en ligesidet trekant, dvs. alle vinkler er 60°. Altså er $\angle ABC = 30°$.



Antag nu omvendt at $\angle ABC = 30°$. Da er $\angle CAB = 60°$, og da trekant AMC er ligebenet, må $\angle ACM = \angle CAM = 60°$, dvs. trekant AMC er ligesidet. Det medfører at $|AC| = |AM| = \frac{1}{2}|AB|$, og altså at kateten AC er halvt så lang som hypotenusen AB.

Opgave 4.1.2. Da $\angle BCE = 30°$, er trekant CBE en 30°-60°-90°-trekant. Det betyder ifølge sætning 4.1.1 ii) at $|BE| = \frac{1}{2}|BC| = |BD|$. Da $\angle EBD = 60°$, må trekant BED være ligesidet, dvs. alle vinkler er 60°.



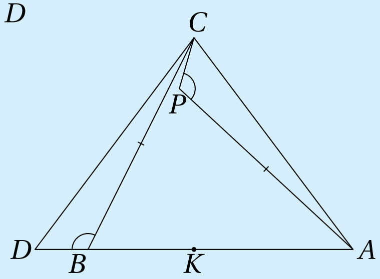
Nu er

$$\begin{aligned}&\angle ADE = \angle BDE - \angle ADB = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ,\\ &\angle DAE = 180^\circ - \angle AEB - \angle BED - \angle ADE = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 15^\circ.\end{aligned}$$

Altså er trekant AED ligebenet med $|AE| = |ED| = |EB|$. Det giver yderligere at trekant AEB er en ligebenet retvinklet trekant. Afslutningsvis er

$$\angle BAD = \angle BAE - \angle DAE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ.$$

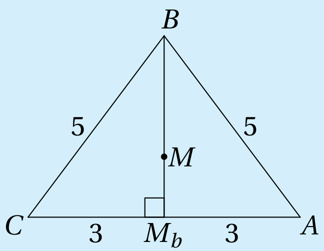
Opgave 4.1.3. Forlæng siden AB, og lad D være punktet på forlængelsen så K er midtpunktet af AD som vist.



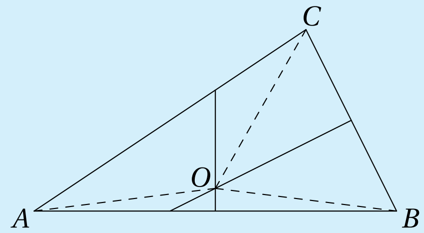
Nu er $|BD| = |AK| - |BK| = |KB| + |PC| - |KB| = |PC|$. Desuden er $\angle CBD = 180^\circ - \angle ABC = \angle APC$. Altså er trekant APC og trekant CBD kongruente da de har to parvis lige lange sider med samme mellemliggende vinkel. Det betyder at $|AC| = |CD|$. Derfor er trekant ACD en ligebenet trekant hvor K er midtpunktet af grundlinjen, og det betyder at CK er højde i trekanten. Altså er $\angle AKC$ ret.

Opgave 4.2.1. Da MN er midtpunktstransversal i trekant ABC, og PQ er midtpunktstransversal i trekant CDA, er både MN og PQ parallelle med AC og derfor også med hinanden. På samme måde ses at NP og MQ er parallelle. Derfor er firkant $MNPQ$ et parallelogram.

Opgave 4.2.2. Højden fra B må dele trekant ABC i to retvinklede trekanter. Længden af hypotenusen i de to trekanter er $a = c = 5$, og desuden deler de en katete. Dermed er de kongruente. Det betyder at højden fra B også er medianen fra B. Kald fodpunktet for medianen fra B på AC for M_b. Ifølge Pythagoras' sætning er $|BM_b| = 4$. Da medianerne deler hinanden i forholdet $1:2$, må $BM = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$.

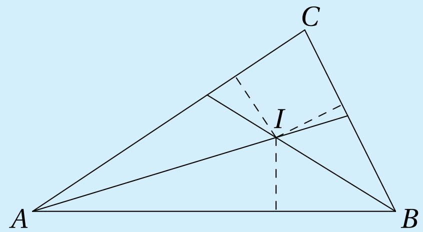


Opgave 4.2.3. Lad ABC være en trekant, tegn midtnormalerne på AB og BC, og kald deres skæringspunkt for O.



Da midtnormalen på AB er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til A og B, og midtnormalen på BC er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til B og C, må afstandene fra O til henholdsvis A, B og C være lige store. Punktet O er dermed centrum for den omskrevne cirkel, og midtnormalen på AC vil på tilsvarende vis gå gennem O.

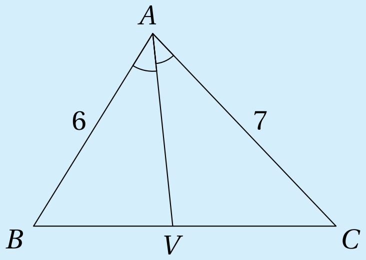
Opgave 4.2.4. Lad ABC være en trekant, tegn vinkelhalveringslinjerne fra A og B, og kald deres skæringspunkt for I.



Da vinkelhalveringslinjerne er det geometriske sted for de punkter der har samme afstand til vinklens ben, må afstandene fra I til alle tre sider være lige store. Punktet I er dermed centrum for den indskrevne cirkel, og vinkelhalveringslinjen fra C vil på tilsvarende vis gå gennem I.

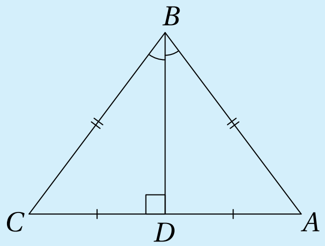
Opgave 4.2.5. Vinkelhalveringslinjen AV deler ifølge sætning 4.2.7 modstående side i samme forhold som forholdet mellem de hosliggende sider:

$$\frac{|CV|}{|BV|} = \frac{b}{c} = \frac{7}{6}.$$



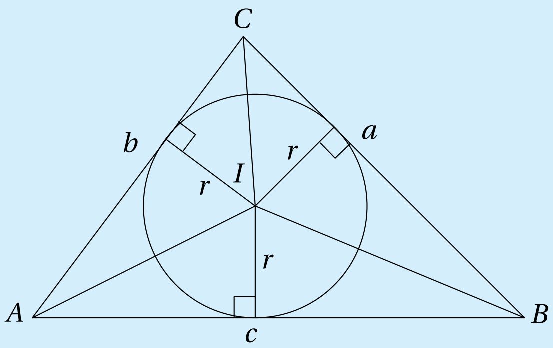
Da vi yderligere ved at $a = 8$, må $|CV| = 8 - |BV|$, hvilket giver $6 \cdot (8 - |BV|) = 7 \cdot |BV|$. Altså er $|BV| = \frac{48}{13}$.

Opgave 4.2.6. Lad ABC være en ligebenet trekant hvor $|AB| = |BC|$. Betragt først højden fra B på AC, og kald fodpunktet af højden for D.



Da er $\triangle BCD$ og $\triangle BAD$ begge retvinklede, hypotenuserne er lige lange, og de deler kateten BD. Dermed er de kongruente. Det betyder at D er midtpunktet af AC, og at $\angle ABD = \angle CBD$. Dermed er linjen BD både højden, vinkelhalveringslinjen og medianen fra vinkel B samt midtnormalen på AC.

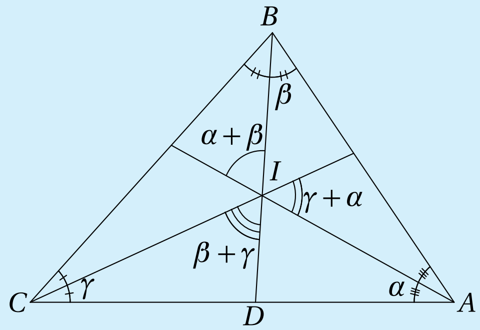
Opgave 4.2.7. Kald centrum for den indskrevne cirkel for I.



Arealet af trekant ABI er da $\frac{1}{2}rc$ da r er højden, og c er grundlinjen. Tilsvarende er arealet af trekant ACI og BCI henholdsvis $\frac{1}{2}rb$ og $\frac{1}{2}ra$. Da arealet af trekant ABC netop er summen af arealerne af disse tre trekanter, er

$$T = \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr.$$

Opgave 4.2.8. Lad D være fodpunktet for vinkelhalveringslinjen fra B.

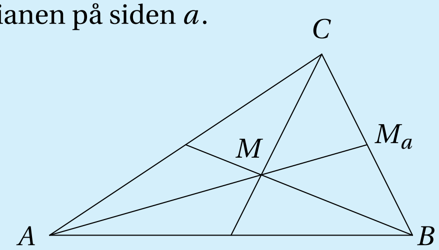


Vi udnytter vinkelsummen i en trekant til at få $\angle BDC = 180° - \beta - 2\gamma$. Dermed er

$$\angle DIC = 180° - (180° - \beta - 2\gamma) - \gamma = \beta + \gamma.$$

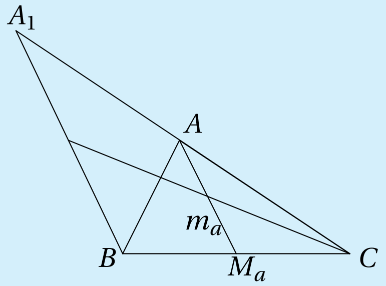
De andre vinkler findes på tilsvarende måde.

Opgave 4.2.9. Lad M betegne medianernes skæringspunkt og M_a betegne fodpunktet for medianen på siden a.



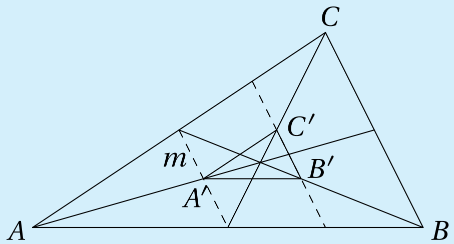
Da $3|MM_a| = |AM_a|$, er højden fra A i trekant ABC tre gange så stor som højden fra M i trekant MBC. Dermed udgør arealet af trekant MBC en tredjedel af arealet af trekant ABC. Desuden har trekant MM_aB og trekant MM_aC samme areal da de har samme højde og lige store grundlinjer. Dermed deler medianerne en trekant i seks små trekanter med samme areal.

Opgave 4.2.10. Kald fodpunktet af medianen m_a på a for M_a. Tegn en linje gennem B parallel med M_aA, og lad A_1 være skæringspunktet mellem denne linje og forlængelsen af siden AC.



Trekanterne ACM_a og A_1CB er per konstruktion ensvinklede med forholdet $1:2$, dvs. at $|CA| = |AA_1|$. Linjen gennem C som halverer m_a, halverer også A_1B da m_a er midtpunktstransversal i trekant A_1BC. Denne linje og AB er derfor begge medianer i trekant A_1BC, og linjen deler dermed AB i forholdet $1:2$.

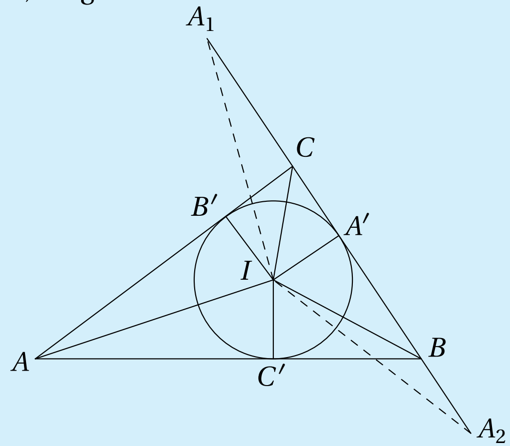
Opgave 4.2.11. Først viser vi at siderne i trekant $A'B'C'$ er parallelle med siderne i trekant ABC. Indtegn midtpunktstransversalen m gennem siderne AB og AC.



Denne midtpunktstransversal går gennem A' og er parallel med BC. Punkterne B' og C' ligger per konstruktion lige langt fra linjen m og linjen BC, og dermed er siden $B'C'$ parallel med BC. Tilsvarende gælder for de andre to sider i trekant $A'B'C'$. Vi har nu at siderne i trekant ABC og siderne i trekant $A'B'C'$ er parallelle.

Da midtpunktstransversalen m deler siden AB på midten, må linjen $B'C'$ dele siden AB i forholdet $1:3$, dvs. at $|AB| = 4|A'B'|$. Dermed er forholdet mellem siderne i trekant $A'B'C'$ og siderne i trekant ABC $1:4$, dvs. at forholdet mellem arealerne er $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Arealet af trekant $A'B'C'$ er derfor $\frac{1}{16}$.

Opgave 4.2.12. Lad A', B' og C' være den indskrevne cirkels røringspunkter med henholdsvis a, b og c.

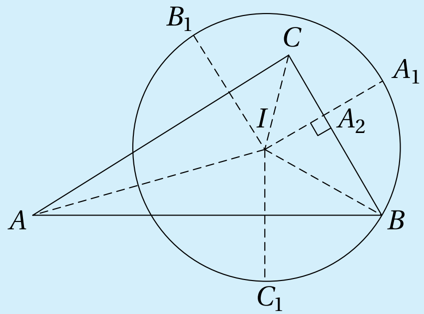


Trekanterne $IA'A_1$, $IA'A_2$, $IB'A$ og $IC'A$ er kongruente, da de alle er retvinklede, $|A'I| = |B'I| = |C'I|$ og $|IA| = |IA_1| = |IA_2|$. Dermed er

$$|A_1A_2| = |A_1A'| + |A'A_2| = |B'A| + |AC'|.$$

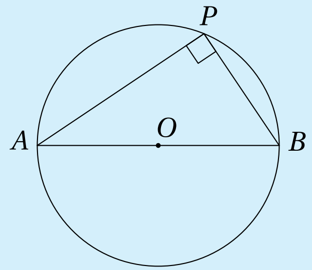
På tilsvarende vis fås $|B_1B_2| = |A'B| + |BC'|$ og $|C_1C_2| = |B'C| + |CA'|$. Dette giver det ønskede.

Opgave 4.2.13. Lad A_2 være skæringspunktet mellem IA_1 og BC.



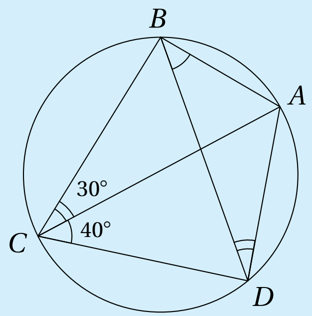
Da A_1 er spejlingen af I i siden CB, står IA_1 vinkelret på BC og $|IA_1| = 2|IA_2|$. Dermed er trekant BA_2I er retvinklet, og $|IB| = |IA_1| = 2|IA_2|$. Da hypotenusen er dobbelt så lang som kateten IA_2, følger det af sætning 4.1.1 at $\angle IBA_2 = 30°$. Fordi BI er vinkelhalveringslinje, kan vi nu konkludere at $\angle ABC = 60°$.

Opgave 4.3.1. Vinklen $\angle APB$ er halvt så stor som den tilsvarende centervinkel $\angle AOB$, dvs. den er ret netop når $\angle AOB = 180°$, og dermed netop når AB er en diameter.

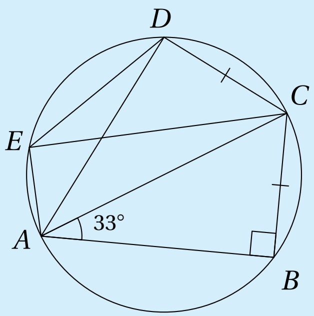


Opgave 4.3.2. Tegn linjen BD. Sætningen om periferivinkler giver at $\angle ADB = \angle ACB = 30°$ og $\angle ABD = \angle ACD = 40°$. Dermed er

$$\angle BAD = 180° - \angle ADB - \angle ABD = 180° - 30° - 40° = 110°.$$



Opgave 4.3.2

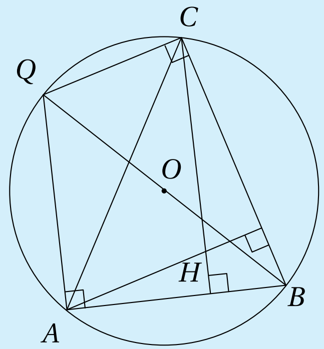


Opgave 4.3.3

Opgave 4.3.3. Da vinkel $\angle ABC$ er ret, må AC være diameter i cirklen ifølge korollar 4.3.2. Det betyder at $\angle AEC = 90°$ da den spænder over en diameter. Ifølge sætningen om periferivinkler er $\angle CED = \angle BAC = 33°$ da de spænder over samme buelængde fordi $|BC| = |CD|$. Samlet er

$$\angle DEA = \angle DEC + \angle CEA = 33° + 90° = 123°.$$

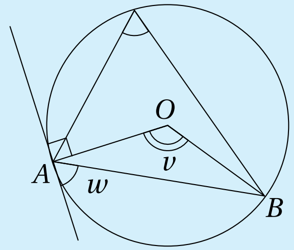
Opgave 4.3.4. Da BQ er diameter i den omskrevne cirkel, står QC vinkelret på CB og er dermed parallel med AH da AH også står vinkelret på CB.

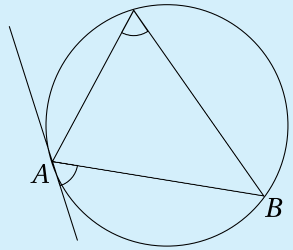


På samme måde ses at QA er parallel med CH. Dermed er $AQCH$ et parallelogram.

Opgave 4.3.5. Vi skal vise at korde-tangentvinklen w er halvt så stor som den centervinkel v der spænder over korden. Linjestykket fra centrum til tangentens røringspunkt står vinkelret på tangenten. Da trekant AOB er ligebenet med $|AO| = |BO|$ fordi de begge er radier i den omskrevne cirkel, er

$$w = 90° - \angle OAB = 90° - \frac{180° - v}{2} = \frac{v}{2}.$$



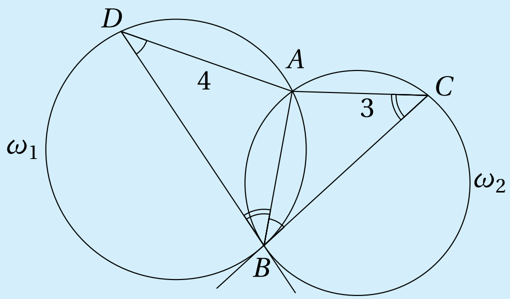


Den omvendte sætning om korde-tangent-vinkler: Ifølge det vi netop har vist, danner tangenten gennem punktet A på cirkelperiferien sammen med korden AB en vinkel der er lige så stor som den periferivinkel der spænder over korden AB. Linjen gennem A, der også danner denne vinkel med korden AB, må derfor være sammenfaldende med tangenten, dvs. den tangerer cirklen.

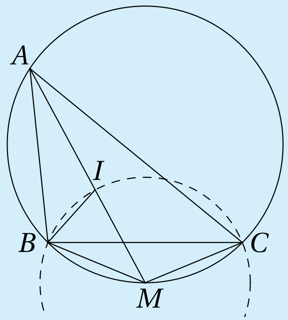
Opgave 4.3.6. Ifølge sætning 4.3.3 om korde-tangentvinkler er $\triangle ABD \sim \triangle ACB$. Dette giver

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

dvs. $|AB|^2 = |AC||AD| = 12$, og altså $|AB| = \sqrt{12}$.



Opgave 4.3.7. Da AI er vinkelhalveringslinje i trekant ABC, må M være midtpunktet af cirkelbuen BC. Dermed er $|BM| = |CM|$. Lad som sædvanlig α, β og γ være de halve vinkler.

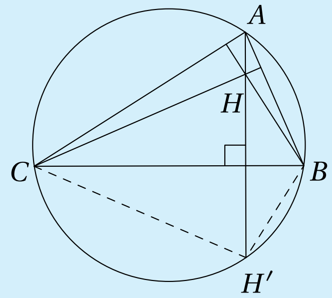


Vi mangler at bevise at $|IM| = |BM|$. Ved at benytte sætningen 4.2.10 om vinkler ved I fås at $\angle BIM = \alpha + \beta$. Da periferivinkler der spænder over samme bue, er lige store, fås

$$\angle MBI = \angle MBC + \angle CBI = \angle MAC + \beta = \alpha + \beta.$$

Dermed er $|IM| = |BM|$, og M er centrum for cirklen gennem B, C og I.

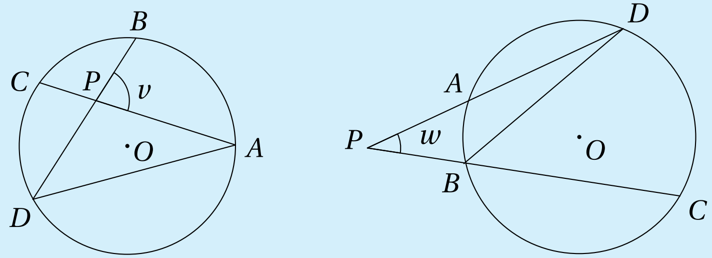
Opgave 4.3.8. Vi viser det i tilfældet hvor ABC er en spidsvinklet trekant. Lad H' være skæringen mellem AH og den omskrevne cirkel til trekant ABC.



Da er $\angle H'CB = \angle H'AB = 90° - \angle ABC = \angle HCB$. Da HA står vinkelret på BC, følger det at H' er spejlingen af H i siden BC. Beviset foregår stort set på samme måde hvis trekant ABC er stumpvinklet.

Opgave 4.3.9. Vinkel v: Betragt trekant ADP. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

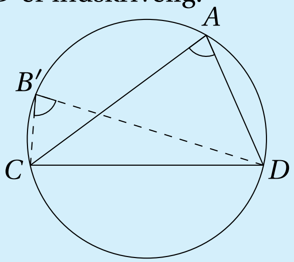
$$v = 180° - \angle APD = \angle PDA + \angle PAD = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}.$$



Vinkel w: Bemærk først at $\angle PBD = 180° - \angle DBC = 180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$. Betragt nu trekant PBD. Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er

$$w = 180° - \angle ADB - \angle PBD = 180° - \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \left(180° - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}\right) = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{2}.$$

Opgave 4.4.1. Først viser vi at iii) medfører i). Lad $ABCD$ være en firkant hvor $\angle CAD = \angle CBD$. Tegn den omskrevne cirkel til trekant ACD, og lad B' være skæringspunktet mellem BD og den omskrevne cirkel. Da B' ligger på cirkelperiferien, er $\angle CB'D = \angle CAD = \angle CBD$. Trekanterne CDB og CDB' er dermed kongruente da de også har vinklen ved D fælles og siden CD. Dermed er $B = B'$, og firkant $ABCD$ er indskrivelig.

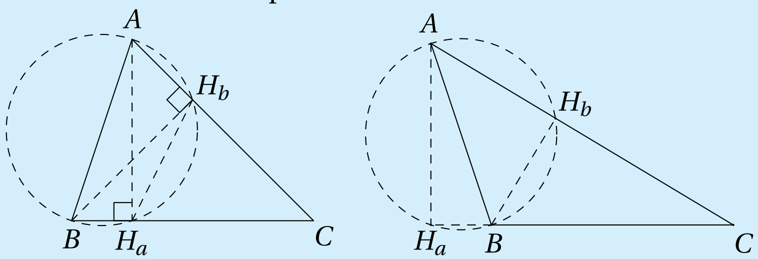


Til slut viser vi at i) medfører iii). Lad omvendt $ABCD$ være en indskrivelig firkant. Da gælder ifølge sætningen om periferivinkler at $\angle CAD = \angle CBD$.

Opgave 4.4.2. Vi ser først på tilfældet hvor trekant ABC er spidsvinklet. Firkant ABH_aH_b er indskrivelig ifølge sætningen om indskrivelige firkanter da $\angle AH_aB = 90° = \angle AH_bB$. Da ABH_aH_b er indskrivelig, må

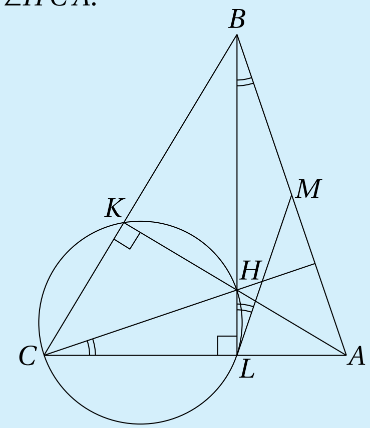
$$\angle CH_aH_b = 180° - \angle BH_aH_b = \angle CAB.$$

Dermed er $\triangle CAB$ ensvinklet med $\triangle CH_aH_b$. Beviset foregår stort set tilsvarende hvis trekanten er stumpvinklet.



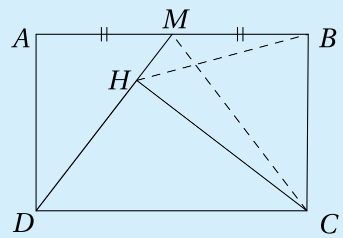
Opgave 4.4.3. Da firkant AH_bH_aB er indskrivelig, er $\angle AH_aH_b = \angle ABH_b$. Tilsvarende er $\angle AH_aH_c = \angle ACH_c$. Da $\triangle ABH_b$ og $\triangle ACH_c$ er retvinklede og har vinkel A fælles, er de ensvinklede, og dermed er $\angle ABH_b = \angle ACH_c$. Samlet er AH_a vinkelhalveringslinje i $\triangle H_aH_bH_c$.

Opgave 4.4.4. Kald højdernes skæringspunkt for H. Da firkant $CKHL$ er indskrivelig, ligger H på den omskrevne cirkel til trekant CKL. Da højderne skærer hinanden i samme punkt, er linjen CH også højde i trekanten. Derfor er $\angle ABL = 90° - \angle BAC = \angle HCA$.



Da M er midtpunktet af hypotenusen i den retvinklede trekant ALB, er $\angle ABL = \angle MLB$. Dermed er vinklen mellem linjen ML og korden HL den samme som periferivinklen $\angle HCL$ der spænder over korden HL. Altså er ML tangent til cirklen ifølge den omvendte sætning om korde-tangentvinkler. Helt tilsvarende vises at MK er tangent til cirklen.

Opgave 4.4.5. Da $\angle MHC = \angle MBC = 90°$, er firkant $MHCB$ indskrivelig ifølge sætningen om indskrivelige firkanter.



Ved at bruge sætningen om indskrivelige firkanter og sætningen om periferivinkler fås

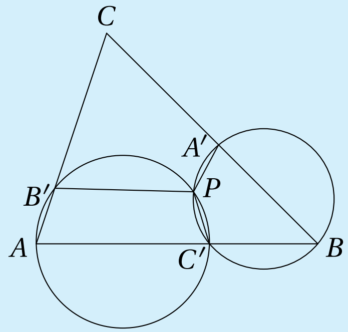
$$\angle BCH = 180° - \angle BMH = \angle AMD = \angle BMC = \angle BHC,$$

hvilket viser at $|BC| = |BH|$.

Opgave 4.4.6. Betragt de omskrevne cirkler til $\triangle AB'C'$ og $\triangle BC'A'$, og kald deres andet skæringspunkt for P. Vi viser at firkant $A'CB'P$ er indskrivelig da det viser det ønskede. Sætningen om indskrivelige firkanter giver

$$\angle CB'P = 180^\circ - \angle AB'P = \angle AC'P = 180^\circ - \angle BC'P = \angle BA'P = 180^\circ - \angle PA'C.$$

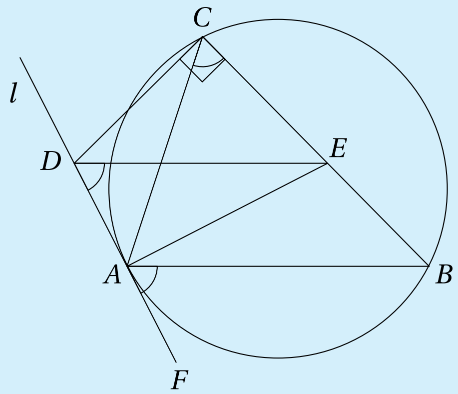
Dette viser at firkant $A'CB'P$ er indskrivelig.



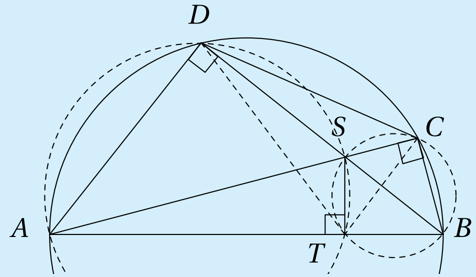
Opgave 4.4.7. Da linjen DE er parallel med AB, giver sætningen om korde-tangent-vinkler at

$$\angle ADE = \angle FAB = \angle ACE.$$

Det betyder ifølge sætningen om indskrivelige firkanter at firkant $AECD$ er indskrivelig, og dermed yderligere at $\angle DAE$ er ret. Da linjen fra centrum af cirklen til røringspunktet for en tangent står vinkelret på tangenten, betyder det at centrum O for den omskrevne cirkel til trekant ABC ligger på linjen AE.



Opgave 4.4.8. Vinkel ADB og vinkel ACB er rette da de spænder over en diameter i cirklen.

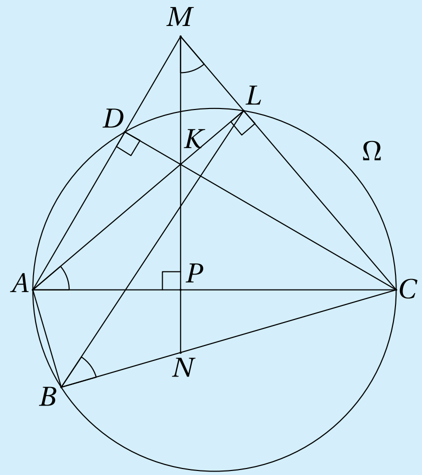


Firkanterne $ADST$ og $BCST$ er derfor indskrivelige da de har to modstående rette vinkler, og firkant $ABCD$ er pr. konstruktion indskrivelig. Dermed er

$$\angle CTS = \angle CBS = \angle CBD = \angle CAD = \angle SAD = \angle STD,$$

hvilket viser at linjen ST halverer vinkel $\angle CTD$.

Opgave 4.4.9. Bemærk først at $\angle CDA$ og $\angle CLA$ begge er rette da de spænder over diameteren i Ω. Altså er firkant $KDML$ indskrivelig. Lad P være skæringspunktet mellem AC og MN. Da K er højdernes skæringspunkt i trekant AMC, må $\angle APN$ være ret. Det betyder at $\triangle PCM$ og $\triangle LCA$ er ensvinklede da de deler vinkel C og begge har en ret vinkel. Dermed er $\angle LAC = \angle CMP$.



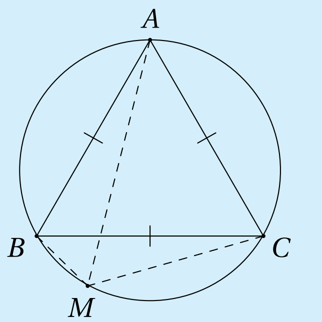
Vi ved yderligere pga. periferivinkler at $\angle LAC = \angle LBC$, dvs.

$$\angle LBN = \angle LBC = \angle LAC = \angle CMP = \angle LMN,$$

hvilket ifølge sætningen om indskrivelige firkanter viser at firkant $BNLM$ er indskrivelig.

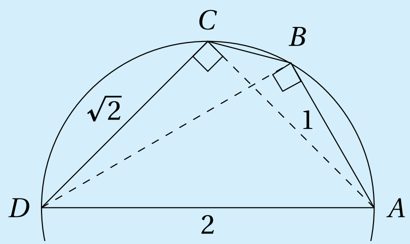
Opgave 4.4.10 Ifølge Ptolemæus' sætning gælder at

$$|MA||BC| = |MB||AC| + |MC||AB|.$$



Da trekant ABC er ligesidet, fås $|MA| = |MB| + |MC|$.

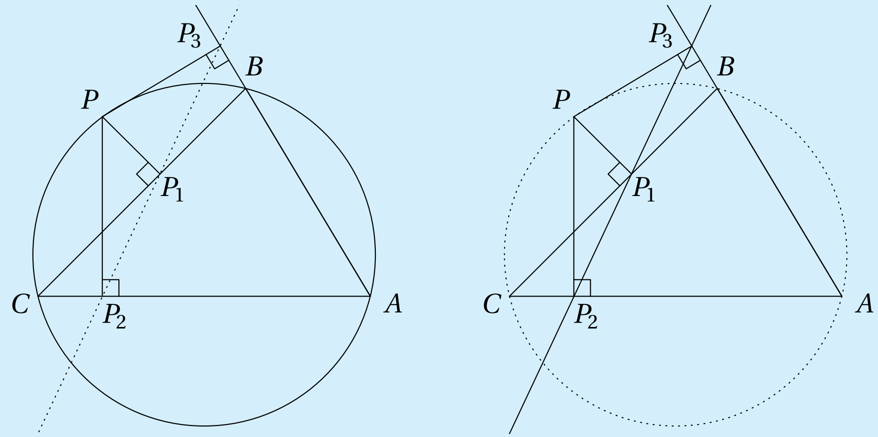
Opgave 4.4.11 Bemærk at AD er diameter i cirklen, og dermed at trekanterne ACD og ABD er retvinklede.



Pythagoras' sætning giver dermed at $|BD| = \sqrt{3}$ og $|CD| = \sqrt{2}$. Ved at anvende Ptolemæus' sætning får vi nu at

$$|BC| = \frac{|AC||BD| - |AB||CD|}{|AD|} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}.$$

Opgave 4.4.12. Antag først at P er et punkt på den omskrevne cirkel til trekant ABC, og antag uden tab af generalitet at P ligger på buestykket BC så projektionen P_2 af P på linjen AC ligger på linjestykket AC, mens projektionen P_3 af P på linjen AB ikke ligger på linjestykket AB, men dets forlængelse.



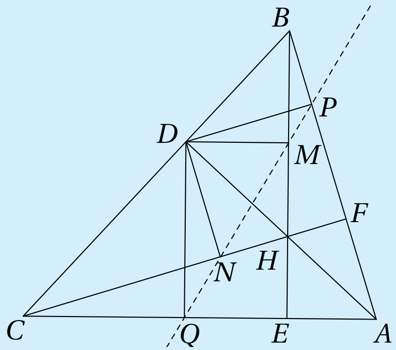
Firkant PCP_2P_1 er indskrivelig da begge diagonaler står vinkelret på en side, og dermed er $\angle CP_1P_2 = \angle CPP_2$. Firkant PP_1BP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette, og dermed er $\angle BP_1P_3 = \angle BPP_3$. Firkant PP_2AP_3 er indskrivelig da to modstående vinkler er rette. Da firkant $ABPC$ pr. antagelse er indskrivelig, er $\angle P_3PP_2 = 180° - \angle BAC = \angle BPC$. Af dette følger at $\angle BPP_3 = \angle CPP_2$, og samlet at $\angle CP_1P_2 = \angle BP_1P_3$, dvs. at punkterne P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje.

Antag omvendt at de tre projektioner P_1, P_2 og P_3 ligger på en ret linje. For nemheds skyld antager vi at vi har samme konfiguration som før, men altså hvor vi denne gang ved at P_1, P_2 og P_3 ligger på linje. Firkanterne PCP_2P_1, PP_1BP_3 og AP_3PP_2 er oplagt indskrivelige, og dermed er

$$\begin{aligned}\angle CPB &= \angle CPP_2 + \angle P_2PP_3 - \angle BPP_3 \\ &= \angle CP_1P_2 + (180° - \angle P_2AP_3) - \angle BP_1P_3 = 180° - \angle CAB.\end{aligned}$$

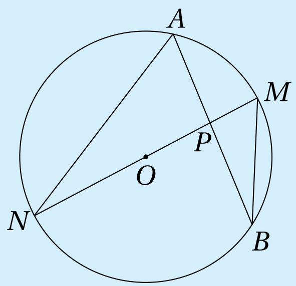
Det viser at P ligger på den omskrevne cirkel til trekant ABC.

Opgave 4.4.13. Firkant $CDHE$ er indskrivelig da den har to modstående rette vinkler. Dermed ligger D på den omskrevne cirkel til trekant CHE, hvilket betyder at Q, M og N ligger på en linje ifølge sætning 4.4.5 om Simsonlinjen.



Tilsvarende ligger D på den omskrevne cirkel til trekant HFB hvilket betyder at M, N og P ligger på linje. Dette viser samlet at alle fire punkter P, Q, M og N ligger på en ret linje.

Opgave 4.5.1. Lad P være et punkt inden i cirklen så $P \neq O$, og lad l være en linje gennem P som skærer cirklen i punkterne A og B.

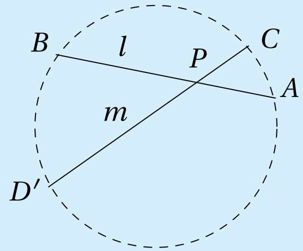


Tegn linjen gennem P og O, og kald skæringspunkterne med cirklen for M og N. Trekanterne $\triangle AMP$ og $\triangle NBP$ er ensvinklede ifølge sætningen om periferivinkler. Altså er

$$|AP||BP| = |MP||NP| = (r - |OP|)(r + |PO|) = r^2 - |PO|^2 = -\mathrm{Pow}(P, \omega).$$

Lad nu m være endnu en linje gennem P som skærer cirklen i punkterne C og D. Ifølge det vi netop har vist, må også $|CP||DP| = -\mathrm{Pow}(P, \omega)$, dvs. at $|AP||BP| = |CP||DP|$.

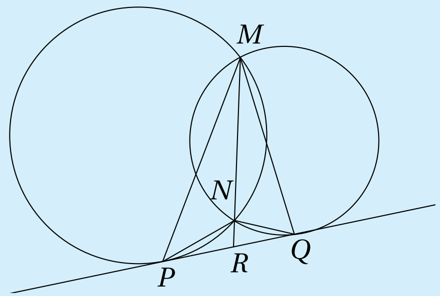
Opgave 4.5.2. Antag at A og B ligger på l på hver sin side af P, og at C og D ligger på m på hver sin side af P. Antag yderligere at $|PA||PB| = |PC||PD|$.



Lad ω være cirklen gennem A, B og C, og lad D' være skæringen (forskellig fra C) mellem ω og linjen m. Da P ligger på korden AB, må P være et indre punkt i ω. Dermed ligger P også på korden CD', dvs. at D og D' ligger på samme side af P på linjen m. Ifølge sætningen om et punkts potens er $|PA||PB| = |PC||PD'|$. Dermed er $|PD| = |PD'|$ og altså $D = D'$. De fire punkter A, B, C og D ligger derfor på samme cirkel.

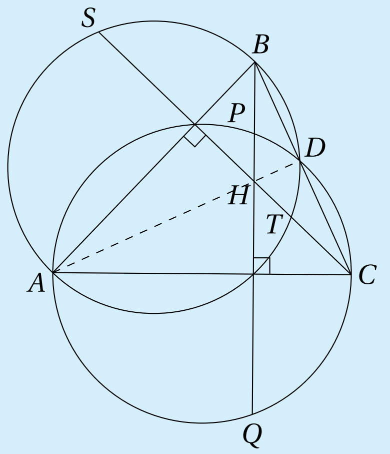
Beviset føres stort set tilsvarende når både A og B ligger på samme side af P, og C og D ligger på samme side af P. I dette tilfælde er P blot et punkt der ligger uden for cirklen.

Opgave 4.5.3. Lad R være skæringspunktet mellem NM og PQ. Ifølge sætningen om punkts potens er $|PR|^2 = |RN||RM| = |QR|^2$, og altså $|PR| = |QR|$.



Dermed har $\triangle MRP$ og $\triangle MRQ$ samme areal da de har samme højde og grundlinje, og $\triangle NPR$ og $\triangle NQR$ samme areal af samme årsag. Altså har $\triangle MNP$ og $\triangle MNQ$ også samme areal.

Opgave 4.5.4. Lad D være skæringspunktet mellem de to cirkler. Vinklerne $\angle ADB$ og $\angle ADC$ er begge rette da de spænder over en diameter, og dermed er D fodpunktet for højden fra A på siden BC.



Højdernes skæringspunkt H ligger derfor på AD, hvilket ifølge sætningen om et punkt potens giver at

$$|HS||HT| = |HA||HD| = |HP||HQ|.$$

Dermed ligger P, Q, S og T på en cirkel ifølge den omvendte sætning om et punkts potens.

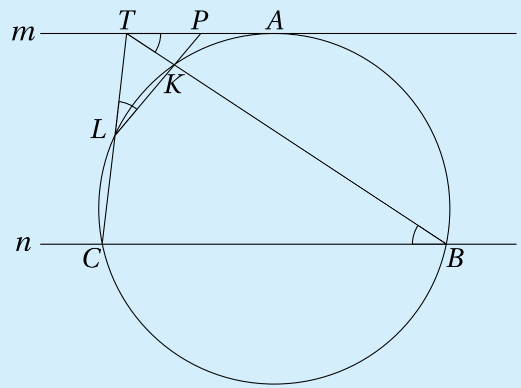
Opgave 4.5.5. Lad P være skæringspunktet mellem linjerne LK og m. Da m og n er parallelle, er $\angle CBT = \angle KTP$. Firkant $BCLK$ er indskrivelig, dvs. modstående vinkler har sum 180°, og derfor får vi yderligere at $\angle TLP = \angle CBT = \angle KTP$. Dermed er $\triangle TPK \sim \triangle LPT$. Dette giver at

$$|TP|^2 = |PK||PL|.$$

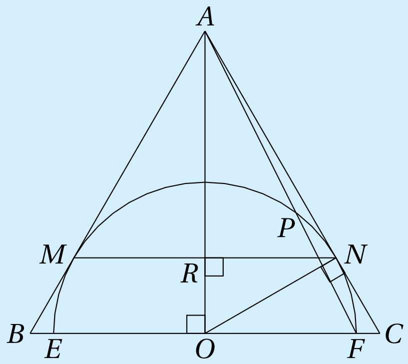
Dette kombineret med sætningen om punkts potens viser at P's potens i forhold til cirklen er

$$|AP|^2 = |PK||PL| = |TP|^2.$$

Altså er P midtpunktet af AT.



Opgave 4.5.6. Lad O være centrum for halvcirklen, og lad R være skæringspunktet mellem AO og NM. Punktet R er da midtpunktet af MN da figuren er symmetrisk omkring linjen AO. Trekanterne $\triangle ARN$ og $\triangle ANO$ er ensvinklede da de begge er retvinklede og desuden deler vinklen ved A. Altså er $|AN|^2 = |AR||AO|$.

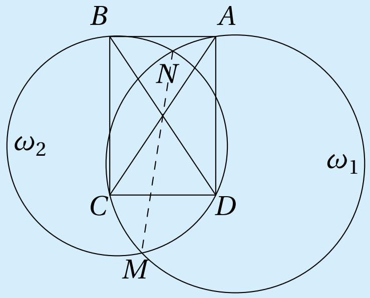


Sætningen om et punkts potens giver nu at

$$|AP||AF| = |AN|^2 = |AR||AO|.$$

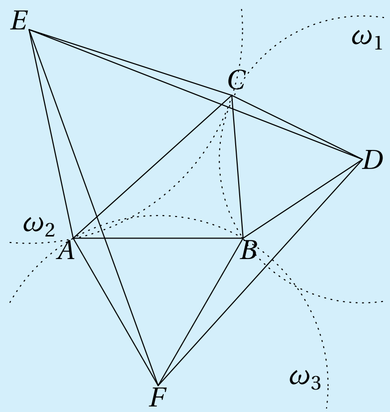
Af den omvendte sætning om et punkt potens følger nu at firkant $PFOR$ er indskrivelig, og altså at $\angle RPF$ er ret. Vinkel $\angle EPF$ er også ret da den spænder over en diameter, og derfor må P, R og E ligge på linje. Det betyder at linjen PE deler linjestykket NM på midten.

Opgave 4.6.1. Radikalaksen for ω_1 og ω_2 er linjen MN. Kald den omskrevne cirkel til rektanglet $ABCD$ for ω.



Radikalaksen for ω og ω_1 er AC, og radikalaksen for ω og ω_2 er BD. Ifølge sætningen om radikalcentrum skærer de tre radikalakser hinanden i et punkt, eller også er de alle tre parallelle. Det sidste er ikke muligt her da AC og BD er diagonalerne i et rektangel. Dermed ligger skæringspunktet mellem AC og BD på linjen MN.

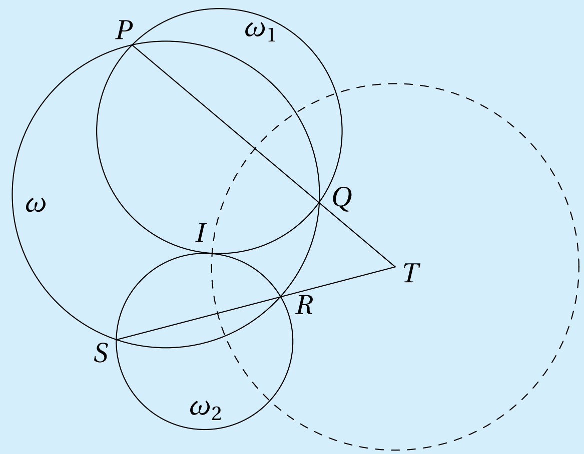
Opgave 4.6.2. Lad ω_1 være cirklen med centrum i D gennem B og C, ω_2 være cirklen med centrum i E gennem A og C, og ω_3 cirklen med centrum i F gennem A og B. Radikalaksen for ω_1 og ω_2 er linjen gennem deres fælles punkt C som står vinkelret på linjen gennem deres centre, dvs. vinkelret på linjen DE. Tilsvarende er radikalaksen for ω_1 og ω_3 linjen gennem B vinkelret på linjen DF, og radikalaksen for ω_2 og ω_3 linjen gennem A vinkelret på EF.



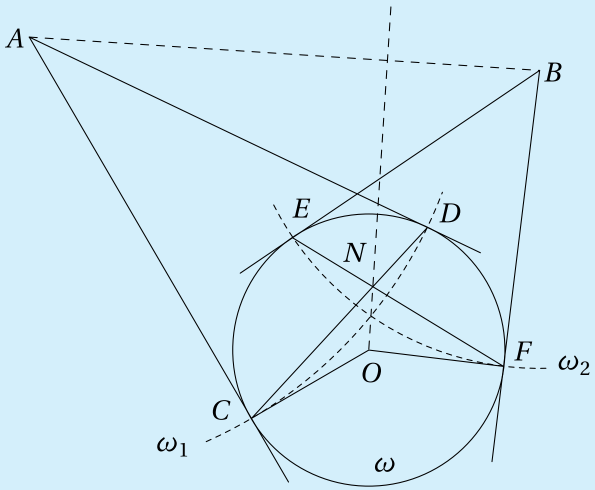
Ifølge sætningen om radikalcentrum skærer de tre linjer hinanden i et punkt, hvis de ikke alle er parallelle. Det sidste er ikke en mulighed da de tre linjer står vinkelret på hver sin side i trekant DEF.

Opgave 4.6.3. Lad T være skæringspunktet mellem PQ og RS, og lad ω_1 og ω_2 være to cirkler gennem henholdsvis P og Q samt R og S som tangerer hinanden i I. Da T ligger på radikalaksen for ω og ω_1, samt på radikalaksen for ω og ω_2, må T være radikalcentrum for de tre cirkler, hvilket betyder at $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$ uanset valget af ω_1 og ω_2. Dvs. at L er en delmængde af cirklen med T som centrum og $\sqrt{|TP||TQ|}$ som radius.

Lad omvendt I være et punkt på denne cirkel som ikke ligger på nogen af linjerne SR og PQ og ikke på cirklen $PQRS$. Da vil T være radikalcentrum for cirklen ω samt de omskrevne cirkler til $\triangle PQI$ og $\triangle RSI$. Fordi $|TI| = \sqrt{|TP||TQ|}$, må de omskrevne cirkler til $\triangle PQI$ og $\triangle RSI$ tangere hinanden i I ifølge sætningen om et punkts potens. Dermed er L cirklen med centrum i T og radius $\sqrt{|TP||TQ|}$ fraregnet punkterne på linjerne RS og PQ og punkterne på cirklen $PQRS$. (Disse punkter opfylder oplagt ikke betingelsen).



Opgave 4.6.4. Kald cirklen gennem C, E, D, F for ω, cirklen med centrum i A og radius $|AC|$ for ω_1 og cirklen med centrum i B og radius $|BF|$ for ω_2. Vi ønsker at vise at O og N ligger på radikalaksen for ω_1 og ω_2 da dette viser at ON står vinkelret på linjen AB.



Da AC er tangent til ω og dermed står vinkelret på CO, må CO være tangent til ω_1. Tilsvarende er FO tangent til ω_2. Derfor er

$$P(O,\omega_1) = |OC|^2 = |OF|^2 = P(O,\omega_2),$$

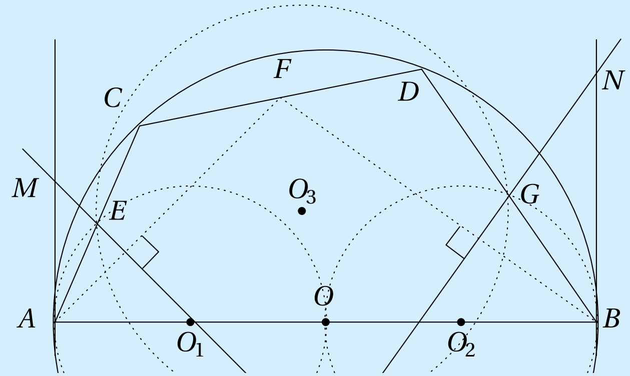
dvs. at O ligger på radikalaksen for ω_1 og ω_2. Desuden er

$$P(N,\omega_1) = -|CN||ND| = P(N,\omega) = -|EN||FN| = P(N,\omega_2).$$

Dermed ligger også N på radikalaksen for ω_1 og ω_2, og det ønskede er vist.

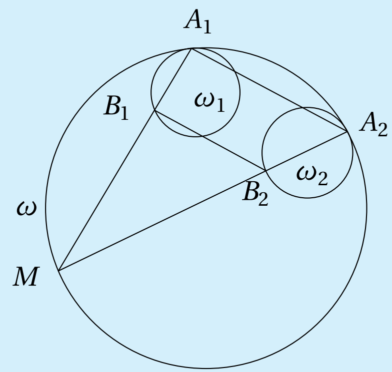
Opgave 4.6.5. i) Kald centrene i cirklerne ω_1, ω_2 og ω_3 for henholdsvis O_1, O_2 og O_3. Firkant $EFGO$ er ifølge sætning 4.2.3 pr. konstruktion et parallelogram, diagonalerne skærer dermed hinanden på midten, og O_3 er derfor deres skæringspunkt. Linjen gennem O_1O_3 er derfor midtpunktstransversal i trekant AFO, og altså parallel med AF, og dermed ortogonal med ME. Punktet E ligger på ω_1 da E er midtpunktet af korden AC i cirklen c, og vi dermed ved at $\angle AEO = 90°$. Radikalaksen for ω_1 og ω_3 er derfor ME da E ligger på begge cirkler, og ME står vinkelret på linjen gennem cirklernes centre. Tilsvarende ses at NG er radikalakse for ω_2 og ω_3.

ii) Radikalaksen for ω og ω_1 er deres fælles tangent i A, og dermed er radikalcentrum for ω, ω_1 og ω_3 skæringen mellem denne tangent og radikalaksen for ω_1 og ω_3, dvs. punktet M. På tilsvarende vis ses at radikalcentrum for c, ω_2 og ω_3 er N.



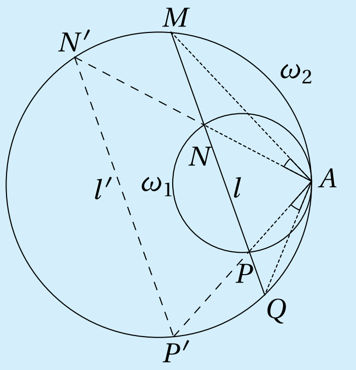
iii) Af ii) følger at MN er radikalakse for ω og ω_3, og dermed står NM vinkelret på OO_3. Vi ved desuden at CD står vinkelret på OO_3, da OO_3 halverer CD. Dermed er MN parallel med CD.

Opgave 4.7.1. Der findes en multiplikation omkring A_1 med multiplikationsfaktor k_1 som fører ω_1 i ω, og tilsvarende en multiplikation omkring A_2 med multiplikationsfaktor k_2 som fører ω_2 i ω.



Da ω_1 og ω_2 har samme radius, betyder det at $k_1 = k_2$. Altså vil en multiplikation omkring M med multiplikationsfaktor $\frac{k_1}{k_1-1}$ afbilde B_1 i A_1 og B_2 i A_2, og dermed B_1B_2 i A_1A_2. De to linjer er derfor parallelle.

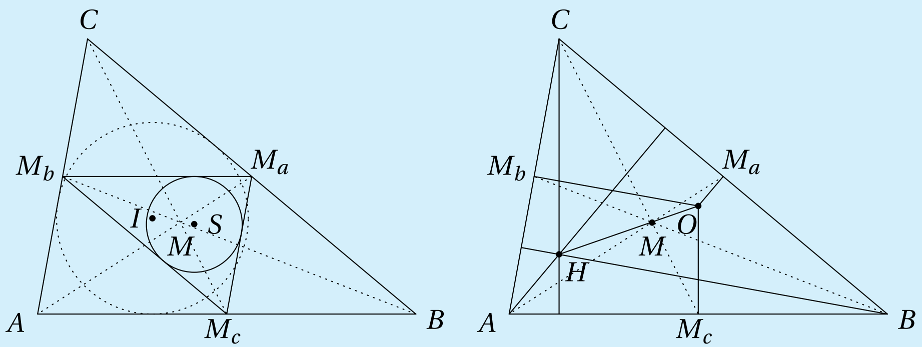
Opgave 4.7.2. Der findes en multiplikation omkring A som afbilder ω_1 i ω_2. Ved denne multiplikation afbildes N i N' og P i P' som vist på figuren.



Linjerne l og l' er parallelle, og cirkelbuerne $\overset{\frown}{MN'}$ og $\overset{\frown}{QP'}$ er derfor lige store. Altså er $\angle MAN = \angle PAQ$.

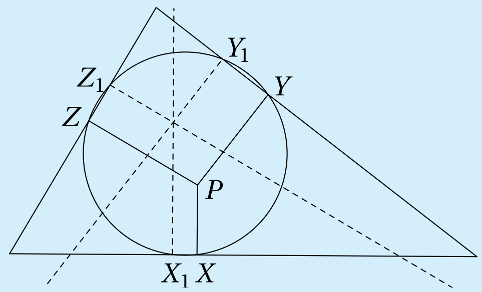
Opgave 4.7.3 Da medianerne deler hinanden i forholdet 1 : 2, vil en multiplikation i M med multiplikationsfaktor $k = -\frac{1}{2}$ føre A i M_a, B i M_b og C i M_c.

Trekant ABC føres derfor i trekant $M_aM_bM_c$, og det vil sige at den indskrevne cirkel for trekant ABC føres i Spieker-cirklen. Dermed føres I i S, og punkterne I, M og S ligger på linje med $2|MS| = |MI|$.



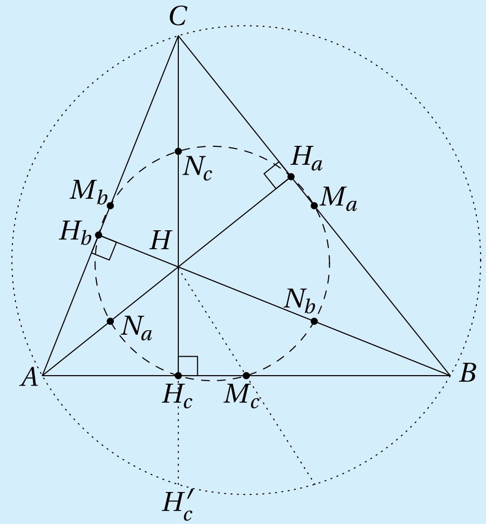
Ved samme multiplikation føres højderne i midtnormalerne. Dermed føres H i O, og punkterne H, M og O ligger på linje med $2|MO| = |MH|$.

Opgave 4.7.4. Linjen gennem X_1 vinkelret på a og linjen gennem X vinkelret på a er parallelle, og da de begge står vinkelret på korden XX_1 i cirklen, må de have samme afstand til cirklens centrum.



Ved en multiplikation om cirklens centrum med multiplikationsfaktor -1 føres linjen gennem X_1 vinkelret på a derfor i linjen gennem X vinkelret på a. Tilsvarende føres linjen gennem Y_1 vinkelret på b i linjen gennem Y vinkelret på b, og linjen gennem Z_1 vinkelret på c i linjen gennem Z vinkelret på c. Da de tre linjer føres i tre linjer som skærer hinanden i et punkt, må de tre linjer også selv skærer hinanden i et punkt.

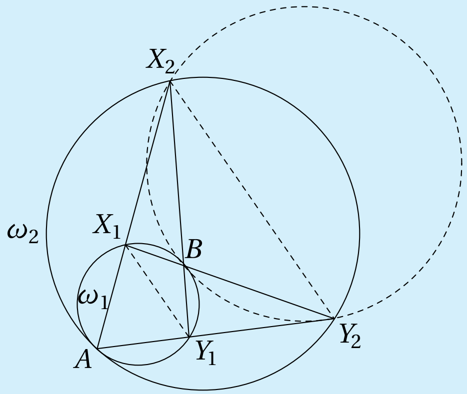
Opgave 4.7.5. Ifølge sætning 4.3.5 ligger spejlingen af H i linjen AB på den omskrevne cirkel til trekant ABC.



Ved en multiplikation omkring H med multiplikationsfaktor 2 bliver H_a, H_b og H_c derfor afbildet i punkter på den omskrevne cirkel. Punkterne N_a, N_b og N_c bliver afbildet i henholdsvis A, B og C. Lad H'_c være det punkt som H_c afbildes i på den omskrevne cirkel. Punktet M_c bliver afbildet i spejlingen af H'_c i midtnormalen til AB der går gennem M_c, og dette punkt ligger også på den omskrevne cirkel da den er symmetrisk om midtnormalen til AB. Altså afbildes M_a, M_b og M_c også i den omskrevne cirkel ved en multiplikation i H med multiplikationsfaktor 2.

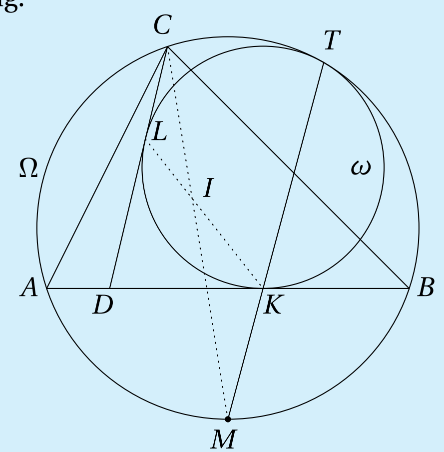
De ni punkter H_a, H_b, H_c, M_a, M_b, M_c, N_a, N_b og N_c bliver dermed alle afbildet på den omskrevne cirkel, og derfor ligger de alle på samme cirkel.

Opgave 4.7.6. Der findes en multiplikation omkring A som afbilder ω_1 i ω_2, og multiplikationsfaktoren for denne afbildning kaldes k. Dermed er $|X_2Y_2| = k|X_1Y_1|$.



Trekanterne X_1BY_1 og Y_2BX_2 er derfor ensvinklede med $|BY_2| = k\cdot|BX_1|$ og $|BX_2| = k\cdot|BY_1|$. En multiplikation omkring B med multiplikationsfaktoren $-k$ fører dermed X_1 i Y_2 og Y_1 i X_2, og altså cirklen ω_1 i den omskrevne cirkel til BX_2Y_2. Dermed tangerer ω_1 og den omskrevne cirkel til BX_2Y_2 hinanden.

Opgave 4.7.7. i) Bemærk først at den multiplikation om T der fører ω i Ω, fører K i T. Det betyder at tangenten til Ω i M er parallel med AB, og dermed er M midtpunktet af buen $\overset{\frown}{AB}$ og altså superpunktet. Af samme årsag svarer korden TK i ω til korden TM i Ω, hvilket viser at $\angle MBT = \angle TKA = \angle BKM$. Dermed er $\triangle TMB \sim \triangle BMK$ da de deler vinkel i M. ii) Desuden ved vi at $\angle TCM = \angle TLK$, og altså at $\angle TCI = \angle TCM = \angle TLK = \angle TLI$, hvilket viser at firkant $CLIT$ er indskrivelig.



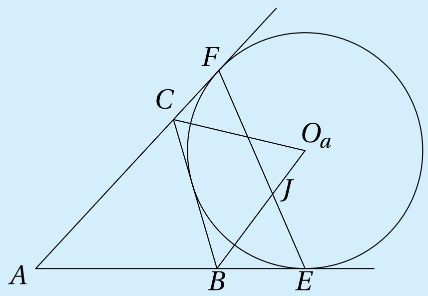
iii) For at vise at $\triangle MKI \sim \triangle MIT$ er det nok at vise at $\angle IKM = \angle TIM$ da trekanterne deler vinklen ved M. Ved at udnytte at firkant $CLIT$ er indskrivelig får vi

$$\angle TIM = 180^\circ - \angle CIT = 180^\circ - \angle CLT = 180^\circ - \angle LKT = \angle IKM.$$

vi) At $\triangle MKI \sim \triangle MIT$, giver at $|MK||MT| = |MI|^2$. Vi ved yderligere at $\triangle TMB \sim \triangle BMK$, og dermed $|MK||MT| = |MB|^2$, dvs. $|MI| = |MB|$. Desuden ved vi at superpunktet M er centrum for cirklen gennem A, B og centrum for den indskrevne cirkel til trekant ABC, og at dette centrum ligger på vinkelhalveringslinjen CM til vinkel C. Dette viser at I er centrum for den indskrevne cirkel.

Opgave 4.8.1. Lad 2α, 2β og 2γ være henholdsvis vinkel A, B og C. Trekant AEF er ligebenet, og derfor er

$$\angle AFE = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = \beta + \gamma.$$

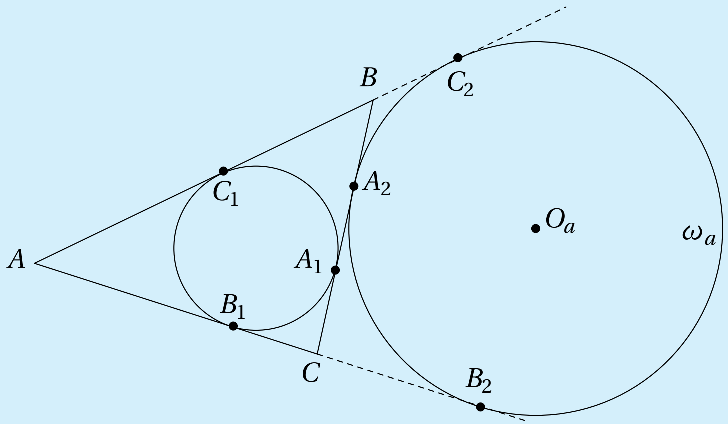


Da O_aB og O_aC er de ydre vinkelhalveringslinjer til henholdsvis vinkel B og C, er

$$\angle BO_aC = 180^\circ - \angle O_aBC - \angle O_aCB = 180^\circ - (\alpha+\gamma) - (\alpha+\beta) = \beta+\gamma.$$

Dette viser at firkant CJO_aF er indskrivelig, og dermed at $\angle BJC = \angle O_aFC = 90^\circ$.

Opgave 4.8.2. Lad A_1, B_1 og C_1 være røringspunkterne for den indskrevne cirkel med henholdsvis BC, AC og AB, og lad A_2, B_2 og C_2 være røringspunkterne mellem den ydre røringscirkel ω_a og henholdsvis BC, AC og BC.



Afstanden fra A til punkterne B_2 og C_2 er den samme da AB_2 og AC_2 er tangenter til ω_a. Dermed er

$$\begin{aligned}|AB_2| &= \frac{1}{2}(|AB_2|+|AC_2|) = \frac{1}{2}(|AC|+|CB_2|+|AB|+|AC_2|)\\ &= \frac{1}{2}(|AC|+|CA_2|+|AB|+|BA_2|) = s.\end{aligned}$$

Potensen af A mht. ω_a er $|AB_2|^2$. Altså er potensen af A mht. ω_a lig s^2.

Desuden er $|CA_2| = s-|AC| = s-(|CB_1|+|B_1A|)$. Da $s = |BA_1|+|CB_1|+|B_1A|$, er $|BA_1| = |CA_2|$. Altså ligger A_1 og A_2 symmetrisk på linjestykket BC omkring dets midtpunkt.

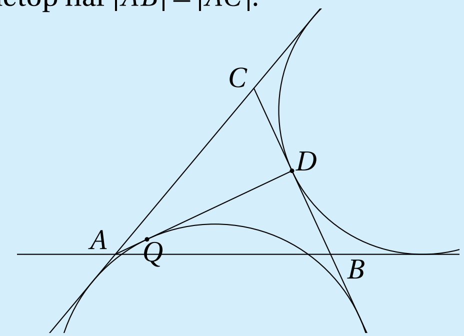
Opgave 4.8.3. Lad s være den halve omkreds i trekant ABC. Fra sætning 4.8.2 ved vi at

$$|DB| = s-|AB| \text{ og } |DC| = s-|AC|.$$

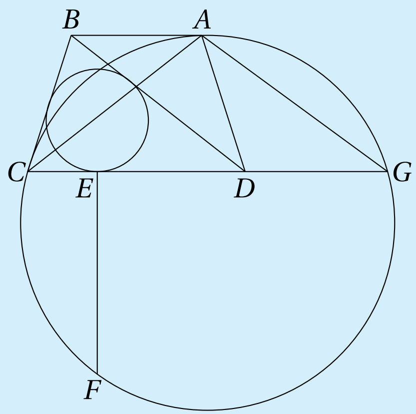
Det tilsvarende gælder for trekant ABD og trekant ACD, dvs.

$$\begin{aligned}|PD| &= s-|BD| = \frac{|AD|+|AB|-|BD|}{2} = \frac{|AD|+2|AB|-s}{2}\\ |QD| &= s-|CD| = \frac{|AD|+|AC|-|CD|}{2} = \frac{|AD|+2|AC|-s}{2}\end{aligned}$$

Dermed er $P=Q$ netop når $|AB|=|AC|$.



Opgave 4.8.4. Da trapezet $ABCD$ er symmetrisk omkring midtnormalen til CD, ligger røringspunktet mellem den indskrevne cirkel til trekant ACD og CD symmetrisk i forhold til E på linjestykket CD.

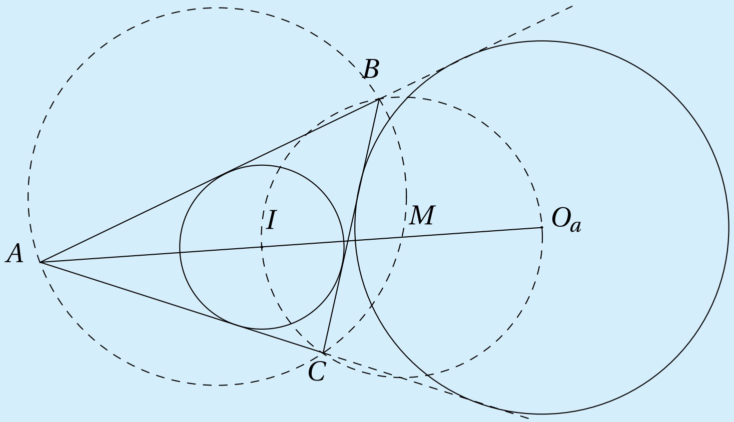


Fra sætning 4.8.2 ved vi at E er røringspunket for den ydre røringscirkel til trekant ACD til siden CD. Punktet F må derfor være centrum for denne ydre røringscirkel da F både ligger på vinkelhalveringslinjen fra A i trekant ACD, og EF står vinkelret på CD. Dette betyder at $\angle GCF$ er den ydre vinkelhalveringslinje til vinkel C i trekant ACD, og dermed at $\angle GCF = \frac{180^\circ - \angle ACD}{2}$. Da firkant $ACFG$ er indskrivelig, er

$$\begin{aligned}
\angle AGF = \angle 180^\circ - \angle ACF &= 180^\circ - \angle ACD - \angle GCF \\
&= 180^\circ - \angle ACD - \left(\frac{180^\circ - \angle ACD}{2}\right) \\
&= \left(\frac{180^\circ - \angle ACD}{2}\right) \\
&= \angle GCF = \angle GAF.
\end{aligned}$$

Dette viser det ønskede.

Opgave 4.8.5 Ifølge sætning 4.3.4 om superpunktet ligger punkterne B, C og I på en cirkel med M som centrum. Sæt $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ og $\angle ACB = 2\gamma$.

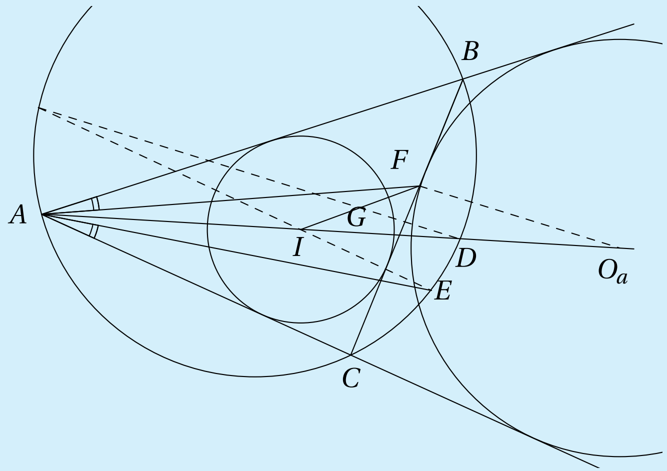


Ved yderligere at benytte sætning 4.2.10 og huske at BO_a er den ydre vinkelhalveringslinje til vinkel B fås

$$\begin{aligned}
\angle IO_aB = 180^\circ - \angle O_aBI - \angle O_aIB \\
&= 180^\circ - \angle O_aBC - \angle CBI - \angle O_aIB \\
&= 180^\circ - (\alpha + \gamma) - \beta - (\alpha + \beta) \\
&= \gamma = \angle BCI
\end{aligned}$$

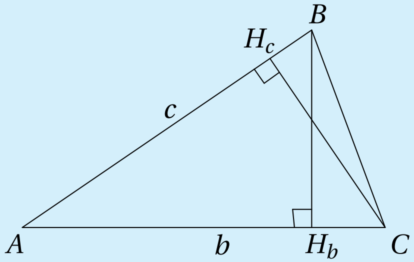
Dermed er firkant $BICO_a$ indskrivelig, og B, I, C og O_a ligger på en cirkel med M som centrum. Trekanterne $\triangle ACI$ og $\triangle AO_aB$ er ensvinklede da $\angle CAI = \angle O_aAB$ og $\angle BO_aA = \angle BO_aI = \angle BCI = \angle ACI$. Dermed er $|AI||AO_a| = |AB||AC|$.

Opgave 4.8.6. Lad O_a være centrum for den ydre røringscirkel til siden BC. Ifølge sætning 4.8.3 om den ydre røringscirkel og superpunktet er D centrum for cirklen gennem B, I C og O_a, og $|AI||AO_a| = |AB||AC|$. Trekanterne $\triangle ABF$ og $\triangle AEC$ er ensvinklede fordi $\angle BAF = \angle CAE$ per konstruktion, og $\angle ABF = \angle AEC$ da de spænder over samme buestykke.



Dermed er $|AF||AE| = |AB||AC| = |AI||AO_a|$, hvilket viser at $\triangle AO_aF$ og $\triangle AEI$ er ensvinklede. Da D er midtpunktet af IO_a, og G er midtpunktet af FI, er DG midtpunktstransversal i trekant $\triangle IO_aF$, dvs. $\angle ADG = \angle AO_aF = \angle AEI$, hvilket viser at $\angle AEI$ og $\angle ADG$ spænder over samme buestykke i Γ, og dermed at DG og EI skærer hinanden på Γ.

Opgave 4.9.1. Kald fodpunkterne for højderne i trekant ABC for H_a, H_b og H_c.



Da er $\triangle AH_aB$ og $\triangle AH_cC$ er ensvinklede, er

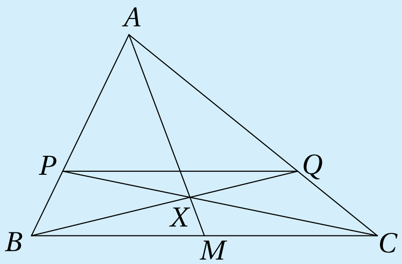
$$\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{c}{b}.$$

Det tilsvarende gælder for de andre sider. Derfor er

$$\frac{|AH_b|}{|H_bC|} \cdot \frac{|BH_c|}{|H_cA|} \cdot \frac{|CH_a|}{|H_aB|} = \frac{a\,b\,c}{a\,b\,c} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning går højderne dermed gennem samme punkt.

Opgave 4.9.2. Da PQ er paralleltransversal i trekant ABC, er $\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|BP|}{|CQ|}$ ifølge sætningen om transversaler. Kald skæringspunktet mellem AX og BC for M.

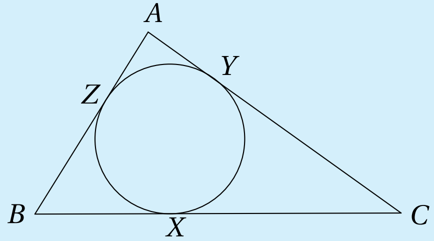


Ifølge Cevas sætning er

$$\frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AP|}{|PB|} \cdot \frac{|BM|}{|MC|} = 1.$$

Da $\frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AP|}{|PB|} = 1$, må $\frac{|BM|}{|MC|} = 1$, og AM deler dermed BC på midten.

Opgave 4.9.3. Da den indskrevne cirkel tangerer AB og AC, er afstanden fra A til de to røringspunkter Y og Z den samme. Altså er $|AY| = |AZ|$, og tilsvarende $|BX| = |BZ|$ og $|CX| = |CY|$.



Dermed er

$$\frac{|AZ|}{|ZB|} \cdot \frac{|BX|}{|XC|} \cdot \frac{|CY|}{|YA|} = 1.$$

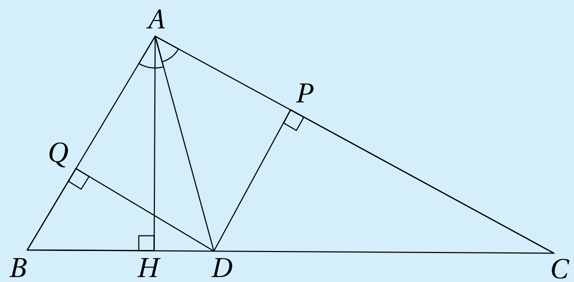
Ifølge Cevas sætning betyder dette at AX, BY og CZ skærer hinanden i et punkt.

Opgave 4.9.4. Kald røringscirklernes røringspunkter med siderne BC, AC og AB for henholdsvis A', B' og C' og den indskrevne cirkels røringspunkter med siderne BC, AC og AB for henholdsvis A_1, B_1 og C_1. Fra sætning 4.8.2 om de ydre røringscirkler ved vi at

$$\frac{|CB'|}{|B'A|} \cdot \frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|AC'|}{|C'B|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|} \cdot \frac{|CA_1|}{|A_1B|} \cdot \frac{|BC_1|}{|C_1A|} = 1.$$

Cevas sætning giver nu at de tre cevianer skærer hinanden i et punkt.

Opgave 4.9.5. Trekant APD og trekant AQD er kongruente da de har en fælles side AD, $\angle PAD = \angle QAD$ og $\angle APD = 90° = \angle AQD$, dvs. at $|AP| = |AQ|$.

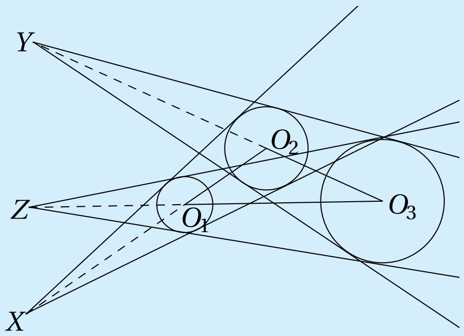


Trekant AHB og trekant DQB er ensvinklede da de begge har en ret vinkel samt den fælles vinkel B. Dermed er $\frac{|BQ|}{|BH|} = \frac{|BD|}{|AB|}$. Tilsvarende er $\frac{|CP|}{|CH|} = \frac{|CD|}{|AC|}$. Da AD er vinkelhalveringslinje, er $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$. Samlet er

$$\frac{|AP|}{|PC|} \cdot \frac{|CH|}{|HB|} \cdot \frac{|BQ|}{|QA|} = \frac{|CH|}{|PC|} \cdot \frac{|BQ|}{|HB|} = \frac{|AC|}{|CD|} \cdot \frac{|BD|}{|AB|} = 1.$$

Ifølge Cevas sætning skærer linjerne AH, BP og QC hinanden i et punkt.

Opgave 4.9.6 Kald centrene for de tre cirkler O_1, O_2 og O_3 og deres radier for r_1, r_2 og r_3. Ensvinklede trekanter giver at $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$, $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$ og $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$.



Betragt trekanten $O_1O_2O_3$. Punkterne X, Y og Z er punkter på henholdsvis linjerne O_1O_2, O_2O_3 og O_3O_1. Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at X, Y og Z ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} \cdot \frac{|O_2Y|}{|YO_3|} \cdot \frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(-\frac{r_2}{r_3}\right)\left(-\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Dermed ligger de tre punkter X, Y og Z på linje.

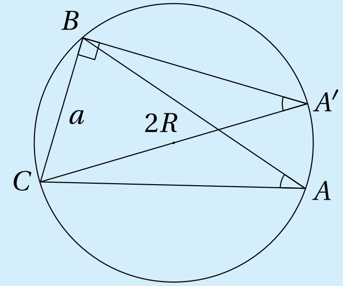
Opgave 4.9.7 Kald centrene for de tre cirkler O_1, O_2 og O_3 og deres radier for r_1, r_2 og r_3. Som i opgave 4.9.6 ses at $\frac{|XO_1|}{|XO_2|} = \frac{r_1}{r_2}$, $\frac{|YO_2|}{|YO_3|} = \frac{r_2}{r_3}$ og $\frac{|ZO_3|}{|ZO_1|} = \frac{r_3}{r_1}$. Betragt trekanten $O_1O_2O_3$. Punkterne X, Y og Z er punkter på henholdsvis linjerne O_1O_2, O_2O_3 og O_3O_1. Nu benytter vi Menelaos' sætning til at vise at X, Y og Z ligger på linje. Hvis vi regner med fortegn, er

$$\frac{|O_1X|}{|XO_2|} \cdot \frac{|O_2Y|}{|YO_3|} \cdot \frac{|O_3Z|}{|ZO_1|} = \left(-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(\frac{r_2}{r_3}\right)\left(\frac{r_3}{r_1}\right) = -1.$$

Dermed ligger de tre punkter X, Y og Z på linje.

Opgave 4.10.1. Lad $A'C$ være diameter i den omskrevne cirkel til trekant ABC. Da er

$$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}.$$



Tilsvarende ses at $\sin B = \frac{b}{2R}$ og $\sin C = \frac{c}{2R}$, og dermed i alt

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Ved at benytte formlen for arealet af en trekant $T = \frac{1}{2} b c \sin(A)$ fås yderligere

$$4RT = 2 \cdot 2R \cdot T = 2 \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \frac{1}{2} b c \sin A = abc.$$

Opgave 4.10.2. Bemærk først at

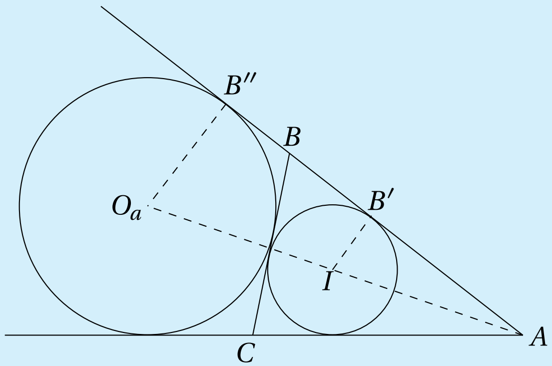
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a+b+c}{abc}.$$

Kald arealet af trekanten for T. Da er $a+b+c = \frac{2T}{r}$ og $abc = 4RT$. Vi har nu

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{2T}{r \cdot 4RT} = \frac{1}{2rR}.$$

som ønsket.

Opgave 4.10.3. Kald centrum for den indskrevne cirkel for I, og røringspunktet mellem den indskrevne cirkel og linjen AB for B'. Betragt den ydre røringscirkel til siden a, kald centrum for O_a, og kald røringspunktet mellem den ydre røringscirkel og linjen AB for B''.



Trekanterne $AB'I$ og $AB''O_a$ er oplagt ensvinklede. Desuden ved vi fra sætning 4.8.2 at $|AB'| = s-a$ og $|AB''| = s$. Dette giver $\frac{s-a}{r} = \frac{s}{r_a}$, og altså

$$T = sr = r_a(s-a).$$

Nu har vi

$$T = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c).$$

Fra Herons formel fås yderligere at

$$T^2 = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Dette giver samlet

$$T^2 = \frac{T^4}{T^2} = \frac{rsr_a(s-a)r_b(s-b)r_c(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = rr_ar_br_c.$$

Opgave 4.10.4. Kald trekanten ABC og de tre højder for h_a, h_b og h_c så $h_a = 12$, $h_b = 15$ og $h_c = 20$. Af ensvinklede trekanter følger at $\frac{a}{b} = \frac{h_a}{h_b}$, og altså $b = \frac{h_a}{h_b}a = \frac{4}{5}a$. Tilsvarende $c = \frac{h_a}{h_c} = \frac{3}{5}a$. Dermed er trekantens halve omkreds

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a + \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}a) = \frac{6}{5}a.$$

Arealet T af trekant ABC er derfor

$$T = \frac{1}{2}ah_a = 6a.$$

Vi ved yderligere ifølge Herons formel at

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{6}{5}a\cdot\frac{1}{5}a\cdot\frac{2}{5}a\cdot\frac{3}{5}a} = \frac{6}{25}a^2.$$

Altså er $a = 25$ og $T = 150$.

Opgave 4.10.5. Lad $n \geq 3$, og lad $n-1$, n og $n+1$ være sidelængderne i en trekant. Den halve omkreds er da $\frac{3n}{2}$. Ifølge Herons formel er arealet

$$T_n = \sqrt{\frac{3n}{2}\Big(\frac{3n}{2} - n + 1\Big)\Big(\frac{3n}{2} - n\Big)\Big(\frac{3n}{2} - n - 1\Big)} = \frac{n}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(n^2-4)}.$$

For $n = 4$ er $T = 6$, så vi har mindst en trekant der opfylder betingelserne. Vi viser nu at vi ud fra en trekant der opfylder betingelserne, kan konstruere endnu en trekant med den ønskede egenskab og større sidelængde. Dette giver nemlig at der findes uendeligt mange. Lad n være et lige tal, $n \geq 4$, og antag at $\frac{3}{4}(n^2-4)$ er et kvadrattal. Betragt trekanten med sidelængderne $m-1$, m og $m+1$ hvor $m = n^2-2$. Da er $m > n$, m er lige, og

$$\frac{3}{4}(m^2-4) = \frac{3}{4}(m-2)(m+2) = \frac{3}{4}(n^2-4)n^2.$$

Dermed er

$$T_m = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{3}{4}(m^2-4)}$$

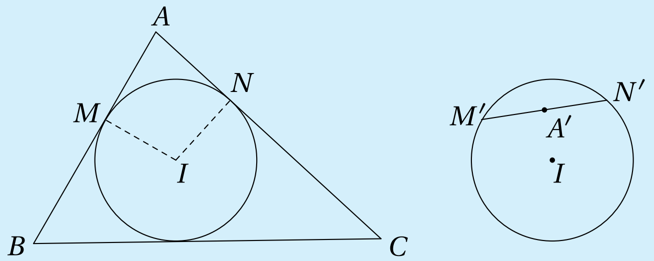
et helt tal. Der findes altså uendeligt mange trekanter med de ønskede egenskaber.

Opgave 4.11.1. Betragt diameteren i α hvis forlængelse går gennem O. Denne diameter vil af symmetrigrunde afbildes i diameteren til α', og da linjer gennem O afbildes på sig selv, følger det at centrum for α, centrum for α' og punktet O ligger på linje.

Opgave 4.11.2. Kald røringspunkterne mellem den ydre røringscirkel og linjerne AC og BC for henholdsvis M og N. Det er velkendt fra afsnittet om ydre røringscirkler at $|CM| = |CN| = s$. Punkterne M og N fikseres derfor ved inversionen, dvs. at den ydre røringscirkel afbildes i en cirkel gennem M og N

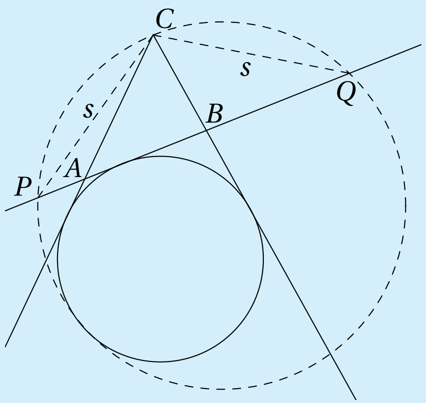
som tangerer billederne af linjerne AC og BC. Da AC og BC afbildes på sig selv, må også cirklen afbildes på sig selv.

Opgave 4.11.3. Kald centrum for den indskrevne cirkel for I. Firkant $AMIN$ er indskrivelig da $\angle AMI = \angle ANI = 90°$.



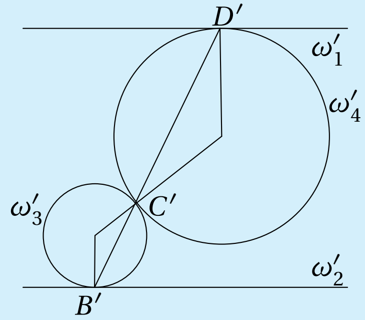
Cirklen AMN afbildes derfor i en linje gennem M og N da disse to punkter ligger på inversionscirklen. Billedet af A er altså skæringspunktet mellem linjestykket NM og linjen AI. Dette skæringspunkt er netop midtpunktet af MN, da AI er vinkelhalveringslinje til vinkel $\angle NAM$ og $|AM| = |AN|$.

Opgave 4.11.4.



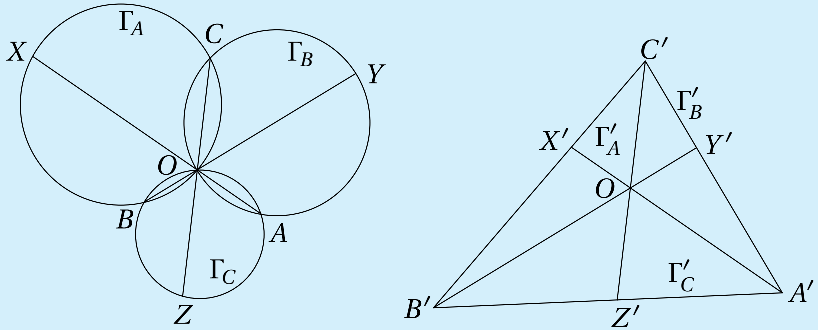
Ved inversion i en cirkel med centrum C og radius s afbildes den ydre røringscirkel på sig selv ifølge opgave 4.11.2. Vi skal altså vise at billedet af den omskrevne cirkel til trekant CPQ tangerer den ydre røringscirkel. Da P og Q afbildes på sig selv, vil den omskrevne cirkel til trekant CPQ afbildes i linjen PQ, som tangerer røringscirklen.

Opgave 4.11.5. Ved inversion i en cirkel med centrum i A afbildes ω_1 og ω_2 i to parallelle linjer, og ω_3 og ω_4 afbildes i to cirkler der tangerer hinanden samt henholdsvis billedet af ω_2 og ω_1.



Ved at regne på vinklerne ses let at B', C' og D' ligger på linje. Hvis denne linje går gennem A, vil A, B, C og D ligge på linje, og hvis linjen ikke går gennem A, vil A, B, C og D ligge på en cirkel.

Opgave 4.11.6. Ved inversion i punktet O afbildes cirklerne Γ_A, Γ_B og Γ_C i linjer således at $A'B'C'$ er en trekant, og $A'X'$, $B'Y'$ og $C'Z'$ er cevianer i trekanten som går gennem samme punkt O.

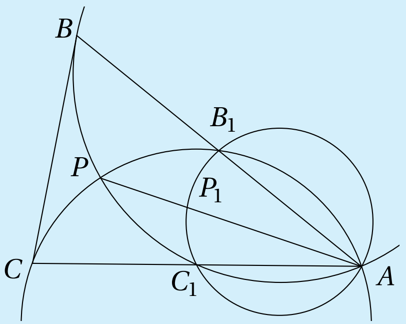


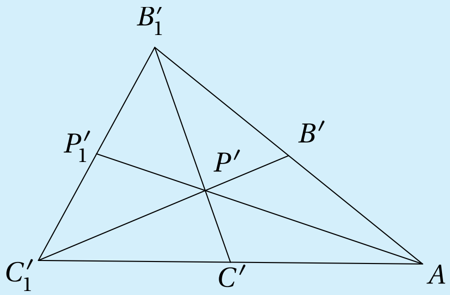
Ved at udnytte at $|AY| = \frac{r^2}{|AO||YO|}|A'Y'|$ osv. ses at ligningen vi skal vise, i det inverterede tilfælde er ækvivalent med

$$\frac{|A'Y'||B'Z'||C'X'|}{|A'Z'||B'X'||C'Y'|} = 1.$$

Dette er sandt ifølge Cevas sætning.

Opgave 4.11.7. Invertér i en cirkel med centrum i A og radius r. Linjerne AB, AP og AC afbildes på sig selv, cirklen gennem A, B, C_1, P afbildes på en linje gennem B', C_1' og P', cirklen gennem A, B_1, C, P afbildes i en linje gennem B_1', C' og P', og cirklen gennem $AB_1P_1C_1$ afbildes i en linje gennem B_1', C_1' og P_1'.





Da B_1 og C_1 er midtpunkt på henholdsvis AB og AC, er B' og C' midtpunkt på henholdsvis linjestykkerne AB_1' og AC_1'. Dermed er $AB_1'C_1'$ en trekant med $B_1'C'$ og $B'C_1'$ som medianer. Da linjen gennem A, P' og P_1' går gennem skæringspunktet mellem $B_1'C'$ og $B'C_1'$, er AP_1' også median i trekant $AB_1'C_1'$. Da medianerne skærer hinanden i forholdet $1:2$, får vi

$$2|AP| = 2\frac{r^2}{|AP'|} = 3\frac{r^2}{|AP_1'|} = 3|AP_1|.$$

Opgave 4.11.8. Da P er det centrale punkt, inverterer vi i en cirkel med centrum i P og radius r. Dermed er α_1' og α_3' to parallelle linjer, og α_2' og α_4' er to parallelle linjer. Firkant $A'B'C'D'$ er derfor et parallelogram.

Nu omformer vi på begge sider af af den identitet vi skal vise, til det inverterede tilfælde:

$$\frac{|AB||BC|}{|AD||DC|} = \frac{\frac{r^2|A'B'|}{|PA'||PB'|}\frac{r^2|B'C'|}{|PB'||PC'|}}{\frac{r^2|A'D'|}{|PA'||PD'|}\frac{r^2|D'C'|}{|PD'||PC'|}} = \frac{|A'B'||B'C'||PD'|^2}{|A'D'||D'C'||PB'|^2},$$

og

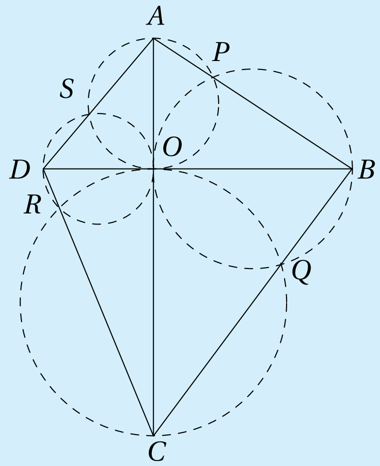
$$\frac{|PB|^2}{|PD|^2} = \frac{\frac{r^4}{|PB'|^2}}{\frac{r^4}{|PD'|^2}} = \frac{|PD'|^2}{|PB'|^2}.$$

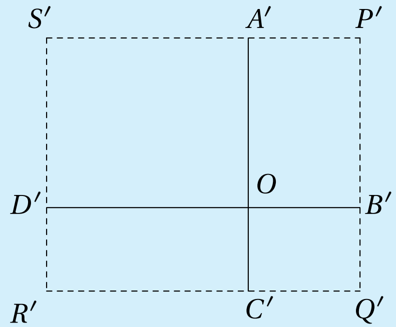
Identiteten som vi skal vise, reduceres dermed til

$$\frac{|A'B'||B'C'|}{|A'D'||D'C'|} = 1,$$

hvilket er sandt da $A'B'C'D'$ er et parallelogram.

Opgave 4.11.9. Bemærk først at firkanterne $APOS$, $BQOP$, $CROQ$ og $DSOR$ er indskrivelige, og kald deres omskrevne cirkler for henholdsvis α_A, α_B, α_C og α_D. Da AO og CO er diameter i henholdsvis α_A og α_C, tangerer α_A og α_C begge linjen BD i O. Tilsvarende tangerer α_B og α_C linjen AC i O.

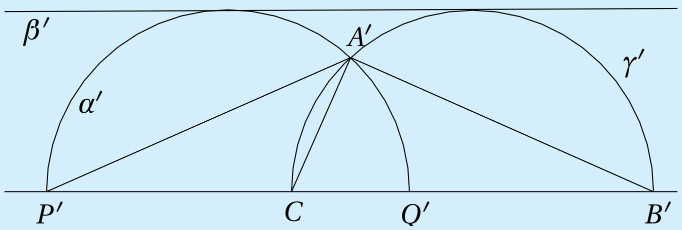




Inverter i en cirkel med centrum i O. Da afbildes α_A og α_C i to linjer som er parallelle med DB, og α_B og α_D i to linjer parallelle med AC. Skæringspunkterne mellem de fire cirkler er netop P, Q, R og S, dvs. at $P'Q'R'S'$ er et rektangel og dermed indskrivelig. Punkterne P, Q, R og S ligger derfor også på en cirkel.

Opgave 4.11.10. Inverter i en cirkel med centrum i A da α og α_0 derved afbildes i to parallelle linjer som alle billederne af cirklerne i følgen tangerer. Røringspunkternes billeder $P_1', P_2', P_3', \dots$ ligger derfor på en ret linje, dvs. at $P_1, P_2, P_3, \dots$ ligger på en cirkel gennem A.

Opgave 4.11.11. Inverter i en cirkel med centrum i C. Da afbildes linjen PQ på sig selv, cirklen β i en linje parallel med $P'Q'$, halvcirklen α i en halvcirkel som tangerer β' og har $P'Q'$ som diameter, og linjen γ i en cirkel som tangerer β' og har CB' som diameter.



Da linjen gennem P', C, Q' og B' er parallel med linjen β', må de to cirkler α' og γ' have samme radius. Derfor er

$$\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC,$$

dvs. at AC er vinkelhalveringslinje i trekant PAC.

Opgave 5.1.1. De 8×8 midterste perler kan vælges på 5^{64} måder da vi for hver af de 64 perler har fem valgmuligheder. Derudover kan farven på kanten vælges på fem måder. Der er altså samlet 5^{65} forskellige kombinationer.

Opgave 5.1.2. Det første ciffer må hverken være 0 eller 7, derfor er der otte valgmuligheder for det første ciffer. For hvert af de næste seks cifre er der ni valgmuligheder. Derfor er der $8 \cdot 9^6$ syvcifrede tal som ikke indeholder cifferet 7.

Opgave 5.1.3. Det første ciffer kan vælges på ni måder. Hvert af de følgende cifre kan vælges på ni måder da de ikke må være identiske med det foregående. Dermed er der 9^{10} ticifrede tal som ikke indeholder to ens nabocifre.

Opgave 5.1.4. Et tal er deleligt med 9 netop hvis tværsummen er det. For hvert af de første fem cifre er der ni valgmuligheder. Hvis tallet skal være deleligt med 9, er det sidste ciffer derimod entydigt fastlagt ud fra summen af de fem foregående. Dermed er der i alt 9^5 sekscifrede tal som er delelige med 9 og ikke indeholder cifferet 0.

Opgave 5.1.5. Da det er meget nemmere at tælle de tal som ikke indeholder to ens nabocifre, gør vi i stedet det. Der er 4^8 ottecifrede tal som kun består af cifrene 1, 2, 3 og 4. Hvis vi tæller antallet af disse som ikke indeholder to ens nabocifre, så har vi fire muligheder for at vælge det første ciffer, og derefter tre muligheder for hvert af de næste. Dette giver $4 \cdot 3^7$. Der er altså $4^8 - 4 \cdot 3^7$ ottecifrede tal som indeholder to ens nabocifre og kun består af cifrene 1, 2, 3 og 4.

Opgave 5.1.6. Kald delmængden som indeholder 1, for A, delmængden som indeholder 2, for B og den sidste for C. Der er nu to muligheder for at placere tallet 3 da ingen mængde må indeholde to på hinanden følgende tal. Da dette gælder for alle de resterende tal, er der altså $2^{100-2} = 2^{98}$ forskellige måder at fordele tallene på. I en enkelt af disse kombinationer bliver mængden C dog tom, dvs. resultatet er $2^{98} - 1$.

Opgave 5.1.7. For at tælle på hvor mange måder man kan fordele de 20 kugler i de fire forskellige skåle så der findes en skål som indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2, tæller vi i stedet antallet af måder at fordele de 20 kugler i de fire forskellige skåle, og trækker antallet af kombinationer fra hvor der ikke findes en skål som indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2. Der er i alt 4^{20} måder at fordele de 20 kugler på da vi for hver kugle har fire valgmuligheder. Hvis vi tæller antallet af disse kombinationer som ikke indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2, så har vi fire valgmuligheder for kugle nummer 1. Derefter er der tre valgmuligheder for kugle nummer 2 da den ikke må komme i samme skål som kugle nummer 1. For hver af de efterfølgende kugler er der netop to mulige skåle hvori de kan placeres, da de ikke må kommer i samme skål som nogen af de to foregående kugler. Dette giver $4 \cdot 3 \cdot 2^{18}$ kombinationer. Der er altså $4^{20} - 4 \cdot 3 \cdot 2^{18} = 2^{20}(2^{20} - 3)$ måder at placere de 20 kugler så der findes en skål der indeholder to kugler hvis numre har en differens på 1 eller 2.

Opgave 5.1.8. Et firecifret tal der opfylder det ønskede, kan ikke indeholde cifferet 0, dvs. det består af netop fire af cifrene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, og det er entydigt bestemt ud fra valget af disse fire cifre. Dermed er der i alt $\binom{9}{4} = 126$.

Opgave 5.1.9. Udvalgets medlemmer kan vælges på $\binom{25}{5}$ måder, og derudover er der fem måder at vælge udvalgets forperson på. Samlet er der derfor $5 \cdot \binom{25}{5}$ muligheder for at nedsætte udvalget.

Opgave 5.1.10. Man kan vælge de to pars talværdier på $\binom{13}{2} = 78$ måder og talværdierne for de sidste to kort på $\binom{11}{2} = 55$ måder. Når talværdierne er bestemt, kan de to par hver vælges på $\binom{4}{2} = 6$ måder og de to andre kort på hver $\binom{4}{1} = 4$ måder. Der er altså i alt $\binom{13}{2}\binom{11}{2}\binom{4}{2}^2\binom{4}{1}^2 = 78 \cdot 55 \cdot 6^2 \cdot 4^2 = 2.471.040$ måder.

Opgave 5.1.11. Der er i alt $\binom{52}{4} = 270725$ kombinationer af fire kort fra et almindeligt sæt spillekort med 52 kort, og alle disse er lige sandsynlige. Antallet af disse som indeholder fire forskellige talværdier, bestemmes: Der skal vælges fire blandt de 13 talværdier, og for hver af disse skal der vælges kulør. Dermed er der $\binom{13}{4}4^4 = 183040$ kombinationer med fire kort som ikke indeholder et par. Sandsynligheden for at de fire trukne kort indeholder fire forskellige talværdier, er derfor $\frac{183040}{270725} = \frac{2816}{4165}$.

Opgave 5.1.12. Vi betegner vejkrydsene (a, b) så Jonatan står ved $(0,0)$ og skal til $(4,6)$, og det spærrede vejkryds betegnes $(2,3)$. Jonatan skal gå fire gange op og seks gange til højre. Hvis man ser bort fra at det midterste vejkryds er spærret, kan dette gøres på $\binom{10}{4}$ måder. Nu trækker vi antallet af ruter gennem $(2,3)$ fra dette antal. Man kan komme fra $(0,0)$ til $(2,3)$ på $\binom{5}{2}$ måder, og tilsvarende fra $(2,3)$ til $(4,6)$ på $\binom{5}{2}$ måder. Dermed er det samlede antal ruter Jonatan kan vælge imellem, $\binom{10}{4} - \binom{5}{2}^2 = 210 - 100 = 110$.

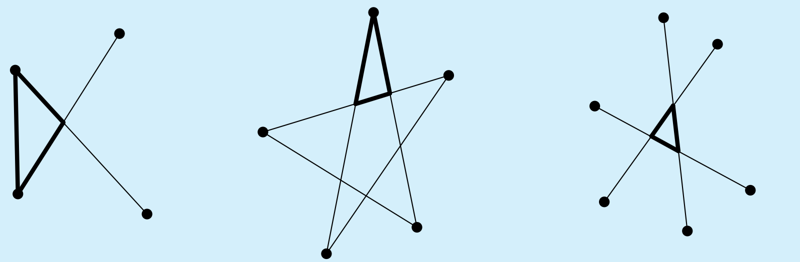
Opgave 5.1.13. Der er i alt $\binom{10}{3} = 120$ forskellige kombinationer af tre bolde. Ud af disse er der ifølge multiplikationsprincippet netop $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ med en bold af hver farve. Dermed er sandsynligheden $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$.

Opgave 5.1.14. Hvilke af de k søjler blandt de n der skal indeholde et tårn, kan vælges på $\binom{n}{k}$ måder. Tilsvarende kan man på $\binom{m}{k}$ vælge hvilke k blandt de m rækker der skal indeholde et tårn. Når man placerer et tårn i den første af de valgte søjler, skal man vælge et felt blandt felterne i de k udvalgte rækker. Når man derefter placerer et tårn i den næste valgte søjle, skal man vælge et felt blandt felterne på de $k-1$ resterende rækker der stadig mangler et tårn, osv. Dermed kan de k tårne placeres på $\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!$ måder.

Opgave 5.1.15. i) For hvert par af hjørner er der en diagonal, på nær hvis hjørnerne er nabohjørner. Da der er n par af nabohjørner, er der i alt $\binom{n}{2} - n$ diagonaler.

ii) Hvert skæringspunkt mellem to diagonaler kan på entydig måde repræsenteres ved de fire hjørner som de to diagonaler forbinder. Dermed er der $\binom{n}{4}$ skæringspunkter mellem diagonaler.
iii) Vi tilføjer diagonalerne en efter en for at tælle hvor mange dele der kommer i alt. Til at starte med er der én del. For hver gang man tegner en ny diagonal, opstår der en del mere samt en del mere for hvert skæringspunkt denne diagonal danner med en anden diagonal. Der er $\binom{n}{2} - n$ diagonaler og $\binom{n}{4}$ skæringspunkter mellem diagonaler, dvs. at polygonen deles i $1 + \binom{n}{2} - n + \binom{n}{4}$ dele.
iv) Antallet af trekanter der har alle tre hjørner i polygonens hjørner, er $\binom{n}{3}$. Nu tæller vi trekanter der har netop ét hjørne som ikke er et af polygonens hjørner, men et skæringspunkt mellem to diagonaler. For hver skæring mellem to diagonaler opstår der netop fire sådanne trekanter, dvs. der er $4\binom{n}{4}$.

Trekanter som har et af polygonens hjørner samt to skæringer mellem diagonaler som hjørner, opstår ved at man vælger fem punkter, vælger et af punkterne som hjørne og tegner diagonalerne mellem de fem punkter, og der opstår kun én sådan trekant på denne måde, dvs. at der er $5\binom{n}{5}$ sådanne trekanter.



Trekanter med to hjørner tilfælles med polygonen   Trekanter med ét hjørne tilfælles med polygonen   Trekanter som ikke har hjørner tilfælles med polygonen

Trekanter hvis hjørner kun består af skæringer mellem diagonaler, opstår ved at man vælger seks punkter og tegner tre diagonaler mellem dem på en sådan måde at de alle skærer hinanden, og dette kan gøres på netop én måde, dvs. der er $\binom{n}{6}$ af slagsen. I alt er der

$$\binom{n}{3} + 4\binom{n}{4} + 5\binom{n}{5} + \binom{n}{6}.$$

Opgave 5.1.16. Med n betegnes det samlede antal sokker, med r antallet af røde sokker. Da sandsynligheden for at trække to sokker af samme farve er $\frac{1}{2}$, er sandsynligheden for at trække to sokker af forskellig farve også $\frac{1}{2}$. Man kan trække to sokker af forskellig farve på $r(n-r)$ måder, og der er i alt $\binom{n}{2}$ måder at trække to sokker på. Altså er

$$\frac{r(n-r)}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Denne relation mellem n og r er ensbetydende med at

$$4r^2 - 4nr + (n^2 - n) = 0,$$

som videre giver

$$r = \frac{n \pm \sqrt{n}}{2}.$$

Den størst mulige værdi for r er derfor givet ved

$$r = \frac{n_0 \pm \sqrt{n_0}}{2},$$

hvor n_0 er det størst mulige kvadrattal mindre end eller lig med 1993. Ved udregning ses at $44^2 \leq 1993 < 45^2$. Altså er $n_0 = 44^2$, og dermed fås $r = \frac{44^2+44}{2} = 990$.

Opgave 5.1.17. Man skal gå langs ni sider i enhedskuberne, tre i hver af de tre retninger. Dvs. man kan vælge mellem $\binom{9}{3,3,3} = 1680$ forskellige ruter.

Opgave 5.1.18. Der er $\binom{9}{3,3,3}$ forskellige måder de tre personer kan trække kuglerne på. De får alle en ulige sum netop hvis to af dem trækker to kugler med lige numre. Der er $\binom{3}{2}$ muligheder for at vælge de to personer der skal trække netop to kugler med lige numre. Derefter kan de fire kugler med lige numre fordeles blandt de to personer på $\binom{4}{2}$ måder. Kuglerne med ulige numre kan nu fordeles på $\binom{5}{1,1,3}$ måder så alle har netop tre kugler. Sandsynligheden for at de alle får en ulige sum, er derfor

$$\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{3,1,1}}{\binom{9}{3,3,3}} = \frac{3}{14}.$$

Opgave 5.1.19. Antal måder hvorpå man kan vælge m hold med n deltagere på hver ud af nm personer, er ifølge sætning 5.1.4 $\binom{nm}{m,m,\ldots,m}\frac{(nm)!}{(n!)^m m!}$ hvor $m!$ i nævneren skyldes at de m hold ikke nummereres. Tilsvarende kan man vælge n hold med m deltagere på hver på $\frac{(nm)!}{(m!)^n n!}$ måder. Altså er

$$\frac{(nm)!}{(n!)^m m!} \cdot \frac{(nm)!}{(m!)^n n!} = \frac{((nm)!)^2}{(n!)^{m+1}(m!)^{n+1}}$$

et helt tal for alle positive hele tal n og m, hvilket viser det ønskede.

Opgave 5.2.1. Der er $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ par af venner, og da der sendes 50 julekort, må der være mindst ét par af venner der har udvekslet to julekort ifølge skuffeprincippet. Da ingen sender to julekort til samme ven, må de to have sendt julekort til hinanden.

Opgave 5.2.2. Kvadratet deles op i ni kvadrater med sidelængde $\frac{2}{3}$ og diagonallængde dermed $\frac{\sqrt{8}}{3} < 1$. Ifølge skuffeprincippet må der være to punkter som ligger i samme kvadrat, og afstanden mellem disse to punkter er mindre end 1.

Opgave 5.2.3. Antag at der ikke findes to af de $n+2$ tal som har en differens der er delelig med $2n$. Da har de $n+2$ tal alle forskellige rester ved division med $2n$. De mulige rester ved division med $2n$ er $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. På nær 0 og n kan de parres så hver par har sum $2n$, på denne måde:

$$(1, 2n-1), (2, 2n-2), \ldots, (n-1, n+1).$$

Nu har vi $n-1$ par af rester og yderligere to rester. Da der er $n+2$ forskellige rester ved division med $2n$ blandt de $n+2$ tal, må der ifølge skuffeprincippet findes et par af rester $(i, 2n-i)$ hvor begge rester findes blandt de $n+2$ tal. Altså findes der to tal blandt de $n+2$ tal hvis sum er delelig med $2n$.

Opgave 5.2.4. Der er 100 forskellige placeringer af bordet, hvor der er en forret på hver plads. Lad hver placering repræsentere en skuffe, så vi har 100 skuffer. Hver forret står rigtigt i netop én placering, dvs. der er 100 forretter som vi hver lægger i den skuffe der repræsenterer den placering hvor forretten er på den rigtige plads. Da der i udgangsplaceringen ikke er en eneste forret der står rigtigt, er mindst én af skufferne tom. Altså findes der en skuffe med to forretter, dvs. mindst én placering hvor mindst to forretter er placeret rigtigt.

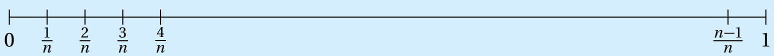
Opgave 5.2.5. Inddel kvadratet i 50 rektangler med sidelængder 1 og $\frac{1}{50}$. Ifølge skuffeprincippet findes et rektangel med mindst tre røde punkter. Disse tre røde punkter udgør en trekant hvis areal højst er halvdelen af rektanglets areal, dvs. højst $\frac{1}{100}$.

Opgave 5.2.6. Betragt alle gitterpunkterne (x, y) med $1 \le x \le n+1$ og $1 \le y \le n^{n+1}+1$, hvor x og y er hele tal. Hver række kan farves på n^{n+1} forskellige måder. Ifølge skuffeprincippet findes derfor mindst to rækker der er farvet på samme måde. Da der er n farver og $n+1$ punkter i hver række, findes igen ifølge skuffeprincippet mindst to punkter i samme række med samme farve. I de to rækker der er farvet identisk, findes derfor to punkter af samme farve i den ene række, og sammen med de to tilsvarende punkter i den anden række udgør de hjørnerne i et rektangel.

Opgave 5.2.7. Antag at der ikke findes tre drager som tilsammen har alle nøglerne. For hver trio af drager er der så mindst én nøgle de ikke har, og de nøgler de ikke har, må hver af de andre drager have, da fire vilkårlige drager har samtlige nøgler. Dvs. for hver trio af drager findes en unik nøgle som de ikke har, og da der er $\binom{7}{3} = 35$ trioer af drager, må der være mindst 35 forskellige nøgler, men dette er en modstrid da der kun er $3 \cdot 10 = 30$ nøgler.

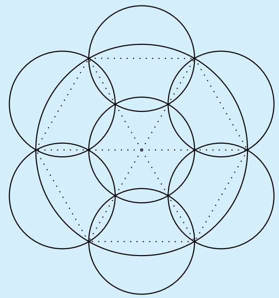
Opgave 5.2.8. Lad A være en mængde med 23 elementer blandt tallene fra 1 til 1000. Da er summen af elementerne i A mindre end $23 \cdot 1000 = 23000$. Nu laver vi 23000 skuffer nummereret $1, 2, \ldots, 23000$, og hver ikke-tom delmængde af A puttes ned i den skuffe hvis nummer er summen af elementerne i delmængden. Der er $2^{23} - 1$ forskellige ikke-tomme delmængder af A, og da dette tal er langt større end 23000, findes mindst én skuffe med to delmængder som vi kalder B og C. Da mængderne er forskellige, og elementerne i dem har samme sum, er $B_1 = B \backslash C$ og $C_1 = C \backslash B$ to disjunkte ikke-tomme delmængder af A, og summen af elementerne i B_1 er lig summen af elementerne i C_1.

Opgave 5.2.9. For et reelt tal x betegner $\{x\}$ brøkdelen af x, dvs. x minus det største hele tal som ikke er større end x. Fx er $\{2{,}34\} = 0{,}34$ og $\{-2{,}91\} = 0{,}09$. Vi inddeler nu tallinjen fra 0 til 1 i n intervaller af længde $\frac{1}{n}$.



Lad nu M_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, være den delmængde af $\{a, 2a, \ldots, (n-1)a\}$ som indeholder netop de elementer hvis brøkdel ligger i det i'te interval på vores tallinje, dvs. i $\left[\frac{i-1}{n}; \frac{i}{n}\right]$. Hvis M_1 eller M_n ikke er tom, har vi et tal med den ønskede egenskab. Antag at M_1 og M_n er tomme. Da må en af mængderne $M_2, \ldots, M_{n-1}$ indeholde to elementer, lad os sige ba og ca, hvor $b < c$. Da afstanden mellem $\{ba\}$ og $\{ca\}$ er mindre end $\frac{1}{n}$, må $(c-b)a$ tilhøre enten M_1 eller M_n, hvilket er en modstrid.

Opgave 5.2.10. Cirklen med radius 2 kan dækkes af syv cirkler med radius 1 som vist på figuren. (Overvej hvordan de skal konstrueres.)



Ifølge skuffeprincippet findes derfor en cirkel med radius 1 som indeholder mindst tre punkter.

Opgave 5.3.1. i), ii) og iii) følger direkte af formlen for $\binom{n}{k}$.
vi) Benyt binomialformlen med $x = 1$ og $y = -1$:

$$0 = (1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n}.$$

v) Ved at benytte i) og sætning 5.3.4 fås

$$2\sum_{i=0}^{n} \binom{2n+1}{i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{2n+1}{i} + \binom{2n+1}{2n+1-i} \right) = \sum_{i=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{i} = 2^{2n+1}.$$

vi) Ved at anvende b) og sætning 5.3.4 fås

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

vii) Da $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!}$, må p gå op i $\binom{p}{i}$ for $i = 1,2,\dots,p-1$ da p er en faktor i tælleren, men ikke i nævneren, og da p er et primtal.

Opgave 5.4.1. Først lægges en kugle i hver boks, og derefter fordeles de resterende $n-m$ kugler frit i de m bokse. Det kan gøres på $\binom{n-m+m-1}{m-1} = \binom{n-1}{m-1}$ måder.

Opgave 5.4.2. I eksempel 5.4.1 så vi at der var 1001 muligheder hvis der ikke var begrænsninger. Fra dette trækker vi antal muligheder hvor vi vælger syv eller flere af de tre slags der kun var seks af, eller otte eller flere af de to slags der kun var syv af. Vi kan vælge syv eller flere af en bestemt slags ved først at vælge syv af slagsen og derefter vælge tre poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$ måder. Vi kan vælge otte eller flere af en bestemt slags ved først at vælge otte af slagsen og derefter vælge to poser frit blandt alle fem slags. Dette kan gøres på $\binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$ måder. I alt er der altså $1001-3\cdot 35-2\cdot 15 = 866$ kombinationsmuligheder.

Opgave 5.4.3. Hvis vi lægger de ti 2-kroner på række, er der 11 positioner hvor vi må lægge en 5-krone (en før, ni mellemrum, en efter), og vi skal lægge en 5-krone på netop seks af disse pladser. Dermed er der $\binom{11}{6} = 462$ muligheder.

Opgave 5.4.4. Ifølge sætning 5.4.2 kan man vælge 11 ikke-negative heltal $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ så deres sum er 100, på $\binom{110}{10}$ måder. Det svarer til at vælge 10 ikke-negative heltal $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ hvis sum højst er 100, dvs. dette kan også gøres på $\binom{110}{10}$ måder.

Opgave 5.4.5. Hvis alle skal have mindst fire guldstykker, er der 26 guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de seks pirater, og det kan gøres på $\binom{26+6-1}{6-1} = \binom{31}{5}$ måder. For at få det ønskede antal skal vi for hver pirat trække de kombinationer fra hvor hun har fået mere end 25 guldstykker. Hvis vi først giver fem pirater fire guldstykker hver og den sidste 26, er der fire guldstykker tilbage til at fordele frit blandt de seks pirater. Det kan gøres på $\binom{4+6-1}{6-1} = \binom{9}{5}$ måder. Dermed er der samlet $\binom{31}{5} - 6\cdot\binom{9}{5} = 169.911 - 6\cdot 126 = 169.155$ kombinationer.

Opgave 5.4.6. Når vi skal tælle hvor mange 12-cifrede tal der opfylder noget bestemt, overvejer vi som sædvanligt om det i stedet er nemmere at tælle hvor mange af tallene der ikke opfylder det. Det er det i dette tilfælde, og derfor viser vi i stedet at sandsynligheden for at trække et tal der ikke indeholder to 1-taller i træk, er $\frac{7}{99}$. Der er $\binom{12}{5,4,3}$ tal i mængden. Nu tæller vi hvor mange af disse der ikke indeholder to 1-taller i træk. De syv cifre der ikke er 1-taller, kan stilles på række på $\binom{7}{3}$ måder da der blandt disse er fire 2-taller og tre 3-taller. Nu skal vi placere de fem 1-taller så der ikke er to ved siden af hinanden. Det svarer netop til at vælge fem af de otte mellemrum mellem de andre syv cifre (der er også et "mellemrum" før og efter), dvs. det kan gøres på $\binom{8}{5}$ måder. Sandsynligheden er derfor

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{8}{5}}{\binom{12}{5,4,3}} = \frac{\frac{7!8!}{3!4!3!5!}}{\frac{12!}{3!4!5!}} = \frac{7!8!}{3!12!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9} = \frac{7}{99}.$$

Opgave 5.4.7. Binære tal har altid 1 som første ciffer. Vi tilføjer nu et 0 til sidst på samtlige binære tal med n cifre da det ikke ændrer antallet af blokke af formen 01. Vi tæller altså nu antallet af binære tal med $n+1$ cifre hvis sidste ciffer er 0, og som har netop m blokke af formen 01. Da disse tal starter med 1, slutter på 0 og indeholder netop m skift fra 0 til 1, må de indeholde $m+1$ skift fra 1 til 0. Der er altså i alt $2m+1$ skift fra 0 til 1 eller 1 til 0. Da der er $n+1$ cifre, er der n mellemrum hvor disse $2m+1$ skift skal ske. Dermed er der $\binom{n}{2m+1}$ binære tal af denne type.

Opgave 5.4.8. Vi tæller alle de kombinationer der ikke indeholder to nabotal. Forestil dig 36 bolde på en lang række som repræsenterer de 36 tal. Vi skal nu vælge syv bolde hvoraf der ikke må være to ved siden af hinanden. Dem farver vi sorte. Dette svarer i virkeligheden til at indsætte syv sorte skillevægge i mellemrummene mellem de 29 ikke-valgte bolde eller foran den første eller efter den sidste ikke-valgte bold, altså at indsætte syv sorte skillevægge på 30 pladser. Dette kan gøres på $\binom{30}{7} = 2.035.800$ måder, og dette er mindre end $\frac{1}{4}$ af 8.347.680.

Opgave 5.4.9. Hvis syv ens ringe skulle fordeles på fem pinde, kunne det gøres på $\binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$ måder. Vi betragter nu hver af disse muligheder separat. De syv placeringer af ringene nummereres 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7. Da de ti ringe har forskellig farve, skal vi beslutte hvilken ring der skal i første position, anden position osv. til og med syvende position, dvs. der er $\frac{10!}{3!}$ måder at fordele farverne på. Ifølge multiplikationsprincippet er der derfor i alt $\binom{11}{4}\cdot\frac{10!}{3!} = \frac{11!10!}{4!7!3!} = 199.584.000$ slutkonfigurationer.

Opgave 5.5.1. Identiteten vises ved at tælle på to måder.

Metode 1: Man kan udtage k elementer blandt $n+m$ elementer på $\binom{n+m}{k}$ måder.

Metode 2: Når man skal udtage k elementer ud af $n+m$, kan man udtage i elementer blandt de første n elementer og derefter $k-i$ blandt de sidste m, og det skal man gøre for hvert $i=0,1,\ldots,k$. Dette kan gøres på $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ måder. Dermed er

$$\binom{m+n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$$

Opgave 5.5.2. i) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson og en referent ud af n personer tælles på to måder (forperson og referent må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis forperson og referent er to forskellige personer, er der $n(n-1)$ måder at vælge dem på. Derefter skal man for hver af de $n-2$ resterende beslutte om de er med i udvalget eller ej. Dette kan gøres på i alt $n(n-1)2^{n-2}$ måder. Hvis forperson og referent er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder, dvs. samlet er der $n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=n(n+1)2^{n-2}$ måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^2 måder at vælge forpersonen og referenten på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}$.

ii) Antal måder at vælge et udvalg med en forperson, en referent og en kasserer ud af n personer tælles på to måder (forperson, referent og kasserer må gerne være samme person):

Metode 1: Hvis forperson, referent og kasserer er tre forskellige personer, er der $n(n-1)(n-2)2^{n-3}$ måder at nedsætte udvalget på. Hvis forperson, referent og kasserer samlet er to personer, er der $3n(n-1)2^{n-2}$ måder, da vi kan vælge hvilke af de to poster der skal dækkes af samme person, på tre måder, og vi derefter har n valgmuligheder for denne position og $n-1$ for den tredje. Herefter skal vi igen for hver af de resterende personer beslutte om de er med i udvalget eller ej. Hvis forperson, referent og kasserer alle tre er samme person, er der $n2^{n-1}$ måder. Samlet er der

$$\begin{aligned}&n(n-1)(n-2)2^{n-3}+3n(n-1)2^{n-2}+n2^{n-1}=\\&\big((n^3-3n^2+2n)+(6n^2-6n)+(4n)\big)2^{n-3}=n^2(n+3)2^{n-3}\end{aligned}$$

måder at nedsætte udvalget på.

Metode 2: Der er $\binom{n}{k}$ måder at nedsætte et udvalg med k medlemmer på, og for hver af disse er der k^3 måder at vælge forperson, referent og kasserer på. Dette giver samlet $\sum_{k=1}^{n}k^3\binom{n}{k}$.

Opgave 5.5.3. Ane skal fra gå tre gange mod øst og $n+1$ gange mod nord for at nå floden i det ønskede kryds, dvs. for at komme fra $(0,0)$ til $(3,n+1)$ via vejkrydset $(3,n)$. Det sidste stykke skal hun gå mod nord, da hun ellers har nået floden i et tidligere kryds, derfor skal hun via $(3,n)$. Hun skal altså i løbet af de første $n+3$ gange hun slår plat eller krone, slå tre plat og n krone, mens hun den sidste gang skal slå krone. Sandsynligheden for at hun gør dette, er

$$\binom{n+3}{3}\frac{1}{2^{n+3+1}}.$$

Ane når med sandsynlighed 1 frem til floden på et tidspunkt. Sandsynligheden for at hun når floden i krydset $(k,n+1)$, $k=0,1,2,\ldots,n$, er

$$\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}.$$

Da der er symmetri, er sandsynligheden for at nå floden i krydset $(n+1,k)$ den samme. Dermed er

$$1=2\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{n+k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^{k+n}}.$$

Opgave 5.5.4. For at vise at

$$\binom{n+1}{r+1}=\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}$$

tæller vi på en interessant måde hvor mange måder man kan vælge $r+1$ ud af $n+1$ elementer på: Vi tæller nemlig antallet af delmængder med $r+1$ elementer af mængden $\{1,2,\ldots,n+1\}$ hvor $k+1$ er det næstmindste element. Hvis $k+1$ er det næstmindste element, kan det mindste element vælges på k måder, og de $r-1$ største elementer på $\binom{(n+1)-(k+1)}{r-1}=\binom{n-k}{r-1}$ måder. De mulige værdier af k er $k=1,2,\cdots,n-r+1$. Dette viser det ønskede.

Opgave 5.5.5. Når man vælger r tal ud af de n tal $1,2,3,\ldots,n$, kan det mindste tal k være $k=1,2,3,\ldots,n-r+1$. Der findes $\binom{n-k}{r-1}$ delmængder hvor mindste elementet er k, dvs. at

$$F(n,r)=\frac{\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}}{\binom{n}{r}}.$$

Ved at udnytte opgave 5.5.4 fås

$$F(n,r)=\frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}}=\frac{n+1}{r+1}.$$

Opgave 5.5.6. Antal måder at vælge x, y og z på så $x,y,z\in\{1,2,\ldots,n+1\}$, $z>x$ og $z>y$, tælles på to måder:

Metode 1: For $z=k+1$ er der k^2 muligheder for x og y. Samlet kan man altså vælge x, y og z på $1^2+2^2+\cdots+n^2$ måder.

Metode 2: Hvis x og y er forskellige, svarer det til at vælge tre tal ud af $n+1$, sætte det største tal lig z og sætte de to sidste tal lig henholdsvis x og y. Dette kan gøres på $2\binom{n+1}{3}$ måder. Hvis $x=y$ svarer det til at vælge to tal blandt de $n+1$ og sætte z lig det største og x og y lig det mindste. Samlet er der derfor $2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}$ kombinationer.

Opgave 5.5.7. Vi tæller antallet N af tripler (dommer, dommer, deltager) for hvilke de to dommere er forskellige og har givet deltageren samme bedømmelse. Der er i alt $\frac{b(b-1)}{2}$ par af dommere, og hvert par har højst bedømt k deltagere ens, så $N\le k\frac{b(b-1)}{2}$.

Nu ser vi på en bestemt deltager X og tæller hvor mange par af dommere der har bedømt X ens. Hvis x dommere har ladet X bestå, er der $\frac{x(x-1)}{2}$ par af dommere der har ladet X bestå, og $\frac{(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere der har dumpet X. Dermed er der i alt $\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2}$ par af dommere som bedømmer X ens. Nu vurderer vi denne størrelse:

$$\begin{aligned}\frac{x(x-1)+(b-x)(b-x-1)}{2}&=\frac{2x^2-2bx+b^2-b}{2}\\&=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}\ge\frac{b^2}{4}-\frac{b}{2}\\&=\frac{(b-1)^2}{4}-\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Tallet $\frac{(b-1)^2}{4}$ er et helt tal da b er ulige, så antallet af par af dommere der bedømmer X ens, er mindst $\frac{(b-1)^2}{4}$. Dermed er $N\ge\frac{a(b-1)^2}{4}$. Samlet giver dette at $\frac{k}{a}\ge\frac{b-1}{2b}$.

Opgave 5.6.1. Ved at anvende eksempel 5.6.1 og sætning 5.3.5 vii) fås

$$\begin{aligned}\binom{2p}{p}&=\binom{p}{0}^2+\binom{p}{1}^2+\cdots+\binom{p}{p-1}^2+\binom{p}{p}^2\\&\equiv 1+0+\cdots+0+1\\&\equiv 2 \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

Opgave 5.6.2. Ved at benytte sætning 5.3.5 ii) og Vandermonde-identiteten 5.5.1 fås

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k}=n\sum_{k=0}^{n}\binom{n-1}{n-k}\binom{n}{k}=n\binom{2n-1}{n}=n\binom{2n-1}{n-1}.$$

Opgave 5.6.3. Antallet af måder først at vælge k ud af n og derefter m af disse k er det samme som først at vælge m ud af n og derefter vælge $k-m$ af de resterende $n-m$. Derfor er

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

Ved at omskrive og benytte sætning 5.3.5 iv) fås

$$\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k=m}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$
$$=\binom{n}{m}(-1)^{2m}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}=0$$

Opgave 5.6.4. Vi viser påstanden ved induktion efter n: Det er nemt at se at udsagnet er sandt for $n=1$. Antag at påstanden er sand for et $n=N$, $N\geq 1$. Ifølge sætning 5.3 er $\binom{m}{r}=\binom{m-1}{r}+\binom{m-1}{r-1}$, og ifølge sætning 5.3.5 ii) er $\frac{1}{m}\binom{m}{k}=\frac{1}{k}\binom{m-1}{k-1}$. Dermed er

$$\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N+1}{k}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k}+\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{N}{k}+\sum_{k=1}^{N+1}\frac{(-1)^{k-1}}{N+1}\binom{N+1}{k}$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}+\frac{1}{N+1}\left(\binom{N+1}{0}+\sum_{k=0}^{N+1}(-1)^{k-1}\binom{N+1}{k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}+\frac{1}{N+1}=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k},$$

hvor vi i sidste skridt har brugt sætning 5.3.5 iv).

Opgave 5.7.1. Det er nemt at se at $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=4$ og $a_4=7$. Når vi tegner linje nummer n, så skærer den de $n-1$ andre linjer, og disse $n-1$ skæringspunkter deler linjen i n linjestykker der hver gennemskærer et område og deler det i to. Der kommer altså n flere områder end før. Dermed er $a_n=a_{n-1}+n$ og

$$a_n=a_{n-1}+n=a_{n-2}+(n-1)+n=\cdots=a_1+2+3+\cdots+n$$
$$=1+(1+2+\cdots+n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Opgave 5.7.2. Vi løser problemet rekursivt ved først at betragte et 2×1-bræt, og derefter udvide med 2 felter ad gangen. Lad a_n være antallet af måder man kan farve nogle af felterne på et $2\times n$-bræt sorte når to felter med en fælles kant ikke begge må være sorte, og lad b_n være antallet af disse hvor begge de to sidst tilføjede felter er hvide, og c_n være antallet af disse hvor netop ét af de to sidst tilføjede felter er sort. Som start har vi $b_1=1$, $c_1=2$ og $a_1=b_1+c_1=3$. Vi opstiller nu rekursionsformler for b_n og c_n. Der er nemt at se at $b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$, da man altid kan tilføje to hvide felter. Desuden er $c_n=2b_{n-1}+c_{n-1}$, da man kan tilføje to nye felter hvor det ene er sort, på to måder, hvis de to foregående begge er hvide, mens man kun har én mulighed, hvis et af de to foregående felter er sorte. Dermed er

$$a_n=b_n+c_n=3b_{n-1}+2c_{n-1}=2(b_{n-1}+c_{n-1})+(b_{n-2}+c_{n-2})=2a_{n-1}+a_{n-2}.$$

Vi kan nu simpelthen rekursivt beregne a_8 ved først at bemærke at $a_2=7$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	7	17	41	99	239	577	1393

Vi kan altså farve nogle af felterne på et 2×8-bræt sorte så to felter med en fælles kant, ikke begge må være sorte, på 1393 måder.

Opgave 5.7.3. Lad a_n være antallet af måder Georg kan bygge et $1\times 1\times n$-tårn på. Det er trivielt at $a_0=1$ og $a_1=1$. Da der er en slags $1\times 1\times 1$-klods og seks slags $1\times 1\times 2$-klodser, må

$$a_n=a_{n-1}+6a_{n-2}.$$

Da løsningerne til $x^2-x-6=0$ er $r_1=-2$ og $r_2=3$, så er

$$a_n=A(-2)^n+B\cdot 3^n$$

en løsning til rekursionen når A og B opfylder at $A+B=a_0=1$ og $-2A+3B=a_1=1$. Dette giver $A=\frac{2}{5}$ og $B=\frac{3}{5}$, dvs.

$$a_n=\frac{2}{5}\cdot(-2)^n+\frac{3}{5}\cdot 3^n=\frac{1}{5}\left(3^{n+1}-(-2)^{n+1}\right).$$

Opgave 5.7.4. Bemærk først at $a_1=1$ og $a_2=3$. Hvis vi tæller a_n for $n\geq 3$, så ser vi at antallet der slutter med en 1×2-brik i den sidste søjle, må være lig med a_{n-1} fordi resten af brættet kan udfyldes på a_{n-1} måder. Hvis vi tæller antallet der slutter med to 1×2-brikker vandret i de to sidste søjler, så må der tilsvarende være a_{n-2} af disse, mens antallet der slutter med en 2×2-brik i de sidste to søjler, også er a_{n-2}. Dermed er

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

For at finde en lukket formel for a_n bestemmer vi løsningerne til $x^2 - x - 2 = 0$, som er $r_1 = -1$ og $r_2 = 2$. Dermed er

$$a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$$

løsning til rekursionsligningen hvis konstanterne A og B vælges så de opfylder at $a_1 = 1$ og $a_2 = 3$. Vi skal altså bestemme A og B så

$$1 = a_1 = -A + 2B \quad \text{og} \quad 3 = a_2 = A + 4B,$$

og det giver $A = \frac{1}{3}$ og $B = \frac{2}{3}$. Dermed er

$$a_n = \frac{1}{3}(-1)^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n = \frac{1}{3}\left((-1)^n + 2^{n+1}\right).$$

Opgave 5.7.5. Fra opgave 5.7.2 ved vi at

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

og $a_0 = 1$ og $a_1 = 3$. Løsningerne til $x^2 - 2x - 1 = 0$ er $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ og $r_2 = 1 - \sqrt{2}$. Ifølge sætning 5.7.1 er

$$a_n = A(1 + \sqrt{2})^n + B(1 - \sqrt{2})^n,$$

hvor $1 = a_0 = A + B$ og $3 = a_1 = (A + B) + \sqrt{2}(A - B)$. Ved at kombinere de to ligninger fås $A = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ og $B = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})$, dvs.

$$a_n = \frac{1}{2}\left((1 + \sqrt{2})^{n+1} + (1 - \sqrt{2})^{n+1}\right).$$

Opgave 5.7.6. Lad S_n være mængden af de n-cifrede tal der kun indeholder cifrene $1, 2, 3, 4, 5$, og hvor to på hinanden følgende cifre altid har differens ± 1. Lad A_n være antallet af tal i S_n som slutter på 1 eller 5, lad B_n være antallet af tal fra S_n som slutter på 2 eller 4, og lad C_n være antallet af tal fra S_n som slutter på 3. Vi har $A_1 = 2$, $B_1 = 2$ og $C_1 = 1$. Vi beskriver nu A_n, B_n og C_n rekursivt. Det er nemt at se at $A_n = B_{n-1}$, $B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1}$ og $C_n = B_{n-1}$ for $n > 1$. For $n > 2$ er

$$B_n = A_{n-1} + 2C_{n-1} = B_{n-2} + 2B_{n-2} = 3B_{n-2}.$$

Da $B_2 = A_1 + 2C_1 = 4$, følger det nu at

$$B_{2n} = 3^{n-1} B_2 = 3^{n-1} \cdot 4 \quad \text{og} \quad B_{2n+1} = 3^n B_1 = 3^n \cdot 2.$$

Dermed er

$$|S_{2n}| = A_{2n} + C_{2n} + B_{2n} = 2B_{2n-1} + 3^{n-1} \cdot 4 = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 + 3^{n-1} \cdot 4 = 3^{n-1} \cdot 8.$$
$$|S_{2n+1}| = A_{2n+1} + C_{2n+1} + B_{2n+1} = 2B_{2n} + 3^n \cdot 2 = 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 4 + 3^n \cdot 2 = 3^{n-1} \cdot 14.$$

Opgave 5.7.7. Kald antallet af farvelagte rækker af stole af længde k som starter med en grøn stol, for g_k, og antallet af farvelagte rækker af stole som starter med en rød stol, for r_k. Af symmetrigrunde er $r_k = g_k$ for alle k. Hvis en række starter med en grøn stol, så kan næste stol enten være rød eller grøn. Hvis den er rød, så kan resten af rækken farvelægges på r_{k-1} måder. Hvis den er grøn, så må den tredje stol også være grøn, og derefter kan resten af rækken farves på g_{k-2} måder. Dermed er

$$g_k = r_{k-1} + g_{k-2} = g_{k-1} + g_{k-2}.$$

Det er desuden nemt at se at $g_1 = 1$ og $g_2 = 1$. Altså er g_k lig det n'te Fibonaccital F_k. Det betyder at antallet af måder vi kan farvelægge alle 16 stole, er $r_{16} + g_{16} = 2 \cdot F_{16} = 2 \cdot 1974$.

Opgave 5.7.8. Bemærk først at $C_1 = 4$ og $C_2 = 15$. Vi kan nu lave en rekursionsligning for C_n. Antallet af måder hvor de to sidste felter ikke begge er røde, er $3C_{n-1}$, da C_{n-1} angiver antallet af måder man kan farve den første $2 \times (n-1)$-del af brættet, mens 3 angiver at man kan farve de sidste to felter på 3 måder, så de ikke begge er røde. Her tilføjes oplagt ikke farvninger med røde 2×2-kvadrater. Antallet af måder hvor de to sidste felter begge er røde, er $3C_{n-2}$, da C_{n-2} angiver antallet af måder at farve den første $2 \times (n-2)$-del af brættet,

mens 3 angiver at man kan farve de næstsidste to felter på 3 måder så de ikke begge er røde, hvilket er nødvendigt for at farve de to sidste røde. Dermed er

$$M_n = 3M_{n-1} + 3M_{n-2}.$$

Vi viser nu ved induktion efter n at $k_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ for ulige n, mens $k_n \geq \frac{n}{2}$ for lige n. Vi ved at $k_1 = 0$ og $k_2 = 1$. Antag nu at det er sandt for alle k_n, $n < N$. For lige $n = N$ med $n = 2m$ må

$$C_{2m} = 3(C_{2m-1} + C_{2m-2}) = 3(3^{m-1} \cdot u + 3^{m-1} \cdot v) = 3^m(u+v),$$

og altså $k_n \geq \frac{n}{2}$. For ulige $n = N$ med $n = 2m+1$ må

$$C_{2m+1} = 3(C_{2m} + C_{2m-1}) = 3(3^m \cdot u + 3^{m-1} \cdot v) = 3^m(3u+v),$$

hvor v ikke er delelig med 3, dvs. $k_{2m+1} = m$. Dette afslutter induktionen. Dermed er $k_{2019} = 1009$.

Opgave 5.7.9. Bemærk først at $A(n,1) = n$. Desuden må

$$A(n,k) = A(n-1,k) + A(n-2,k-1)$$

for $k > 1$ da man kan tage alle k-delmængder af S_{n-1} som opfylder det ønskede, og derefter tage alle $k-1$-delmængder af S_{n-2} og tilføje n. Ved at undersøge små eksempler får man en idé om at $A(n,k) = \binom{n+1-k}{k}$. Dette vises induktivt efter k. Vi har allerede vist formlen for alle n for $k = 1$. Antag at den er sand for alle n for $k-1$. For $n < 2k-1$ er $\binom{n+1-k}{k} = 0$, hvilket passer med at der ikke findes k-delmængder der opfylder det ønskede, når $n < 2k-1$. For $n = 2k-1$ er $\binom{n+1-k}{k} = \binom{k}{k} = 1$, hvilket passer med at der netop er én k-delmængde der opfylder det ønskede, når $n = 2k-1$. Antag nu at formlen er sand for alle $1 \leq n < N$ for dette k. Da giver sætning 5.3.1 at

$$A(N,k) = A(N-1,k) + A(N-2,k-1) = \binom{N-k}{k} + \binom{N-k}{k-1} = \binom{N+1-k}{k}$$

som ønsket. Dette afslutter induktionen.

Opgave 5.7.10. Alma kan vælge r bokse på $\binom{n}{r}$ måder og r låg på $\binom{n}{r}$ måder, og hun kan derefter sætte de r bokse og r låg sammen i par på $r!$ måder. Altså er $A(n,r) = \binom{n}{r}^2 \cdot r!$ ifølge multiplikationsprincippet. Specielt er $A(n,1) = n^2$ og $A(2,2) = 2$.

Nu ser vi på Berthas bokse og låg. Boksen b_i kan parres med $2i-1$ låg, dvs.

$$B(n,1) = \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - n = (n+1)n - n = n^2.$$

Desuden er $B(2,2) = 2$. Nu beskriver vi $B(n,r)$ rekursivt:

$$\begin{aligned} B(n,r) &= B(n-1,r) + B(n-1,r-1)((2n-1)-(r-1)) \\ &= B(n-1,r) + B(n-1,r-1)(2n-r). \end{aligned}$$

Denne formel fås ved at først at tælle på hvor mange måder de r par kan vælges hvis boksen b_n ikke er med i nogen af de r par, og det er netop $B(n-1,r)$. Derefter tæller vi på hvor mange måder de r par kan vælges hvis boksen b_n er med: Først vælges $r-1$ par hvor den ikke er med. Derefter skal vi vælge et låg til den. Boksen b_n kan parres med alle $2n-1$ låg, men $r-1$ af dem er allerede taget. Det giver $B(n-1,r-1)((2n-1)-(r-1))$.

For at vise at $A(n,r) = B(n,r)$, viser vi at de opfylder samme rekursionsligning. Vi har vist at $A(n,1) = B(n,1)$ for alle n, og at $A(2,2) = B(2,2)$. Hvis blot vi kan vise at $A(n,r) = A(n-1,r) + A(n-1,r-1)(2n-r)$, er vi færdige. Det kan nemt vises ved at sætte den lukkede formel for $A(n,r)$ ind og tjekke at det passer, men man kan faktisk også argumentere uden brug af formlen:

Hvis vi skal tælle antal måder Alma kan vælge r par af bokse og låg, så tæller vi først alle dem hvor boksen b og låget l ikke er med. Dem er der $A(n-1,r)$ af. Derefter tæller vi alle dem hvor boksen b er med: Der er n muligheder for at vælge et låg til den, og derefter kan de $r-1$ sidste par vælges på $A(n-1,r-1)$ måder, dvs. i alt $A(n-1,r-1) \cdot n$. Nu tæller vi alle dem hvor boksen b ikke er med, men hvor låget l er med: Først vælges $r-1$ par der ikke indeholder b og l, og det kan gøres på $A(n-1,r-1)$ måder. Nu skal vi vælge en boks til l. Der er $r-1$ som er optaget, og vi må desuden ikke vælge b, dvs. der er $n-r$ muligheder. Der er altså $A(n-1,r-1)(n-r)$ måder at vælge de r par sådan at b ikke er med, og l er med. Samlet fås $A(n,r) = A(n-1,r) + A(n-1,r-1)(2n-r)$ som ønsket.

Opgave 5.8.1. Lad A_i være den delmængde af $M = \{1,2,\ldots,1000\}$ som indeholder alle tal fra M hvor i går op, $i = 3,5,7$. Antal tal S i M som hverken er delelige med 3, 5 eller 7, er da

$$\begin{aligned}
S &= |M| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| \\
&= 1000 - \Big(|A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5 \cap A_7|\Big) \\
&= 1000 - \Big(333 + 200 + 142 - 66 - 47 - 28 + 9\Big) = 457.
\end{aligned}$$

Opgave 5.8.2. Kald mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_4c_5c_6$, for A, mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_5c_6c_7$, for B, og mængden af telefonnumre som opfylder at $c_1c_2c_3 = c_6c_7c_8$, for C. Et telefonnummer tilhører $A \cap B$ netop hvis $c_4 = c_1 = c_5 = c_2 = c_6 = c_3 = c_7$, et telefonnummer tilhører $B \cap C$ netop hvis $c_5 = c_1 = c_6 = c_2 = c_7 = c_3 = c_8$, et telefonnummer tilhører $A \cap C$ netop hvis $c_4 = c_1 = c_6 = c_3 = c_8$ og $c_5 = c_2 = c_7$, og et telefonnummer tilhører $A \cap B \cap C$ netop hvis alle cifre er identiske. Ifølge PIE er

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\
&= 10^5 + 10^5 + 10^5 - 10^2 - 10^2 - 10^2 + 10 \\
&= 300.000 - 300 + 10 \\
&= 299.710.
\end{aligned}$$

Telefonselskabet har derfor 299.710 numre.

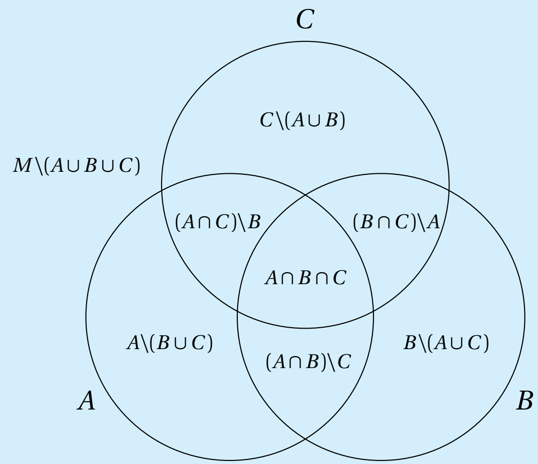
Opgave 5.8.3. Kald de fire kulører $1,2,3,4$, og lad A_i være mængden af kombinationer af syv kort blandt de 52 så den i'te kulør ikke er repræsenteret. Der er i alt $\binom{52}{7}$ måder at vælge de syv kort på. Antallet T af måder at trække syv kort så der er mindst et kort af hver kulør, er dermed ifølge PIE

$$\begin{aligned}
T &= \binom{52}{7} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\
&= \binom{52}{7} - \left(\sum_{1 \le i \le 4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cup A_2 \cap A_3 \cap A_4|\right) \\
&= \binom{52}{7} - 4\binom{39}{7} + 6\binom{26}{7} - 4\binom{13}{7} + 1 \cdot \binom{0}{7}.
\end{aligned}$$

Opgave 5.8.4. Der er i alt 8! måder at stille de otte personer op på en række. Nummerér de fire par $1,2,3,4$, og lad A_i være mængden af rækkefølger hvor par nummer i står ved siden af hinanden. Da er $|A_i| = 2 \cdot 7!$, da der 7! måder at stille parret og de seks andre i rækkefølge, og man desuden ved hver kombination skal vælge i hvilken rækkefølge de to personer i parret skal stå. Desuden er $|A_i \cap A_j| = 2^2 \cdot 6!$, $i \neq j$, osv. efter samme princip. Dermed er antallet af måder T hvorpå de otte personer kan stilles på en række så ingen af de fire par står ved siden af hinanden

$$\begin{aligned}
T &= 8! - \left(\sum_{1 \le i \le 4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\right) \\
&= 8! - \left(4 \cdot 2 \cdot 7! - 6 \cdot 2^2 \cdot 6! + 4 \cdot 2^3 \cdot 5! - 2^4 \cdot 4!\right) \\
&= 13.824.
\end{aligned}$$

Opgave 5.8.5. Lad S være mængden af tripler af delmængder (A,B,C) hvor A, B og C er delmængder af mængden M så $A \cap B \cap C = \emptyset$. Vi beregner først antallet af elementer i S. Ved at tegne et Venn-diagram kan man se at hvert af de n elementer skal ligge i netop én af følgende syv disjunkte mængder: $M \setminus (A \cup B \cup C)$, $A \setminus (B \cup C)$, $B \setminus (A \cup C)$, $C \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \setminus C$, $(A \cap C) \setminus B$ og $(B \cap C) \setminus A$.



Dvs. der er 7^n tripler af delmængder (A,B,C) hvor $A \cap B \cap C = \emptyset$. Herfra skal vi trække alle dem hvor enten $A \cap B$, $A \cap C$ eller $B \cap C$ er tom. Lad $X \subseteq S$

være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap B=\emptyset$, $Y\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $A\cap C=\emptyset$, og $Z\subseteq S$ være mængden af tripler (A,B,C) hvor $B\cap C=\emptyset$. Vi ønsker at beregne $|X\cup Y\cup Z|$, da $|S|-|X\cup Y\cup Z|$ er det antal vi søger. Ifølge PIE er

$$|X\cup Y\cup Z|=|X|+|Y|+|Z|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z|.$$

Elementerne i X er dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A\cap B)\backslash C$, men netop én af de øvrige seks disjunkte mængder ovenfor, dvs. at $|X|=6^n$. Tilsvarende er $|Y|=|Z|=6^n$. Elementerne i $X\cap Y$ er dem hvor ingen af de n elementer tilhører $(A\cap B)\backslash C$ eller $(A\cap C)\backslash B$, men netop én af de øvrige fem disjunkte mængder ovenfor, dvs. at $|X\cap Y|=5^n$. Tilsvarende er $|X\cap Z|=|Y\cap Z|=5^n$. Elementerne i $X\cap Y\cap Z$ er dem hvor hvert af de n elementer tilhører netop én af følgende fire disjunkte mængder: $M\backslash(A\cup B\cup C)$, $A\backslash(B\cup C)$, $B\backslash(A\cup C)$ og $C\backslash(A\cup B)$, dvs. at $|X\cap Y\cap Z|=4^n$. I alt er der

$$|S|-|X\cup Y\cup Z|=7^n-3\cdot 6^n+3\cdot 5^n-4^n$$

kombinationer.

Opgave 5.8.6. Betragt mængden

$$S=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)|x_j\in\{1,2,3,\dots,n+k\}\}.$$

Lad A_i, $i=1,2,\dots,n$, være delmængden af S som indeholder de elementer hvor i ikke er repræsenteret blandt $x_1,x_2,\dots,x_n$. Antallet af elementer i S som ikke ligger i $A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n$, er $n!$, da disse elementer netop er dem hvor $x_1,x_2,\dots,x_n$ er samtlige tal $1,2,\dots,n$ i en eller anden rækkefølge. Dermed er

$$n!=|S|-|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|.$$

Ifølge PIE er

$$n!=|S|-\Big(\sum_{i=1}^n|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ -\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\dots\cap A_n|\Big).$$

Antal elementer i S er $(n+k)^n$. Antallet af elementer i fællesmængden af r af delmængderne $A_1,A_2,\dots,A_n$ er $(n+k-r)^n$ da $x_1,x_2,\dots,x_n$ skal vælges blandt $n+k-r$ tal. Desuden er der $\binom{n}{r}$ måder at vælge de r delmængder på. Dette giver netop

$$n!=\sum_{i=0}^n(-1)^i\binom{n}{i}(n+k-i)^n$$

Opgave 5.8.7. Lad A_k, $k=1,2,\cdots,n$, være mængden af permutationer σ hvor der findes et i så $\sigma(i)=k$ og $\sigma(i+1)=k+n$ eller $\sigma(i)=k+n$ og $\sigma(i+1)=k$. Lad A være mængden af permutationer med egenskaben P. Da er

$$A=A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n.$$

PIE giver dermed at

$$|A|=\sum_{i=1}^n|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots(-1)^{n+1}|A_1\cap\dots\cap A_n|.$$

Hvis vi blot ser på de første to led på højresiden, er et element fra A som ligger i m af delmængderne $A_1,A_2,\dots,A_n$, talt med

$$m-\binom{m}{2}=m-\frac{m(m-1)}{2}\le 1$$

gange, dvs. at

$$|A|\ge\sum_{i=1}^n|A_i|-\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|.$$

Desuden er $|A_k|=(2n-1)2(2n-2)!=2(2n-1)!$ og $|A_k\cap A_l|=(2n-2)!2^2$. Det sidste ses på følgende måde. Vi skal vælge to elementer $i,j\in\{1,2,\cdots,2n-1\}$ så i og $i+1$ afbildes i k og $k+n$, og j og $j+1$ afbildes i l og $l+n$. Dette kan gøres på

$$(2n-1)(2n-2)-2(2n-2)=(2n-3)(2n-2)$$

måder da vi ikke må vælge i og j som to på hinanden følgende tal. Desuden skal vi vælge om i skal afbildes i k eller $k+n$, og om j skal afbildes i l eller $n+l$. Dette kan gøres på 2^2 måder. For de resterende $2n-4$ elementer er der $(2n-4)!$ muligheder. Dermed er

$$|A| \geq \binom{n}{1} 2(2n-1)! - \binom{n}{2}(2n-2)!2^2 = 2n^2(2n-2)! > \frac{(2n)!}{2} = \frac{|S_{2n}|}{2}.$$

Opgave 6.1.1. Til at starte med er der $\frac{1992}{2} = 996$ sedler med et ulige tal i hatten. Vi viser at pariteten af antallet af sedler med et ulige tal er invariant. Hvis vi trækker to ulige tal, lægger vi et lige tal retur, dvs. antallet af sedler med et ulige tal reduceres med 2. Hvis vi trækker to lige tal, lægger vi et lige tal retur, og antallet af sedler med et ulige tal er uændret. Det er også tilfældet hvis vi trækker et lige og et ulige tal, for så lægger vi et ulige tal retur. Da der er et lige antal sedler med ulige tal til at starte med, bliver der ved med at være et lige antal, og når der kun er én seddel tilbage, må den derfor indeholde et lige tal.

Opgave 6.1.2. Antag at det er muligt. Da linjen går gennem linjestykket P_iP_{i+1} ligger P_i og P_{i+1} på hver sin side af linjen. Dermed ligger alle punkter med ulige nummer på samme side af linjen, dvs. dette er en invariant. Men dette er i modstrid med at linjen skærer linjestykket P_1P_{2013}. Altså er det ikke muligt.

Opgave 6.1.3. I hvert træk ændres pariteten af antallet af bolde af hver farve. Derfor er pariteten af antallet af røde bolde hele tiden modsat pariteten af antallet af gule bolde og pariteten af antallet af blå bolde. Når der kun er én farve tilbage, er der nul bolde af to af farverne, og det må derfor være de gule og blå bolde da deres antal har samme paritet. Det er derfor altid røde bolde der er tilbage, når der kun er bolde af én farve.

Opgave 6.1.4. Da 7 er ulige, kan der ikke være lige mange ulige og lige tal blandt a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 og a_7. Alle tallene kan derfor ikke have en partner af modsat paritet. Derfor er mindst en af faktorerne i produktet lige, hvlket betyder at produktet $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_7-b_7)$ også må være lige.

Opgave 6.1.5. Felterne nummereres fortløbende $1,2,3,\ldots,99$, så spiller nummer 1 starter på felt nummer 50, spiller nummer 2 på felt nummer 1 og spiller nummer 3 på felt nummer 99. Lad a være pariteten af forskellen mellem det felt spiller nummer 1 står på, og det felt spiller nummer 2 står på, lad b være pariteten af forskellen mellem det felt spiller nummer 1 og spiller nummer 3 står på, og lad c være pariteten af forskellen mellem det felt spiller nummer 2 og spiller nummer 3 står på. Til at starte med er $(a,b,c)=(u,u,l)$, hvor u står for ulige og l for lige. Når spiller 1 har trukket, er $(a,b,c)=(l,l,l)$. Situationen når det er spiller nummer 2 der skal trække, er invariant, da a, b og c skifter paritet to gange hver i løbet af en hel runde. Dermed er situationen altid (l,l,l) når spiller nummer to trækker, og det er derfor umuligt for spiller 2 at lande på samme felt som spiller nummer 1 eller 3.

Opgave 6.1.6. Lad S_n være antallet af talpar hvor det mindste står før det største i rækken efter det n'te træk. Der er i alt $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ talpar, og til at starte med står det mindste før det største i alle par. Derfor er $S_0 = 45$. Efter m træk står det mindste tal i hvert par efter det største i parret, dvs. $S_m = 0$. I hvert træk laves der kun om på rækkefølgen af netop ét par, dvs. S ændres med ± 1 i hvert træk. Derfor har S_n og n modsat paritet, dvs. at m ulige.

Opgave 6.2.1. Nej. Bemærk først at hver gang to kamæleoner mødes, bliver der en færre af to af farverne og to mere af den tredje, dvs. forskellen i antallet af fx grønne og røde kamæleoner vil ændre sig med 0 eller 3 og altså være konstant modulo 3. Hvis alle kamæleoner på øen skal have samme farve, vil der ikke være nogen kamæleoner af to af farverne, dvs. forskellen mellem antallet af kamæleoner af disse to farver er 0. Forskellen mellem antallet af en farve kamæleoner og en anden kan aldrig blive 0 da den fra starten ikke er 0 modulo 3, og den ikke ændres modulo 3. Dermed kan det ikke ende med at der kun er én farve kamæleoner tilbage.

Opgave 6.2.2. Tallet 666 er deleligt med 9, og dermed er summen af dets cifre det også. Resten modulo 9 af de årstal hvor dyret vågner, er derfor invariant da alle disse årstal er kongruente med 0 modulo 9. Derfor vågner dyret ikke i 2000013.

Opgave 6.2.3. Svaret er nej. For at vise dette vil vi gerne konstruere en invariant, og derfor er det vigtigt at overveje hvad der sker. Hvert minut er der to muligheder. Enten kommer der en person ind, eller også kommer der to ud. Forskellen mellem antal personer i rummet i de to muligheder er 3, dvs. det ser ud til at vi kan konstruere en invariant modulo 3. Lad os kalde antal personer i rummet efter n minutter for A_n. Hvis der hele tiden kommer en person

ind i rummet, er der hele tiden lige så mange personer til stede i rummet som antal minutter der er gået, dvs. $A_n = n$. Hvis der i m af de n tilfælde i stedet er forsvundet to personer fra rummet, så er der for hver gang blevet 3 færre end i det tilfælde hvor $A_n = n$, dvs. i dette tilfælde er $A_n = n - 3m$. Dette viser at $A_n - n \equiv 0$ modulo 3.

Hvis vi ser på om det er muligt at der efter 2025 minutter kan være 1000 personer i rummet, så er svaret nej da $2025 - 1000 = 1025$ ikke er kongruent med 0 modulo 3.

Opgave 6.2.4. Nummerér søjler og rækker således at målet er at nå fra $(0,0)$ til $(19,0)$.

Hvis $r = 2s$, kan man rykke a felter lodret og b felter vandret hvis $a^2 + b^2 = 2s$. Dette betyder at a og b altid har samme paritet, hvilket viser at målet ikke kan nås.

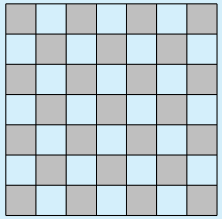
Hvis $r = 3s$, skal $a^2 + b^2 = 3s$. Hvis man regner modulo 3, ses at da må a og b begge være delelige med 3 da de kvadratiske rester modulo 3 er 0 og 1. Dermed kan målet ikke nås.

Opgave 6.2.5. Tallet $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ er invariant modulo 4: Hvis vi i celle (k, j) ændrer et 1 til et -1 eller omvendt, vil R_k og S_j begge ændre sig med ± 2, dvs. $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ ændres med -4, 0 eller 4.

Hvis der står 1 i hver celle, er $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i) = 2002 \equiv 2 \pmod 4$, dvs. der gælder altid at $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i) \equiv 2 \pmod 4$. Dermed er $\sum_{i=1}^{1001}(R_i + S_i)$ forskellig fra 0.

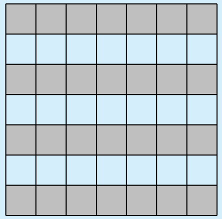
Opgave 6.2.6. Forskellen på de to koordinater i punktet $(7,29)$ er delelig med 11. Vi påstår at det er en invariant der gælder alle de punkter som kan tilføjes til S. Hvis vi tilføjer et punkt efter regel i) ud fra et punkt hvor forskellen på de to koordinater er delelig med 11, da vil det nye punkt oplagt også opfylde dette. Hvis vi tilføjer et punkt efter regel ii) ud fra et punkt hvor koordinatforskellen er delelig med 11, da vil forskellen mellem koordinaterne i det nye punkt være halvt så stor, og dermed stadig delelig med 11. Hvis vi benytter regel iii) og tilføjer (x, z) ud fra (x, y) og (y, z) hvis koordinatforskel er delelig med 11, da vil det nye punkt også have denne egenskab da $x - z = (x - y) + (y - z)$. Punktet $(3,2013)$ kan derfor aldrig komme til at ligge i S da $2013 - 3 = 2010$ ikke er delelig med 11.

Opgave 6.3.1. Farv brættet som vist på figuren. Da der er 25 grå felter og 24 hvide, og en brik flytter til et felt af modsat farve, kan det ikke lade sig gøre at der på hvert felt står netop én brik efter at alle brikker er flyttet.



Opgave 6.3.2 Nej. Ved den almindelige skakbrætsfarvning ser vi at der er 30 hvide felter og 30 sorte felter. De skal dækkes af 15 brikker som hver dækker tre sorte og en hvid eller en sort og tre hvide. De 15 brikker dækker derfor altid et ulige antal sorte felter og et ulige antal hvide felter, og de kan altså ikke dække brættet med 30 hvide felter og 30 sorte felter.

Opgave 6.3.3. Farv brættet som vist på figuren.



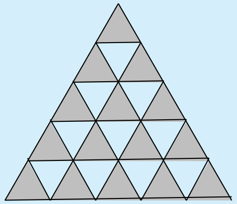
Da der er 28 grå felter og 21 hvide, og hver brik flytter til et felt af modsat farve, kan det ikke lade sig gøre at der på hvert felt står netop én brik efter at alle brikker er flyttet.

Opgave 6.3.4. Nej. Farv diagonalerne på skift i tre farver så det felt der er fjernet ligger i en diagonal af længde 1. Nu er der henholdsvis $1+4+7+6+3 = 21$, $2+5+8+5+2 = 22$ og $3+6+7+4 = 20$ felter af hver af de tre farver. Da en 1×3-brik dækker et felt af hver farve, er det ikke muligt at dække brættet af denne type brikker.

Opgave 6.3.5 Nej. Farv felterne i række 1, 5, 9 og 13 røde, felterne i række 2, 6 og 10 gule, felterne i række 3, 7 og 11 blå og felterne i række 4, 8 og 12 grønne. En brik dækker enten fire felter med forskellige farver eller fire felter med samme farve, dvs. differensen mellem antallet af felter der er malet røde, og antal felter der er malet gule, skal være delelig med 4 hvis brættes skal kunne dækkes. Men der er 52 røde felter og 39 gule.

Alternativt kan man bruge følgende farvelægning: I rækker med lige numre farves de to første felter hvide, de to næste sorte osv. I rækker med ulige numre modsat farvelægning.

Opgave 6.3.6. Farv felterne som vist på figuren. Da der er 15 grå felter og 10 hvide felter, og lopperne efter et ulige antal fløjt er på et felt af modsat farve, kan der højst være 10 lopper på de grå felter efter fem fløjt. Der er derfor mindst fem tomme felter.



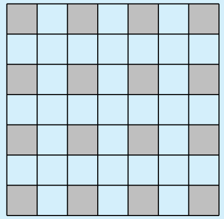
Det er muligt at opnå netop fem tomme felter: Lad hvert hvide felt danne par med det grå felt umiddelbart til venstre for feltet. Da har alle på nær de fem grå felter langs den højre kant af brættet en makker. Hvis lopperne der er på et felt som har en makker, hele tiden hopper frem og tilbage mellem disse to felter, da er der altid en loppe på disse felter. Efter fem fløjt er det derfor kun de fem felter langs brættets højre kant som er tomme.

Opgave 6.3.7. Farv brættet i fire farver som vist på figuren.

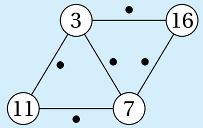
1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4
1	3	1	3	1	3
2	4	2	4	2	4

Da der er $117 > 29 \cdot 4$ markerede felter, må der være mindst 30 markerede felter af samme farve. Disse felter opfylder det ønskede.

Opgave 6.3.8. Farv brættet som vist på figuren. Da hver brik højst dækker ét gråt felt, skal der bruges mindst 16 brikker til at dække brættet. Da der er 49 felter, ses let at eneste mulighed er at bruge 15 brikker af type a og kun en af type b.



Opgave 6.3.9. For hver kant med tallet a i den ene ende og b i den anden ende, $a < b$, betragtes kanten så den er vandret med a til venstre og b til højre, og der sættes en prik lige *over* kanten. Hver trekant indeholder nu en eller to prikker, og hvis den indeholder to prikker, er den rød, og hvis den indeholder en prik, er den blå.



Hvis vi betragter de 12 ydre kanter, kan de 12 tilhørende prikker ikke alle ligge uden for sekskanten eller alle ligge inden i sekskanten, da der nødvendigvis er et mindste tal tilknyttet de 12 hjørner, og de to tilhørerende kanter derfor har én prik inde i sekskanten og én prik uden for sekskanten. Da der er 30 indre kanter, indeholder sekskanten derfor mindst 31 prikker og maksimalt 41 prikker. Da der er 24 trekanter i alt, må der derfor være mindst syv trekanter med to prikker, dvs. mindst syv røde trekanter, og mindst syv trekanter med én prik, dvs. mindst syv blå trekanter.

Opgave 6.4.1. Nummerér de vandrette lag i kuben $1, 2, 3, \ldots, 2n$. Alle sorte enhedskuber får nu tildelt det nummer lag de tilhører, som vægt, mens de hvide får tildelt dette nummer med modsat fortegn. Alle klodser der ligger vandret, består af to enhedskuber med sum nul, mens de lodrette klodser der ligger med den sorte del opad, består af to enhedskuber med sum -1, og dem der ligger med den hvide ende opad, består af to med sum 1. Da summen af vægtene af samtlige enhedskuber er nul, ligger halvdelen af de lodrette klodser med den sorte ende opad og halvdelen med den hvide ende opad.

Opgave 6.4.2. Nej. Lad a, b, c og d betegne antal sten ved henholdsvis A, B, C og D. Vi ønsker at tildele stenene ved hvert hjørne en vægt så summen af vægtene er invariant modulo et eller andet helt tal. Hvis man fjerner n sten fra et hjørne, lægger man $2n$ sten ved et nabohjørne. Dermed ændres forskellen af sten ved de to hjørner med $3n$, dvs. $I = a-b+c-d$ ændres med $\pm 3n$. Altså er $I = a-b+c-d$ invariant modulo 3. Til at starte med er $I = a-b+c-d = 0 \equiv 0 \pmod 3$. Det er derfor umuligt at opnå $a = 2012$, $b = 2011$, $c = 2011$ og $d = 2010$ da dette giver $I = a-b+c-d = 2 \not\equiv 0 \pmod 3$.

Opgave 6.4.3. Vi ønsker at finde vægte $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ sådan at hvis $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ er seks på hinanden følgende led i følgen, da er $I = \sum_{i=1}^{6} v_i x_i$ konstant modulo et helt tal n. Det er oplagt at vælge $n = 10$. Betragt $I = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 10x_5 + 2x_6 \pmod{10}$. Tallet I er invariant modulo 10 da

$$\begin{aligned}&2x_2+4x_3+6x_4+8x_5+10x_6+2(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6)\\ &-(2x_1+4x_2+6x_3+8x_4+10x_5+2x_6) = 10x_6 \equiv 0 \pmod{10}.\end{aligned}$$

Da $2\cdot0+4\cdot1+6\cdot0+8\cdot1+10\cdot0+2\cdot1 \not\equiv 2\cdot1+4\cdot0+6\cdot1+8\cdot0+10\cdot1+2\cdot0$ modulo 10, vil $0, 1, 0, 1, 0, 1$ aldrig optræde i følgen.

Opgave 6.4.4. Vi ønsker at give hvert felt en vægt sådan at den vægtede sum af felterne øges med samme tal uanset hvilket felt Georg vælger. For at bestemme vægtene opstiller vi nogle ligninger, og for ikke at få alt for mange ligninger giver vi felter der ligger symmetrisk samme vægt. Vægtene kaldes henholdsvis a, b, c, d, e, f (se figur).

a	b	c	b	a
b	d	e	d	b
c	e	f	e	c
b	d	e	d	b
a	b	c	b	a

Vi ønsker altså at vælge vægtene så

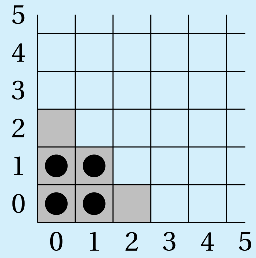
$$\begin{aligned}a+2b = a+b+c+d = 2b+c+e =\\ 2b+d+2e = c+2d+e+f = 4e+f.\end{aligned}$$

Ved at løse ligningssystemet er det ikke svært at nå frem til at $a = 8$, $b = 7$, $c = 5$, $d = 2$, $e = 3$ og $f = 10$ er en mulig løsning, og her øges den vægtede sum med 22 hver gang Georg vælger et felt. Til at starte med er den vægtede sum 0, og da summen er invariant modulo 22, vil den vægtede sum være et multiplum af 22 uanset hvilke felter Georg vælger og hvor mange gange. I den situation hvor der står 2012 i alle felter, er den vægtede sum

$$2012(4a+8b+4c+4d+4e+f) = 2012\cdot 138 = 2^3\cdot 3\cdot 23\cdot 503.$$

Da denne sum ikke er delelig med 22, kan Georg aldrig opnå denne situation.

Opgave 6.4.5. Nummerér søjler og rækker som vist på figuren, og kald feltet i søjle i og række j for (i, j).



En brik på feltet (i, j) tillægges nu værdien $\frac{1}{2^{i+j}}$, for på denne måde forbliver den samlede værdi af brikkerne på brættet konstant da $\frac{1}{2^{i+j}} = \frac{1}{2^{(i+1)+j}} + \frac{1}{2^{i+(j+1)}}$.

a) Til at starte med er værdien af de fire brikker $1 + 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$. Hvis der stod en brik på hvert felt på hele brættet, ville den samlede værdi af de uendeligt mange brikker være

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 4,$$

da værdien af alle brikker i første søjle er 2, værdien af brikkerne i næste søjle halvt så stor osv. Hvis der ikke er nogen brikker på det grå område, kan brikkernes samlede værdi derfor højst være $4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$, dvs. det er ikke muligt at opnå at der ikke er brikker på det grå område når man starter med de fire brikker på figuren.

b) Hvis man starter med kun en enkelt brik i nederste venstre hjørne, så har brikkerne på brættet hele tiden en samlet værdi på 1. Antag at det er muligt at tømme det grå område for brikker. Efter hvert træk vil der hele tiden være netop én brik i den yderste venstre søjle og én brik i den nederste række. Hvis disse to brikker ikke skal være på det grå område, er deres værdi højst $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$. Det betyder at brikkerne der står på resten af brættet, har en samlet værdi på mindst $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Hvis der stod en brik på hvert eneste felt på resten af brættet fraregnet det grå område, vill de have en samlet værdi på

$$4-2-1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

men dette er umuligt da der efter et endeligt antal træk ikke kan være uendeligt mange brikker. Hvis der kun står en enkelt brik i nederste venstre hjørne, er det derfor heller ikke muligt at tømme det grå område for brikker.

Opgave 6.4.6. Nej. Kald længden af de to kateter for p og q. Hver gang man erstatter en trekant med to nye, bliver de to nye ensvinklede med den oprindelige, og hypotenusen bliver henholdsvis p og q af den oprindelige hypotenuse. Alle de trekanter man kan opnå, er derfor ensvinklede, og deres hypotenuse er $p^n q^m$ for to ikke negative heltal n og m. Vi tillægger nu en trekant med hypotenuse $p^n q^m$ vægten $\frac{1}{2^{n+m}}$. På den måde er den samlede vægt af trekanterne konstant da en trekant vil erstattes af to trekanter med halvt så stor vægt som den selv har. Til at starte med er den samlede vægt af trekanterne 4, og det vil den altså fortsætte med at være uanset hvordan man trækker. Hvis vi ser på vægten af alle de uendeligt mange mulige trekanter man kan opnå, talt netop én gang hver, er den også 4: Vægten af dem med hypotenuse $p^n q^m$ for et fast n er nemlig $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots=\frac{1}{2^{n-1}}$, og altså er den samlede vægt $2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=4$. Da vi efter et endeligt antal træk kun har endeligt mange trekanter med samlet vægt 4, må der derfor altid være mindst to kongruente iblandt dem.

Opgave 6.5.1. Ja. Betragt først summen S af tallene i den første søjle. Hvis der er 1-taller i samtlige felter i første søjle, vælger vi første søjle og trækker 1 fra samtlige tal i søjlen. På denne måde opnår vi at der står 0 i hvert felt i første søjle. Hvis der er et eller flere 1-taller i første søjle (men ikke 1-taller i alle felter i søjlen), vælges de rækker der har et 1-tal i første søjle én efter én således at alle tallene i disse rækker fordobles. Derefter vælges den første søjle så der trækkes 1 fra hvert tal i søjlen. På denne måde reduceres S, og alle tal i søjlen forbliver positive. Hvis der ikke er nogen 1-taller i første søjle, så vælges søjlen så der trækkes 1 fra hvert tal i søjlen. På denne måde reduceres S også samtidig med at alle tal i søjlen forbliver positive. Ved at fortsætte på denne måde reduceres S hele tiden, og da S er et helt ikke-negativt heltal, må vi til slut ende med at der er nuller i hvert felt i søjlen. Læg mærke til at der stadig står positive tal i alle andre søjler.

Nu fortsætter vi på denne måde med næste søjle. Dette påvirker ikke den første søjle da den kun indeholder nuller. Ved at fortsætte på denne måde kan vi opnå at der til slut står 0 i alle felter.

Opgave 6.5.2. For at finde en monovariant undersøger vi først hvad der sker når vi bytter om på to tal. Hvis tallene a, b, c, d står ved fire på hinanden følgende kanter og $(a-d)(b-c)<0$, er $ab+cd<ac+bd$. Når vi har byttet om på b og c, er summen af produkterne af alle par af tal der står ved to nabokanter, dermed vokset. Lad derfor S være summen af alle produkter af to tal der står ved to nabokanter på et bestemt tidspunkt. Som vi lige har set, vokser S hver gang vi bytter om på to tal, og S er derfor en monovariant. Da det altid er de samme n tal der står langs de n kanter, er der kun et endeligt antal muligheder for S, og når S vokser hver gang vi bytter om på to tal på to nabokanter, kan vi ikke fortsætte med dette i det uendelige.

Opgave 6.5.3. Ja. Da der kun er endeligt mange rækkefølger for de n kort, vil kortene på et tidspunkt ligge i en rækkefølge som de også tidligere har ligget i. Rækkefølgen af kortene er altså periodisk fra et vist trin. Betragt alle de tal der har været på det øverste kort i denne periode, og lad m være det største. Efter at kortet m har ligget øverst, vil det ligge på plads nummer m. Da m er den største værdi på det øverste kort i perioden, kan m ikke ændre plads mere. Altså må $m=1$ da vi ved at perioden gentager sig, og altså at m igen vil være øverste kort.

Opgave 6.5.4. Tegn n rette linjestykker der parvis forbinder de n røde punkter med de n blå punkter på en vilkårlig måde. Hvis der findes to linjestykker der skærer hinanden, da danner de fire involverede punkter en konveks firkant

$RRBB$ så linjestykkerne er diagonalerne i denne firkant, og R og B betegner henholdsvis røde og blå punkter. Nu erstatter vi de to diagonaler med de to sider RB og RB. Ifølge trekantsuligheden bliver den samlede længde af de n linjestykker mindre ved denne operation, dvs. summen af længderne af de n linjestykker er vores monovariant S. Da der kun er endeligt mange muligheder for at tegne de n linjestykker, kan S kun antage et endeligt antal forskellige værdier. Dermed kan vi ikke blive ved med at udføre operationen, hvilket betyder at vi på et tidspunkt vil opnå at de n linjestykker ikke skærer hinanden.

Opgave 6.5.5. Hvis der i række n, $n > 1$, står et m, må der være mindst m steder i rækken hvor der står m, da der i den foregående række var netop m forekomster af et bestemt tal. Hvis vi ser på tallene i hver af de 2013 søjler, så må tallene i hver søjle, hvis vi ser bort fra tallet i den første række, være en ikke aftagende følge af positive heltal. Desuden er denne følge begrænset opadtil da hvert tal højst er 2013. Derfor må følgen være konstant fra et vist trin, og på et tidspunkt vil der altså komme to identiske rækker efter hinanden.

Opgave 6.5.6 Vi viser at det altid er muligt for Gandalf at komme fra verden nummer n, $n > 1$, til en verden med et mindre nummer. Dette viser nemlig at Gandalf fra en vilkårlig verden n, $n > 1$, kan komme til verden nummer 1, og da man derfor også kan komme fra verden nummer 1 til en vilkårlig verden n, kan han bevæge sig fra en vilkårlig verden til en vilkårlig anden verden.

Hvis $n = 3k+1$, kan Gandalf komme til verden nummer k, hvor $k < 3k+1 = n$.

Hvis $n = 3k+2$, kan Gandalf bevæge sig således $3k+2 \to 6k+4 \to 2k+1$, hvor $2k+1 < 3k+2 = n$.

Hvis $n = 3k$, kan Gandalf bevæge sig således $3k \to 9k+1 \to 18k+2 \to 36k+4 \to 12k+1 \to 4k \to 2k$, hvor $2k < 3k = n$.

Opgave 6.5.7. Bemærk først at hvis to nabohjørner på et tidspunkt ikke begge er tomme, da vil det fortsætte på den måde: Når et hjørne bliver tomt, sker det ved at det afgiver en frø til hvert af de to nabohjørner. To nabohjørner kan derfor ikke blive tomme samtidigt.

Hvis der på et tidspunkt opstår en situation hvor der ikke findes to nabohjørner uden frøer, da er der frøer ved mindst 501 af hjørnerne, og vi er færdige.

Antag derfor at der findes to nabohjørner der bliver ved med at være tomme uanset hvor lang tid der går. Nu nummererer vi hjørnerne $1, 2, 3, \ldots, 1001$ i rækkefølge således at de to tomme hjørner er henholdsvis nummer 1 og nummer 1001. Til et givent tidspunkt har en frø samme nummer som det hjørne den er ved. Lad S være summen af kvadraterne på frønummeret for hver frø. Da $(n-1)^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2 > n^2$ vokser S med 2 hvert minut så længe der stadig findes et hjørne med mindst to frøer. Bemærk at dette kun holder fordi vi ved at der aldrig hopper frøer mellem hjørne 1 og hjørne 1001. Da S er begrænset opadtil, må der derfor til sidst opstå en situation hvor der højst er en frø ved hvert hjørne og dermed frøer ved mindst 501 hjørner.

Opgave 6.6.1. Vi ser først på tilfældet hvor n er delelig med tre. Knapperne inddeles i tre grupper således at hver gruppe indeholder hver tredje knap hele vejen rundt. Antal knapper der lyser i de tre grupper, kaldes henholdsvis a, b og c, og vi antager at $a = 1$ og $b = c = 0$ i startsituationen. Vi bemærker at hvis vi trykker på en knap fra en gruppe, så ændres a, b og c med ± 1, dvs. at $a - b$ ikke ændrer paritet. Pariteten af $a - b$ er altså en invariant. Fra starten er $a - b = 1$, dvs. at vi aldrig kan opnå $a = b = 0$ som ønsket.

Nu ser vi på tilfældet hvor n ikke er delelig med tre. Knapperne nummereres fortløbende $1, 2, \ldots, n$, så det er knap nummer 1 der lyser fra starten. Ved at trykke på knap $1, 2, \ldots, n-2$ i nævnte rækkefølge opnår vi en situation hvor alle knapper på nær nummer $n-2$ lyser. Hvis n har rest 1 ved division med 3, da kan vi slukke dem alle i grupper af tre, for hvis man trykker på den midterste af tre lysende lamper, så slukkes de alle. Hvis n har rest 2 ved division med 3, da trykker vi først på knap $n-1$ og opnår en situation hver alle knapper på nær nummer $n-1$ og n lyser. Disse kan vi slukke på samme måde som før, da antallet er deleligt med tre, og de sidder på række.

Opgave 6.6.2. Nummerér personerne ved bordet $1, 2, 3, \ldots, 1994$ i denne rækkefølge, så det er person nummer 1 der til at starte med har 1994 kort. Et korts værdi er på et givent tidspunkt nummeret på den person der holder det. Den samlede værdi af kortene kaldes S, og S er invariant modulo 1994 (overvej).

Til at starte med er $S = 1994 \equiv 0 \pmod{1994}$. Spillet kan kun slutte hvis hver person har netop ét kort. Hvis alle personer har netop ét kort, er værdien af kortene $\frac{1994 \cdot 1995}{2} \equiv 997 \not\equiv 0 \pmod{1994}$, dvs. spillet slutter aldrig.

Opgave 6.6.3. Bemærk først at produktet $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ er invariant da $a_j a_k = \gcd(a_j, a_k)\operatorname{lcm}(a_j, a_k)$. Antag at processen kan fortsætte i det uendelige, og lad a_m være det tal med det største nummer som bliver ved med at ændre sig. Fra et vist trin vil a_k, $k > m$, dermed ikke ændre sig mere. Fra et vist trin gælder derfor at hver gang m indgår i det par af numre (j, m) der bliver valgt, er m den største, og det betyder at a_m erstattes med $\operatorname{lcm}(a_m, a_j)$. Da a_j ikke går op i a_m, vil $\operatorname{lcm}(a_m, a_j) > a_m$. Dermed vil a_m fra et vist trin vokse hver gang m er blandt de to numre der vælges, hvilket er i modstrid med at produktet $a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ er invariant.

Opgave 6.6.4. Lad $R(P)$ være antallet af forskellige reelle rødder i P hvis P har grad 3, og antallet af forskellige rødder plus 1 hvis P har grad mindre end 3. Da ændres R ikke ved operationerne (i) og (ii):

Hvis $x_0 \neq 0$ er rod i polynomiet

$$Q(x) = d x^3 + c x^2 + b x + a = x^3 \left(a \left(\frac{1}{x}\right)^3 + b \left(\frac{1}{x}\right)^2 + c \left(\frac{1}{x}\right) + d \right),$$

da er $\frac{1}{x_0}$ rod i polynomiet $P(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$.

Hvis $x = 0$ er rod i Q eller P, og dette polynomium har grad 3, da har det andet polynomium ikke grad 3 og en rod mindre. Hvis $x = 0$ er rod i Q eller P, og dette polynomium ikke har grad 3, da er $x = 0$ også rod i det andet polynomium, dvs. de har samme antal forskellige rødder. Dermed er R invariant ved operation (i).

Tallet R er oplagt invariant under operation (ii) da rødderne her blot translateres, og graden ikke ændres.

Invarianten R for de to polynomier er $R(P_1) = 3$ og $R(P_2) = 2$ da

$$P_1(x) = x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) \quad \text{og} \quad P_2(x) = x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2),$$

dvs. det er umuligt at komme fra P_1 til P_2.

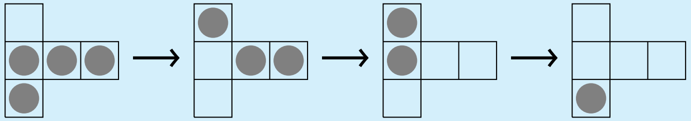
Opgave 6.6.5. Kald de 31 kort $k_1, k_2, \ldots, k_{31}$, og læg kortene ved hjørnerne i en regulær 31-polygon $C_1 C_2 \ldots C_{31}$ så k_1 ligger ved C_1 osv. Afstanden fra kortet ved C_i til kortet ved C_{i+j} defineres til j. Alle indeks og afstande regnes modulo 31. Ved operation (i) flyttes alle kort netop én plads mod venstre. Ved operation (ii) flyttes kortene ved $C_1, C_2, \ldots, C_{31}$ henholdsvis $1, 2, \ldots, 15, 16, \ldots, 30, 0$ pladser mod højre.

Ved operation (i) ændres afstanden fra k_i til k_{i+1} ikke, og ved operation (ii) ændres den til det dobbelte. Efter et antal operationer er afstanden fra k_i til k_{i+1} altså den samme for alle i, dvs. kender vi placeringen af k_1 og k_2, da kender vi placeringen af resten af kortene. Fra starten er afstanden fra k_1 til k_2 lig med 1. Efter $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ gange operation (ii) er afstanden fra k_1 til k_2 henholdsvis $1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, 4, 8, 16, 1, 2, \ldots$, dvs. vi kan opnå netop fem forskellige afstande fra k_1 til k_2. Desuden kan vi vha. et passende antal af operation (i) opnå at k_1 ligger på en vilkårlig af de 31 pladser. Dermed kan man opnå $31 \cdot 5 = 155$ forskellige rækkefølger af de 31 kort.

Opgave 6.6.6. Læg et koordinatsystem så rektanglets nederste ventre hjørne er i $(0,0)$, og så koordinatsystemets akser er parallelle med rektanglets sider. Nummerér de mindre rektanglerne $1, 2, 3, \ldots, m$, og lad a_i være antallet hjørner i rektangel nummer i hvor begge koordinater er hele tal. Lad tilsvarende a være antallet af hjørner i det store rektangel hvor begge koordinater er hele tal. Da alle de mindre rektangler har mindst én side af heltallig længde, vil a_i være 0, 2 eller 4 for alle $i = 1, 2, 3, \ldots, m$. Et hjørne i et rektangel er hjørne i enten to eller fire rektangler (her tælles det store rektangel også med). Derfor er $a + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$ lige, og dermed må a også være lige. Da a er lige, og rektanglets ene hjørne er $(0,0)$, må mindst én af rektanglets sider have heltallig længde.

Opgave 6.6.7. Det er muligt at ende med netop én brik netop når n ikke er et multiplum af 3. Først viser vi at det ikke er muligt for $n = 3m$. Farv diagonalerne på brættet på skift i tre forskellige farver. Til at starte med står de $9m^2$ brikker på $3m^2$ felter af hver farve. I hvert træk vil der komme en brik mere på en af farverne, og en brik mindre på felter af hver af de to andre farver. Differensen mellem antal brikker på felter af to forskellige farver er derfor altid lige. Dermed kan man ikke ende med én brik på brættet.

Nu viser vi at det kan lade sig gøre når n ikke er et multiplum af 3. Her skal vi ikke udnytte nogen farvning, men blot finde en procedure der virker. Det ses nemt at det kan lade sig gøre for $n = 2$. Bemærk nu at hvis man har fire brikker placeret som på figuren, kan man fjerne de tre på række. Dette trick kan bruges til at reducere $n = 4$ til tilfældet $n = 2$.



Hvis $n \equiv 2 \pmod 3$, kan man fjerne baner på tre rækker brikker langs kanterne ved hjælp af tricket på figuren og dermed reducere til tilfældet $n = 2$. Hvis $n \equiv 1 \pmod 3$, $n > 1$, kan man på tilsvarende måde reducere til tilfældet $n = 4$.

Opgave 7.1.1. Først bemærker vi at spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, at A og B skiftes til at trække, og at der gælder samme regler for hvordan A og B må trække. Påstand: Tabermængden består af alle positive multipla af 3, og vindermængden af alle positive heltal som ikke er et multiplum af 3. Argument: Hvis A trækker fra en situation fra V, dvs. antallet af sten ikke er et multiplum af 3, da kan A ved at fjerne 1 eller 2 sten efterlade et multiplum af 3 sten til modstanderen. Hvis A derimod trækker fra en situation fra T, dvs. når der ligger et multiplum af 3 sten på bordet, da vil A aldrig efterlade et multiplum af 3 sten fordi $3 \nmid 2^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, dvs. at spiller A her efterlader en situation fra V. Dermed har A en vindende strategi når n ikke er et multiplum af 3.

Opgave 7.1.2. Først bemærker vi at spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, at A og B skiftes til at trække, og at der gælder samme regler for hvordan A og B må trække. Påstand: Tabermængden er samtlige positive multipla af 6. Det indser vi på følgende måde: Det mindste tal i tabermængden må være $n = 6$ da det er det mindste tal som ikke er en primtalspotens. Ved at overveje tallene $7, 8, 9, 10, 11, 12$ får man hurtigt en idé om at tabermængden er alle multipla af 6. Da ingen primtalspotenser er et multiplum af 6, vil man fra en udgangsposition med et multiplum af 6 sten på bordet altid efter endt træk ende med et antal sten som ikke er et multiplum af 6. Desuden kan man fra enhver udgangsposition der ikke er delelig med 6, efter endt træk ende med et multiplum af 6 sten på bordet da man kan fjerne 1, 2, 3, 4 eller 5 sten. Dermed består tabermængden af samtlige multipla af 6.

Opgave 7.1.3. Først bemærker vi at spillet slutter efter et endeligt antal træk. For $n = 1, 2, 3$ kan Albert ikke klippe til at starte med, og han har derfor tabt. For $n = 4, 5, 6, 7$ kan Albert klippe snoren i tre stykker så det længste stykke er 2 eller 3 langt, og dermed vinder han. For $n = 8, 9$ kan Albert kun klippe så det længste stykke er 4, 5, 6 eller 7 langt, og han overlader dermed en vindende situation til Benny. Ved at fortsætte på samme måde kan man se at tabermængden består af alle positive hele tal på formen 3^k og $3^k - 1$, hvor k er et ikke-negativt heltal, og vindermængden består af de resterende positive heltal. Dette beviser vi ved at vise at for hvert element i vindermængden er det muligt at klippe så længden af den længste snor er et element i tabermængden, mens man for ethvert element i tabermængden ender med at længden af den længste snor er et element i vindermængden uanset hvordan man klipper, hvis det altså er muligt at klippe. Lad n være et element i tabermængden. Hvis $n = 3^k$ eller $n = 3^k - 1$, vil den længste snor når man har klippet, have længde mindst $3^{k-1} + 1$ og længde højst $3^k - 2$, dvs. uanset hvordan man klipper, efterlader man en situation fra vindermængden. Hvis n derimod ligger i vindermængden, og $n = 3^k + m$, $0 < m < 2 \cdot 3^k - 1$, kan man klippe så længden af den længste snor er 3^k, hvis $m > 1$, og $3^k - 1$, hvis $m = 1$, og dermed efterlade en snor hvis længde er et element i tabermængden. Vi har nu bevist at Albert netop har en vindende strategi for alle værdier af n som ikke er på formen 3^k eller $3^k - 1$.

Opgave 7.1.4. Kald de to spillere for A og B sådan at A starter. Først bemærker vi at spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, at A og B skiftes til at trække, og at der gælder samme regler for hvordan A og B må trække. Påstand: Tabermængden består af alle spilpositioner med henholdsvis a, a, a og b, hvor $b \geq a$, tændstikker i de fire bunker. Vindermængden består af alle de resterende positioner. Argument: Fra et udgangspunkt i V kan man nemlig i et træk komme til en spilposition fra T: Vælg nemlig to bunker som ikke indeholder færrest tændstikker, og fjern tændstikker fra disse så de har samme antal tændstikker som den bunke med færrest. Læg mærke til at der findes to bunker som ikke indeholder samme antal som den med færrest tændstikker, da vi ikke er i en situation fra T. Fra et udgangspunkt i T, dvs. fra en position med a, a, a og b, $b \geq a$, tændstikker i de fire bunker, kan man efter endt træk aldrig ende i en tilsvarende (overvej), man ender derfor altid med en position fra V, eller også kan man slet ikke trække. Dermed har den spiller som starter, en vindende strategi.

Opgave 7.2.1. Georg har en vindende strategi for ulige n. I første træk skal Georg fjerne en hel bunke. Derefter er der et lige antal bunker med lige mange mønter i hver. Hver gang Georgs mor fjerner x mønter fra en bunke med y mønter, skal Georg gøre det samme. På den måde vil der efter Georgs tur altid være et lige antal bunker der kan sættes sammen i par så to bunker der danner par, indeholder lige mange mønter. Derfor kan Georg altid udføre det beskrevne træk, og Georgs mor kan aldrig vinde. Da der er endeligt mange mønter, vil spillet slutte efter et endeligt antal træk, og derfor vil Georg til sidst vinde. Hvis n er lige, kan Georgs mor vinde ved at følge samme strategi.

Opgave 7.2.2. Det har spiller B. Kortene parres to og to så tallene på to kort i hvert par har sum 666. Dette giver en entydig parring af de 124 kort, og yderligere er differensen af tallene på to parrede kort aldrig 1, 10 eller 100 (overvej). Dermed kan spiller B ved i hvert træk at vælge makkerne til de to kort A netop har trukket, sørge for at der altid er en situation hvor alle kort på bordet har en makker, når det er A's tur til at trække. Bemærk at dette træk er lovligt da to kort har samme differens som differensen af deres makkere. Dette sikrer B mulighed for at trække hver eneste gang A har trukket, og det er dermed A der først havner i en situation hvor det er umuligt at trække. Altså vinder B ved at følge denne strategi.

Opgave 7.2.3. Alma har en vindende strategi for samtlige værdier af n. Hvis n er ulige, farvelægger Alma et 1001×1001-kvadrat i midten af brættet i første træk. Nu har hun delt brættet i to symmetriske halvdele, og hun kan nu hver gang kopiere Berthas træk symmetrisk på den modsatte side. Hvis n er lige, starter hun blot med at farvelægge et 1000×1000-kvadrat i midten med en række af små kvadrater forneden. Brættet er endnu engang delt i to symmetriske halvdele hvor man ikke kan tegne et kvadrat der lapper ind over begge, og hun kan nu igen følge samme strategi som før.

Opgave 7.2.4. Anne har en vindende strategi. I første træk vælger Anne at erstatte 10^{2007} med 2^{2007} og 5^{2007}. På den måde opnår hun to tal med helt de samme egenskaber når vi ser på divisorer, da de begge er på formen p^{2007}, hvor p er et primtal. Herefter kan hun kopiere Berits træk på følgende måde: Lad p og q være primtallene 2 og 5 i en eller anden rækkefølge. Efter første træk efterlader Anne en situation hvor der står præcis de samme potenser af p og q på tavlen. Hvis Berit vælger et tal p^k, må hun erstatte det med primtalspotenserne p^m og p^{k-m} for et heltal m som opfylder at $1 \leq m < k$. Nu vælger Anne tilsvarende q^k og erstatter det med q^m og q^{k-m}. Hvis Berit vælger at slette et eller begge af to ens tal p^n, vælger Anne at slette det ene eller begge af tallene q^n. På denne måde efterlader hun altid en situation til Berit hvor der står præcis de samme potenser af p og q på tavlen. Hun kan derefter altid kopiere Berits træk som beskrevet. Da spillet stopper efter et endeligt antal træk, må Anne vinde hvis hun følger denne strategi.

Opgave 7.3.1. Spiller A har en vindende strategi. Først bemærker vi at spillet ikke nødvendigvis ender efter et endeligt antal træk, dvs. når vi skal bevise at A har en vindende strategi, skal vi altså også vise at spillet faktisk ender hvis A følger denne strategi.

Først lægger A en mønt i skålen og efterlader 2013 mønter til B. Det interessante i denne sammenhæng er at 2013 er et multiplum af 3. Herefter følger A følgende strategi: Hvis B lægger én mønt i skålen, så tager A fire, og hvis B tager fire mønter, så lægger A én mønt i skålen. Med denne strategi efterlader A i hver runde tre mønter færre i skålen end hun gjorde i forrige runde. Dermed efterlader hun altid et antal mønter der er et multiplum af 3.

Vi mangler at vise at det er muligt altid at følge denne strategi, og at den fører til sejr. Det er muligt at følge denne strategi, for hvis A skal tage fire mønter, betyder det at B netop har lagt en mønt i en skål der ikke var tom, dvs. skålen indeholder mindst $3+1=4$ mønter når A skal trække. Desuden efterlader B altid et antal mønter der ikke er et multiplum af 3, dvs. B tager aldrig den sidste mønt. Da der efter hvert af A's træk bliver færre mønter i skålen, ender spillet med en vinder, og denne vinder må derfor være A.

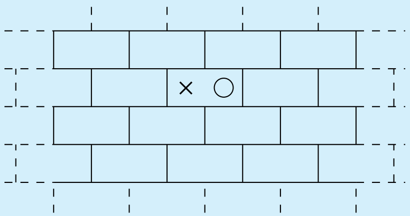
Opgave 7.3.2. Den spiller som starter, har en vindende strategi. Kald de to spillere for A og B sådan at A starter. Spiller A parrer alle konfigurationer af de n lamper sådan at et par består af to konfigurationer der kun afviger på lampen længst til venstre. Spiller A trykker nu på kontakten længst til venstre i hvert eneste træk, for på den måde sørger A for at konfigurationer i samme par altid forekommer netop før og efter hendes tur. Dette er altid et lovligt træk fordi B aldrig kan trykke på knappen til venstre da det jo ville give situationen lige inden, og derfor trykker på en anden knap og skaber en konfiguration i et nyt par. Dermed kan A altid trække, og B taber.

Opgave 7.3.3. Vi kalder de to spillere for A og B, hvor A starter. Spiller B kan vinde ved at følge denne strategi: Lad r være antal træk hvor man må fjerne seks tændstikker. Til at starte med er $r = 10$, men dette antal falder i løbet af spillet for hver gang en spiller tager seks tændstikker. Bemærk først at $1000 = 6 \cdot 155 + 7 \cdot 10$. Så længe der er flere end $7 \cdot r$ tændstikker når A skal trække, så gør B følgende: Hvis A trækker x, $x \in \{1,2,3,4,5\}$, tændstikker, så trækker B $6 - x$ tændstikker. Hvis A trækker seks tændstikker, så trækker B en tændstik. På den måde efterlader B altid $6 \cdot n + 7 \cdot r$ tændstikker til A, hvor n og r er ikke-negative heltal.

Hvis $r = 0$ før der opstår en situation med $7 \cdot r$ tændstikker på bordet, så efterlader B herefter altid et antal tændstikker der er et multiplum af 6 til A, og det betyder at A ikke kan vinde. Dermed vinder B.

Hvis der inden $r = 0$ opstår en situation hvor der er $7 \cdot r$ tændstikker på bordet når A skal trække, så følger B herefter følgende strategi: Hvis A trækker x, $x \in \{1,2,3,4,5,6\}$, tændstikker, så trækker B $7 - x$. Efter r runder vinder B. Bemærk at denne strategi ikke kræver flere end højst r exceptionelle træk. Dermed har B en vindende strategi.

Opgave 7.3.4. Ingen af de to spillere har en vindende strategi. Inddel brættet i vandrette 2×1-brikker så brikkerne i hver række ligger forskudt i forhold til hinanden.



Spiller B kan forhindre spiller A i at vinde ved hele tiden at markere det andet felt i den brik som spiller A netop har markeret i. Da alle 2×2 kvadrater indeholder en hel brik, kan A aldrig få udfyldt et helt kvadrat.

På helt tilsvarende måde kan spiller A forhindre spiller B i at vinde: Hvis spiller B har sat en bolle i samme brik som A har markeret i, markerer A efterfølgende et vilkårligt felt. Hvis spiller B har sat en bolle i en brik A ikke har markeret i, så sætter A kryds i det andet felt i denne brik. På denne måde sikrer A sig at B aldrig får udfyldt begge felter i en brik.

Ingen af de to spillere har derfor en vindende strategi. Dermed kan spillet fortsætte i det uendelige uden at nogen af de to spillere kan vinde.

Opgave 7.4.1. Vi viser indirekte at spiller A har en vindende strategi. Antag at B har en vindende strategi. Først fjerner A én tændstik og efterlader altså 299 tændstikker til B. Spiller B har pr. antagelse en vindende strategi og fjerner nu x tændstikker som led i strategien. Pga. af reglerne må $x \in \{1,2,3,\ldots,149\}$. Når A skal trække i en situation med $299 - x$, ved vi at A ikke kan vinde hvis B spiller optimalt. I stedet for at tage én tændstik til at starte med kan A fjerne $x+1$ tændstikker, da $1 \le 1 + x \le \frac{300}{2}$. Nu efterlader A en situation med $299 - x$ tændstikker til B, og fra analysen af vores første scenarie ved vi at B ikke kan vinde hvis A spiller optimalt. Men dette er i modstrid med vores oprindelige antagelse. Da spillet slutter efter et endeligt antal træk, og spillet ikke kan ende uafgjort, må A have en vindende strategi.

Opgave 7.4.2. Spiller A har en vindende strategi, og dette viser vi indirekte. Antag at spiller B har en vindende strategi. Først fjerner spiller A tallet 1, og derefter fjerner spiller B tallet m og dets divisorer. Da spiller B følger sin vindende strategi, efterlader hun en tabende situation til A, og denne situation betegnes S. Men hvis spiller A starter med at fjerne m og alle dets divisorer, da efterlader A situationen S til B og har dermed en vindende strategi, hvilket er en modstrid. Dermed kan spiller B ikke have en vindende strategi, og da spillet ender med en vinder efter et endeligt antal træk, må A have en vindende strategi.

Opgave 7.4.3. Vi skal med andre ord vise at tabermængden er uendelig, og dette viser vi indirekte ved at antage at tabermængden er endelig. Lad a være det største tal i tabermængden. Betragt nu udgangspositionen med $a^2 + a + 1$ sten. Da $(a+1)^2 > a^2+a+1$, kan første spiller højst fjerne a^2 sten og derfor ikke ende i tabermængden da der er flere end a sten tilbage ligegyldigt hvordan hun trækker. Dette er en modstrid, og tabermængden er altså uendelig.

Opgave 8.1.1. Summen af valenserne for samtlige knuder i grafen må være to gange antallet af kanter, dvs. den er lige. Dermed er der et lige antal knuder med ulige valens.

Opgave 8.1.2. Betragt personerne som knuder i en graf, og lad to knuder være forbundet med en kant hvis personerne er venner. Hver knude har valens mellem 0 og $n-1$. Hvis en knude har valens 0, så vil den maksimale valens være mindre end $n-1$. Dermed findes ikke både en knude med valens 0 og en med valens $n-1$, dvs. blandt de n knuder findes ifølge skuffeprincippet to med samme valens. Altså findes to personer til festen med samme antal venner.

Opgave 8.1.3. Betragt grafen med $2n$ knuder hvor hver knude repræsenterer en person, og hvor to knuder er forbundet med en kant hvis de er venner. Beviset føres indirekte. Antag modsat at hvert par af knuder har et ulige antal fælles naboknuder. Betragt en knude v. Lad A være mængden af naboknuder v, og B være mængden af knuder som ikke er nabo til v, og som ikke er v. Vi ved at $|A| = d(v)$ er lige, og da der er $2n$ knuder, må $|B|$ være ulige. Betragt en knude $w \in B$. Ifølge antagelsen ved vi at antallet af fælles naboknuder for v og w er ulige, dvs. w har et ulige antal naboknuder i A. Da $d(w)$ er lige, må w også have et ulige antal naboknuder i B. Hver knude i B har altså et ulige antal naboknuder i B, men dette er umuligt da B indeholder et ulige antal knuder. Dermed findes to knuder som har et lige antal fælles naboknuder, og dermed to personer som har et lige antal fælles venner.

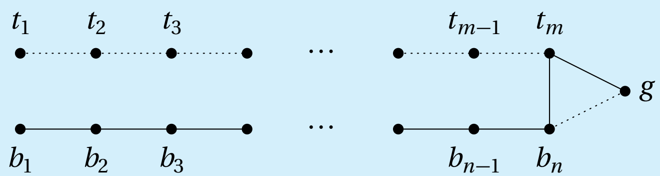
Opgave 8.1.4. Lad eleverne på de tre skoler være knuder i en graf sådan at A er delmængden af knuder der repræsenterer elever på skole A osv., og forbind to elever med kanter hvis de kender hinanden. Vi viser påstanden indirekte. Antag at ingen af de tre påstande er sande.

Lad $a \in A$ være en knude med et maksimalt antal kanter til knuder i B. Ifølge antagelsen er ingen knude fra A forbundet til alle knuder i B, dvs. der findes en knude $b \in B$ som ikke er nabo til a. Ifølge antagelsen er der heller ingen knuder i B der er naboer til alle knuder i C, dvs. der findes en knude $c \in C$ som ikke er nabo til b. På samme måde ses at der findes knude i $a' \in A$ som ikke er nabo til c. Hvis vi betragter de to valg af tre knuder $\{a, b, c\}$ og $\{a', b, c\}$, så ved vi at der er to naboknuder i hver af de to mængder, dvs. at a og c er naboer og a' og b er naboer. Da a ikke er nabo til b og var valgt blandt knuderne i A som havde et maksimalt antal kanter til knuder i B, må der findes et $b' \in B$ som er nabo til a, men ikke til a'. Nu ved vi at a er nabo til b' og c, mens a' hverken er nabo til b' eller c. Det betyder at hvis b' og c er naboer, så findes der ikke to ikke-naboer blandt $\{a, b', c\}$, og hvis de ikke er naboer, så findes der ikke to naboer blandt $\{a', b', c\}$. Dermed er antagelsen forkert, og vi har vist at mindst et af de tre udsagn må være sande.

Opgave 8.1.5. Lad $v_1, v_2, \dots, v_l, v_{l+1}$ være en sti i G af maksimal længde. Antag at $l < \min(2\delta, n-1)$. Da stien har maksimal længde, må både v_1 og v_{l+1} udelukkende være naboer med knuder som allerede er en del af stien. Både v_1 og v_{l+1} er naboer med mindst δ andre knuder. Lad V_1 være mængden af de knuder som v_1 er nabo til, og lad V_2 være mængden af de knuder v_i hvor $v_{i+1} \in V_1$. Da er V_2 en delmængde med mindst δ knuder af mængden $\{v_1, v_2, \dots v_l\}$, og da v_{l+1} er nabo til mindst δ knuder blandt $\{v_1, v_2, \dots v_l\}$, og $l < 2\delta$, må v_{l+1} være nabo til en knude fra V_2. Kald denne knude v_i. Vi ved per konstruktion at $v_{i+1} \in V_1$, dvs. at v_1 er nabo til v_{i+1}. Dermed er $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{l+1}, v_l, v_{l-1}, \dots, v_{i+1}, v_1$ en kreds af længde $l+1$. Da $l < n-1$ findes knuder i grafen som ikke er en del af denne kreds, og mindst én af disse er nabo til en knude fra kredsen da grafen er sammenhængende. Dermed danner denne knude sammen med alle knuderne fra kredsen en sti af længde $l+1$, hvilket er i modstrid med at den maksimale længde af en sti var l. Altså findes en sti af længde mindst $\min(2\delta, n-1)$.

Opgave 8.1.6. Betragt grafen hvor hver by er repræsenteret ved en knude, og hvor kanten mellem to byer er rød hvis der går en busrute mellem dem, og blå hvis der er en togrute mellem dem.

Antag for modstrid at det ikke er muligt at inddele som ønsket, og lad B og T være to disjunkte mængder af knuder sådan at knuderne fra B kan nummereres $b_1, b_2, \dots, b_n$ så der findes en rød kant mellem b_i og b_{i+1} for alle $i = 1, 2, \dots, n-1$, knuderne fra T kan nummereres $t_1, t_2, \dots, t_m$ så der findes en blå kant mellem knuderne t_j og t_{j+1} for alle $j = 1, 2, \dots, m-1$, og så der yderligere gælder at antallet af knuder som ikke ligger i de to mængder, er minimalt.



Lad g være en knude som hverken er i B eller T. Det er oplagt at B og T er ikke-tomme, for hvis en af dem var tom, kunne man placere g i denne mængde. Hvis der er en rød kant mellem g og b_n, så kan g placeres i B med nummeret $n+1$, hvilket er en modstrid. Altså er der en blå kant mellem g og b_n.

Tilsvarende må der være en rød kant mellem g og t_m. Betragt nu kanten mellem b_n og t_m, og antag uden tab af generalitet at den er rød. Nu kan t_m flyttes fra T til B samtidig med at g indlemmes i B sådan at t_m bliver til b_{n+1} og g til b_{n+2} så det ønskede stadig er opfyldt, hvilket er i strid med minimaliteten. Altså er det muligt at inddele landet som ønsket.

Opgave 8.2.1. ii) Da ethvert træ med mindst to knuder indeholder mindst ét blad, kan man hele tiden fjerne et blad med tilhørende kant indtil der kun er en knude tilbage. Ved at tilføje bladene i omvendt rækkefølge konstrueres det oprindelige træ.

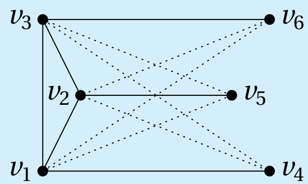
iii) Vælg en knude, og konstruér en delgraf ved hele tiden at vælge en nabo som endnu ikke er valgt, til en af de allerede valgte knuder og tilføje kanten mellem dem. På den måde får vi tilføjet alle knuder da grafen er sammenhængende, og den delgraf vi ender med, kan ikke indeholde en kreds pga. konstruktionen. Den er derfor et træ.

Opgave 8.2.2. Vi viser først at i) og ii) er ækvivalente. i) $\Rightarrow$ ii): Antag at en sammenhængende graf med n knuder er et træ, dvs. at den ikke indeholder en kreds. Da et træ kan konstrueres ved at starte med en knude og derefter tilføje et blad med tilhørende kant et ad gangen ifølge sætning 8.2.1, må grafen indeholde præcis $n-1$ kanter. ii) $\Rightarrow$ i): Antag omvendt at en sammenhængende graf med n knuder indeholder netop $n-1$ kanter. Da indeholder den ifølge sætning 8.2.1 et udspændende træ, og da dette træ har $n-1$ kanter, må det være identisk med grafen. Dermed er grafen et træ.

Nu mangler vi kun at vise at i) og iv) er ækvivalente. i) $\Rightarrow$ iv): Antag at en graf ikke indeholder en kreds. Hvis man fjerner en kant mellem to knuder, kan disse to knuder ikke længere være forbundet med en sti, da grafen ellers ville indeholde en kreds, og dermed er den usammenhængende. iv) $\Rightarrow$ i): Hvis en sammenhængende graf omvendt opfylder at hvis man fjerner en kant, da bliver den usammenhængende, kan den ikke indeholde en kreds, da man kan fjerne en kant fra en kreds uden at grafen bliver usammenhængende.

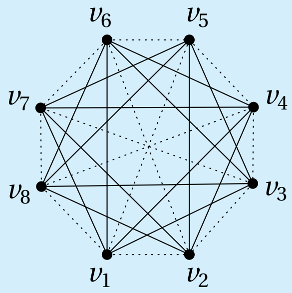
Opgave 8.3.1. Lad kanterne i K_{17} være farvet røde, grønne og blå. Vi ønsker at vise at der findes en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve. Vælg en tilfældig knude v. Da v er forbundet til 16 knuder, findes mindst seks knuder som er forbundet til v med samme farve kant, lad os sige rød. Hvis to af disse knuder er forbundet med en rød kant, har vi en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde. Antag derfor at der ikke er to knuder blandt de seks som er forbundet med en rød kant. Da udgør de seks knuder og de tilhørende kanter en komplet delgraf K_6 hvor kanterne er malet enten grønne eller blå, og da $R(3,3) = 6$, findes en delgraf K_3 af denne graf hvor alle kanter har samme farve.

Opgave 8.3.2. Nej. Da $R(3,3) = 6$ findes tre knuder v_1, v_2, v_3 som er forbundet med kanter af samme farve, lad os sige rød. Hvis blot en af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med røde kanter til to af knuderne v_1, v_2, v_3, har vi en ensfarvet kreds af længde fire. Antag derfor at de højst er forbundet til en af knuderne v_1, v_2, v_3 med én rød kant. Hvis to af knuderne v_4, v_5, v_6 begge er forbundet til de samme to knuder blandt v_1, v_2, v_3 med blå kanter, er der også en ensfarvet kreds af længde fire. Vi antager derfor yderligere at det er der ikke, hvilket betyder at hver af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med en rød kant til netop én af knuderne v_1, v_2, v_3, og at det for to af dem ikke er den samme. Vi kan dermed uden tab af generalitet antage at v_1v_4, v_2v_5 og v_3v_6 er røde.



Men dette betyder at der kommer en rød kreds af længde fire hvis to af knuderne v_4, v_5, v_6 er forbundet med en rød kant. Antag derfor at de alle er forbundet af blå kanter. I dette tilfælde er der en blå kreds v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_2. Der vil dermed altid være en ensfarvet kreds af længde fire.

Opgave 8.3.3. Hvis vi identificerer personerne med knuder og forbinder hvert par af knuder med en rød kant hvis de tilhørende personer er venner, og en blå kant hvis de ikke er venner, så svarer opgaven til at vise at $R(3,4) = 9$. Betragt den komplette graf K_8 med knuderne $v_1, v_2, \dots v_8$.



Farv alle kanter mellem to knuder hvor forskellen mellem deres indices er 1, 4 eller 7, blå, og farv alle andre kanter røde. Da findes hverken en delgraf K_3 hvor alle kanter er blå, eller en delgraf K_4 hvor alle kanter er røde (overvej). Dermed er $R(3,4) > 8$.

Lad alle kanter i K_9 være farvet enten røde eller blå. Vi ønsker at vise at da findes enten en delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, eller en delgraf K_4 hvor alle kanter er blå. Hvis der findes en knude hvorfra der udgår mindst fire røde kanter, da er enten to blandt disse forbundet med en rød kant, eller også er alle disse fire knuder parvis forbundet med blå kanter, hvilket giver en rød delgraf K_3 eller en blå delgraf K_4. Antag derfor at alle knuder højst er forbundet med tre røde kanter. Alle knuder kan ikke være forbundet med netop tre røde kanter da der er et ulige antal knuder. Dermed findes en knude v som er forbundet med mindst seks blå kanter, men da $R(3,3) = 6$, ved vi at der blandt disse knuder findes tre som er forbundet med kanter af samme farve, og dermed udgør de enten en rød K_3 eller sammen med v en blå K_4. Dermed har vi vist at $R(3,4) = 9$.

Opgave 8.3.4. Hvis vi identificerer spillerne med knuder og forbinder hvert par af knuder med en rød kant hvis de tilhørende spillere har spillet mod hinanden, og en blå kant hvis de ikke har, da svarer opgaven til at vise at $R(4,4) = 18$.

Vi viser først at $R(4,4) > 17$. Betragt den komplette graf K_{17} med knuderne $v_1, v_2, \ldots, v_{17}$. En kant mellem to knuder hvor forskellen i deres indices er 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15 eller 16, farves røde. En kant mellem to knuder hvor forskellen i deres indices er 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12 eller 14, farves blå. Denne graf indeholder ingen delgraf K_4 hvor alle kanter har samme farve: Placér de 17 knuder i en cirkel. Hvis fire knuder skal udgøre en rød K_4, skal de fire *afstande* mellem knuderne rundt i cirklen være fire tal blandt 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16. Eneste muligheder er $1,1,2,13$, eller $1,4,4,8$ eller $2,4,4,9$. Ligegyldig hvilken rækkefølge disse afstande placeres i, vil der være to modstående knuder som ikke er forbundet af en rød kant. På tilsvarende måde udelukkes at der findes en blå K_4 ved denne farvning. Altså er $R(4,4) > 17$.

Derefter viser vi at $R(4,4) \le 18$. Betragt den komplette graf K_{18} hvor kanterne er malet røde eller blå. Lad v være en vilkårlig knude. Da v er forbundet med 17 kanter, er mindst ni af disse af samme farve, lad os sige røde. Disse ni knuder og de tilhørende kanter udgør en komplet delgraf K_9, og da $R(3,4) = 9$, ved vi at denne graf enten indeholder en komplet delgraf K_4 hvor alle kanter er blå, eller en komplet delgraf K_3 hvor alle kanter er røde, og denne delgraf udgør sammen med v fire knuder der alle er forbundet parvis med røde kanter. Dermed er $R(4,4) \le 18$, og altså samlet $R(4,4) = 18$.

Opgave 8.3.5. Antag at $R(m_1 - 1, m_2)$ og $R(m_1, m_2 - 1)$ er lige. Vi viser indirekte at i dette tilfælde gælder der skarpt ulighedstegn. Antag at

$$N = R(m_1, m_2) = R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1).$$

Da findes en to-farvning (rød og blå) af kanterne i K_{N-1} så den ikke indeholder en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf. Lad v være en knude i denne graf. Lad $d_r(v)$ betegne antallet af røde nabokanter til v, og $d_b(v)$ betegne antallet af blå nabokanter til v. Da må $d_r(v) < R(m_1 - 1, m_2)$ og $d_b(v) < R(m_1, m_2 - 1)$, for ellers findes der, som vi så i beviset, en rød K_{m_1}-delgraf eller en blå K_{m_2}-delgraf, og da

$$d_r(v) + d_b(v) = R(m_1 - 1, m_2) + R(m_1, m_2 - 1) - 2,$$

må $d_r(v) = R(m_1 - 1, m_2) - 1$ og $d_b(v) = R(m_1, m_2 - 1) - 1$. Dette gælder for alle knuder i grafen, men dette er umuligt da der er et ulige antal knuder i grafen, og $R(m_1 - 1, m_2) - 1$ er ulige. Dermed er uligheden i dette tilfælde skarp.

Opgave 8.3.6. Nej. Stort set på samme måde som i eksempel 8.3.2 antager vi at alle tallene $1, 2, \ldots, 1978$ er farvet med seks forskellige farver, og farver kanter i K_{1979} efter følgende princip: Kanten $v_i v_j$ farves samme farve som tallet $|i - j|$. Hvis der findes tre knuder v_i, v_j og v_k, $i < j < k$, så kanterne mellem dem har samme farve, da findes tre tal $k - j$, $j - i$ og $k - i$ i samme farve så det tredje er summen af de to første. Vi skal derfor blot vise at $R_6(3) = R(3,3,3,3,3,3) \leq 1979$.

Ifølge sætning 8.3.2 er $R(3,3,3) = 17$. Dermed må $R(3,3,3,3) \leq 4 \cdot 16 + 2 = 66$, for hvis kanterne i K_{66} er malet i fire forskellige farver, findes for en vilkårlig knude v mindst 17 kanter i samme farve som udgår fra v til 17 knuder, hvor enten to er forbundet med en kant af denne farve, eller alle er forbundet med kanter i de tre andre farver, og i begge tilfælde findes en ensfarvet delgraf K_3. På samme måde indses at $R(3,3,3,3,3) \leq 5 \cdot 65 + 2 = 327$ og $R(3,3,3,3,3,3) \leq 6 \cdot 326 + 2 = 1958 < 1979$, hvilket viser det ønskede.

Opgave 8.4.1. Betragt en kantmaksimal inddeling i n delmængder. Vi viser påstanden indirekte, dvs. vi antager at der i denne inddeling findes en knude som har a naboer i sin egen delmængde og b naboer i en anden mængde, hvor $a > b$. Ved at flytte knuden til den anden delmængde bliver der $a - b > 0$ flere kanter mellem delmængderne i modstrid med at inddelingen var kantmaksimal. Altså opfylder en kantmaksimal inddeling i n delmængder det ønskede.

Opgave 8.4.2. Betragt en kantmaksimal inddeling af knudemængden i to disjunkte delmængder. Da ved vi fra eksempel 8.4.2 at hver knude ikke er forbundet med flere knuder i sin egen delmængde end i den anden, og da dens valens højst er tre, er den højst forbundet med én knude i sin egen delmængde. Hvis vi farver knuderne i den ene delmængde røde og knuderne i den anden delmængde blå, opfylder farvningen derfor betingelserne.

Opgave 8.4.3. Den maksimale værdi af m er $2n - 1$.

Først viser vi at $m < 2n$: Betragt K_{2n+1}. Her er $\Delta = 2n$, og hvis vi farver knudemængden i n farver, så findes der ifølge skuffeprincippet mindst tre knuder af samme farve. Delgrafen induceret af alle knuder af denne farve vil derfor indeholde mindst tre knuder der alle er forbundet. Dermed er $m < 2n$.

Derefter viser vi at $m \geq 2n - 1$: Lad G være en graf hvor $\Delta(G) = 2n - 1$. Lad $V_1, V_2, \ldots, V_n$ være en kantmaksimal inddeling af knudemængden i n disjunkte delmængder, og farv alle knuder i V_i farve nummer i. Da ved vi ifølge opgave 8.4.1 at hver knude har mindst lige så mange naboer i hver af de andre delmængder som i sin egen, og dermed er den nabo til højst én knude i sin egen delmængde, hvilket giver det ønskede.

Opgave 8.4.4. Vi oversætter problemstillingen til en graf på den oplagte måde. Den kantmaksimale ikke-sammenhængende graf med 2004 knuder må have to sammenhængskomponenter som begge er komplette delgrafer. Det er nemt at se at den kantmaksimale graf netop består af en komplet delgraf med 2003 knuder samt en delgraf med en knude. Dermed er den minimale værdi af N lig med $\binom{2003}{2} + 1$.

Opgave 8.5.1. Det er oplagt at en graf ikke kan være en Euler-graf hvis den indeholder en knude med ulige valens. Antag nu at samtlige knuder i en graf har lige valens. Vi begynder i knuden v_1 og laver en tilfældig tur indtil vi før eller siden ender i v_1. Da alle knuder har lige valens, må vi nødvendigvis ende i knuden v_1. Hvis turen indeholder samtlige kanter, har vi en lukket Euler-tur. Hvis ikke, må der fordi grafen er sammenhængende, findes en ikke passeret kant som støder op til en knude v_2 som er indeholdt i turen. Med udgangspunkt i v_2 laver vi nu en tilfældig tur indtil vi før eller siden ender i v_2. Denne nye tur sættes ind i den gamle så vi har en lukket tur. Da der kun er endelig mange kanter, kan vi fortsætte på den måde til vi har en lukket tur der indeholder samtlige kanter. Sidste del vises på tilsvarende vis.

Opgave 8.5.2. Lad de 2^{n-1} binære strenge af længde $n - 1$ repræsentere 2^{n-1} knuder i en orienteret graf. Lav en kant fra knuden A til knuden B hvis de sidste $n - 2$ cifre i A er lig med de første $n - 2$ i B. På denne måde går der to kanter ud fra hver knude, og der kommer to kanter ind til hver knude. De to knuder med en binær streng som udelukkende består af samme ciffer, er forbundet med en kant til sig selv. Dermed findes der ifølge sætning 8.5.1 en lukket Euler-tur i grafen. Nu starter vi i en vilkårlig knude og følger Euler-turen. For hver knude vi kommer til, skriver vi sidste ciffer i dens binære streng ned. På denne måde konstruerer vi en binær streng med 2^n cifre da der er 2^n kanter i vores Euler-tur. Nu placerer vi cifrene i denne streng fortløbende langs hjørnerne i vores 2^n-kant. På denne måde findes en vilkårlig binær streng af længde n langs vores 2^n-kant pga. konstruktionen (overvej), og de er derfor alle forskellige.

Opgave 8.6.1. Hvis en graf er todelt, må to naboknuder ligge i hver sin del, og dermed må hver anden knude på en kreds ligge i den ene del, hvilket betyder at alle kredse i en todelt graf må have lige længde.

Antag at en graf ikke har kredse af ulige længde. Vælg en knude v, og farv den rød. Farv derefter dens naboer grønne, deres naboer røde, osv. indtil alle knuder i sammenhængskomponenten som indeholder v, er farvede. Antag at der under farvningen er en knude w der både skal farves rød og grøn. Dette betyder at der både er en vej fra v til w af lige længde og en af ulige længde, og disse to må tilsammen indeholde en kreds af ulige længde hvilket er en modstrid. Dermed er farvningsproceduren entydig, og denne farvning giver en todeling af sammenhængskomponenten. På denne måde kan alle sammenhængskomponenter todeles, og dermed er grafen todelt.

Opgave 8.6.2. Lad 20 knuder repræsentere de 20 hold, og forbind to knuder med en rød kant hvis de tilhørende hold har spillet mod hinanden første dag, og en blå kant hvis de har spillet mod hinanden anden dag. Alle knuder har valens to da hver knude er forbundet med netop én blå og én rød kant, og derfor må hver sammenhængskomponent være en kreds af lige længde (skiftevis røde og blå kanter). Fra hver sammenhængskomponent vælges hver anden knude i kredsen så man får en todeling af grafen, og på denne måde får man ti knuder hvor ingen er forbundet med hinanden.

Opgave 8.6.3. Det er oplagt at den r-delte graf med flest kanter skal findes blandt de komplette r-delte grafer. Antag at G er en komplet r-delt graf, samt at der findes to knudedelmængder V_i og V_j så $|V_i| \geq |V_j| + 2$. Ved at flytte en knude fra V_i til V_j fjerner vi $|V_j|$ kanter og får $|V_i| - 1$ nye kanter, og da $|V_i| - 1 > |V_j|$, kan G ikke være kantmaksimal. Da der er et endeligt antal knuder og dermed et endeligt antal af måder at fordele dem i r disjunkte ikke-tomme delmængder, må der findes en graf som er kantmaksimal, og det må netop være $T^r(n)$.

Opgave 8.6.4. Hvis vi oversætter situationen til en graf, skal vi finde det maksimale antal kanter for en graf G med 1000 knuder hvor G ikke indeholder K_3 som delgraf. Fra Turans sætning ved vi at $T^2(1000)$ er kantmaksimal blandt alle grafer med 1000 knuder som ikke indeholder K_3 som delgraf, og $T^2(1000)$ har $500^2 = 250000$ kanter, dvs. der er maksimalt 250000 flyruter.

Opgave 8.6.5. Lad G være en graf med ni knuder $v_1, v_2, \dots, v_9$ sådan at hvis man vælger fem vilkårlige knuder, da indeholder G mindst to kanter mellem nogle af disse fem knuder. Betragt grafen $\overline{G}$ som består af de samme knuder som G, men hvor to knuder er naboer i $\overline{G}$ netop hvis de ikke er det i G. Hvis $\overline{G}$ indeholder K_4 som delgraf med knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, da må $v_5, v_6, \dots, v_9$ hver være naboer i G til mindst to knuder blandt v_1, v_2, v_3, v_4, og dermed indeholder G mindst 10 kanter. Hvis $\overline{G}$ ikke indeholder K_4 som delgraf, kan den ifølge Turans sætning ikke have flere kanter end $T^3(9)$, og dermed kan G ikke have færre kanter end $\overline{T^3(9)}$ som har ni kanter. Da $\overline{T^3(9)}$ opfylder at hvis man vælger fem vilkårlige knuder, da indeholder den mindst to kanter mellem nogle af disse fem knuder, er ni et egentligt minimum.

Opgave 8.7.1. Hvis $k(X) - k(Y) = 0$, er vi færdige. Antag derfor at $k(X) - k(Y) = -1$, og lad $k(X) = l$ og $k(Y) = l + 1$. Hvis der findes en deltager fra W i lokale Y som ikke tilhører hver eneste klike af størrelse $l + 1$ i lokale Y, kan vi flytte denne til lokale X og opnå $k(X) = l + 1 = k(Y)$ som ønsket. Antag derfor at alle $2n - l$ deltagere fra W som er i lokale Y, er medlem af alle kliker i Y af størrelse $l + 1$. Hver $(l+1)$-klike fra lokale Y indeholder dermed præcis $l + 1 - (2n - l) = 2(l - n) + 1 \geq 1$ deltagere som ikke er i W. Dermed kan vi vælge en $(l+1)$-klike fra Y og flytte en deltager fra denne, som ikke er i W, til X. Vi fortsætter på denne måde til der ikke er flere $(l+1)$-kliker i Y. Vi påstår nu at $k(x) = l = k(Y)$. Antag nemlig modsat at der findes en $(l+1)$-klike i X. Medlemmerne i denne klike må pga. konstruktionen være venner med alle $2n - l$ deltagere fra W som er i Y, og dermed findes der blandt alle deltagerne en klike på $2n + 1$ deltagere, hvilket er i modstrid med at den største klike havde $2n$ medlemmer. Dermed er $k(X) = k(Y)$ efter denne konstruktion.

Opgave 8.7.2. Vi viser ved induktion at grafen uden orientering er sammenhængende, ved at vise at der findes en sti mellem knude nummer k og knude nummer 1 for alle $k = 1, 2, \dots, m$. Det er oplagt at der findes en sti mellem knude nummer 2 og knude nummer 1 da kant nummer 2 forbinder de to knuder. Antag at knuderne $2, 3, \dots, k$ er forbundet med en sti til knude nummer 1. Dermed må også knude nummer $k + 1$ være forbundet med en sti til knude nummer 1, da den er forbundet med en kant til en knude med lavere nummer, og dette fuldfører induktionen.

Da grafen uden orientering er sammenhængende, og der for hver knude er lige så mange kanter der udgår fra knuden, som kanter der ender i knuden, ved vi at der findes en lukket Euler-tur, og grafen dermed er en Euler-graf.

Betragt en Euler-tur i grafen. Vi konstruerer nu permutationen $x_1, x_2, \dots, x_n$ ved at lade x_i være nummeret på den i'te kant i denne Euler-tur. Kanten nummereret x_i ender i knuden nummereret j, og kanten nummereret x_{i+1} udgår

fra knuden nummereret j, og dermed ved vi fra konstruktionen af grafen at $x_i \equiv j \pmod{m}$ og $x_{i+1} = 2j$ eller $x_{i+1} = 2j - 1$. Dvs. $2x_i \equiv 2j \pmod{2m = n}$ og dermed $x_{i+1} \equiv 2x_i - 1 \pmod{n}$ eller $x_{i+1} \equiv 2x_i \pmod{n}$ som ønsket.

Opgave 8.8.1. Identificer hver plads med en knude, og antag det er muligt at omrokere eleverne som beskrevet. Hvis en elev flytter fra en plads til en anden, lader vi en kant forbinde de to knuder som repræsenterer pladserne, og desuden farver vi kanten rød hvis flytningen foregår inden for samme række. Dermed opnår vi en graf hvor hver sammenhængskomponent er en kreds, og hver kreds har lige længde da den består af et lige antal røde kanter og et lige antal ufarvede kanter. Dette er i modstrid med at grafen har 49 knuder. Dermed er en sådan omrokering umulig.

Opgave 8.8.2. Betragt festdeltagerne som knuder, og forbind to knuder med hinanden hvis deltagerne er venner. Vælg først en knude v_1. Da findes en knude v_2 som er forbundet med v_1. Der findes yderligere en knude v_3 som er forbundet med både v_1 og v_2. På denne måde kan vi fortsætte indtil vi har $n+1$ knuder som alle er forbundet med hinanden, dvs. grafen indeholder en komplet K_{n+1}-delgraf. Vælg nu de n knuder som ikke indgår i delgrafen K_{n+1}. Da findes en knude fra K_{n+1} som er forbundet med alle disse n knuder, og dermed er denne knude forbundet med samtlige knuder i grafen.

Opgave 8.8.3. Vi konstruerer en orienteret graf ved at identificere spionerne med knuder og lader der være en kant fra v til w hvis v overvåger w. Når man udtager ti tilfældige knuder, skal der for hver knude udgå mindst én kant til en af de ni andre knuder samt ende mindst én kant som udgår fra en af de ni andre knuder. Derfor udgår der mindst syv kanter fra hver knude, og der ender mindst syv kanter i hver knude. Der findes altså for hver knude højst én anden knude som knuden ikke er nabo til.

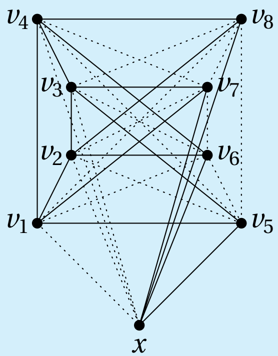
Antag nu at en gruppe på 11 knuder ikke kan nummereres som omtalt. Antag yderligere at der findes mindst én knude blandt de 11 som er nabo til alle de ti andre knuder, og lad v være en sådan. Nummerér de ti resterende $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ så der går en kant fra v_1 til v_2, en kant fra v_2 til v_3, ..., og en kant fra v_{10} til v_1. Vi er sikre på at der findes mindst én af de ti hvorfra der går en kant til v, lad os sige v_1. Hvis der går en kant fra v til v_2, vil $v_1, v, v_2, \dots, v_{10}$ give den ønskede rækkefølge, så det er umuligt, og der går dermed en kant fra v_2 til v. På denne måde ses at der går en kant fra alle ti til v, hvilket er en modstrid. Dermed må enhver af de 11 knuder have præcis én blandt de andre ti som de ikke er nabo til, men dette kan ikke lade sig gøre da 11 er ulige. Vores startantagelse om at en gruppe på 11 tilfældige knuder ikke kan nummereres som ønsket, er altså forkert.

Opgave 8.8.4. Den grundlæggende idé er at udnytte at to på hinanden følgende tal er indbyrdes primiske. Vælg en tilfældig knude v, og vælg en tur fra v med maksimal længde. Kald knuden hvor turen ender, for w (knuden kan være identisk med v). Nummerér turens kanter fortløbende. Alle de passerede knuder opfylder nu betingelsen da to af deres kanter er nummererede med to på hinanden følgende tal. Knuden v har en kant med tallet 1, og knuden w har enten kun én nabokant, eller også har den to nabokanter der er nummererede med to på hinanden følgende tal (eller også er den lig v), så de opfylder begge betingelsen. Vælg nu en ny knude som allerede har en nummereret kant, og følg samme procedure som før. Da grafen er sammenhængende, kan man på denne måde nummerere samtlige kanter så grafen opfylder betingelserne.

Opgave 8.8.5. Opfat personerne i gruppen som knuder i en graf, og lad to knuder være forbundet hvis de er venner. Vi viser nu at når alle personerne har holdt en fest, så er hver eneste sammenhængskomponent blevet en komplet graf. Dette viser nemlig det ønskede.

Lad G' være en sammenhængskomponent inden festerne starter, og lad G'' være den sammenhængskomponent som indeholder G', efter alle festerne. Antag at der er to knuder v og w som ikke er naboer i G''. Da G' er sammenhængende, findes en sti mellem v og w i G'. Lad nu $v, v_1, v_2, \dots, v_s, w$ være en kortest mulig sti fra v til w i G'. Når v_i holder en fest, vil de to naboer i stien blive venner, og der opstår en ny sti som er en kant kortere end den gamle. Når $v_1, v_2, \dots, v_s$ alle har holdt fest (i en eller anden rækkefølge), er stien mellem v og w reduceret fra at være en sti af længde $s+1$ til en sti af længde 1, og v og w er dermed naboer i G'' hvilket er i modstrid med antagelsen. Dette viser det ønskede.

Opgave 8.8.6. Først viser vi at der findes en farvning af 32 af kanterne så der ikke findes en blå eller rød K_3-delgraf. Lad fire af knuderne v_1, v_2, v_3, v_4 danne en kreds hvor kanterne er røde, mens v_1v_3 og v_2v_4 ikke er farvede, og fire andre knuder w_1, w_2, w_3, w_4 danne en kreds hvor kanterne er blå, mens w_1w_3 og w_2, w_4 ikke er farvede. Kanten mellem v_i og w_j farves rød hvis i og j har samme paritet, og ellers blå. Den sidste knude kaldes x. Kanten fra x til v_i, $i = 1,2,3,4$, farves blå, og kanten fra x til w_i, $i = 1,2,3,4$, farves rød. Denne graf har 32 farvede kanter, men ingen delgraf K_3 med kanter i samme farve. (Overvej.)



Vi mangler at vise at for $n = 33$ kan vi altid finde en ensfarvet delgraf K_3. Der er tre kanter som ikke er farvede. Vælg en naboknude til hver af disse kanter. De resterende seks (eller flere) knuder udgør nu sammen med de tilhørende kanter en komplet graf hvor alle kanter er blå eller røde, og da $R(3,3) = 6$, findes en delgraf K_3 hvor alle kanter har samme farve.

Opgave 8.8.7. Det er muligt at ende med n kanter, men ikke med færre. Først viser vi at det er muligt med n, og det gør vi ved at se på en graf med n knuder og n kanter og derfra udføre processen baglæns til vi ender med K_n. Lad G være en graf med knuderne $v_1, v_2, \dots, v_n$ så to knuder med to på hinanden følgende indeks er forbundet med en kant, og v_1 og v_3 yderligere er forbundet med en kant. Denne graf har n kanter. Knuden v_4 er forbundet med en sti af længde tre til knuderne v_1, v_2, v_3 og kan derfor forbindes med disse når man udfører det tilladte træk baglæns. Dermed opnås at knuderne v_1, v_2, v_3, v_4 udgør en komplet graf med fire knuder. Tilsvarende er v_5 nu forbundet med en sti af længde tre til knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, og der kan derfor tilføjes en kant mellem v_5 og disse knuder så de tilsammen udgør en komplet graf med fem knuder. Ved at fortsætte på denne måde ender vi med K_n.

Nu viser vi at det er umuligt at ende med $n-1$ eller færre kanter. Ved den beskrevne proces bliver grafen ved med at være sammenhængende, dvs. man ikke kan ende med færre end $n-1$ kanter. Hvis man ender med en graf med $n-1$ kanter, er den et træ og dermed todelt. Hvis man herfra udfører processen baglæns, bliver den graf man får, ved med at være todelt da fire er lige, og man kan derfor ikke ende med K_n som ikke er todelt. Dermed er det umuligt at ende med en graf med færre end n kanter, dvs. n kanter er det minimale antal.

Opgave 8.8.8. Betragt personerne i gruppen som knuder i en graf, og forbind to knuder med en kant hvis de udveksler postkort. Da alle knuder har valens tre, ved vi at grafen indeholder en kreds. Vælg en kreds af minimal længde.

Antag at den minimale kreds har længde tre, og kald kredsen for v_1, v_2, v_3. Vi undersøger nu om der findes en knude v_4 som er forbundet til to af de tre knuder. Hvis der ikke gør, kan man lade den ene gruppe være v_1, v_2, v_3 og den anden gruppe resten. Hvis der gør, og v_4 er nabo til lad os sige v_1 og v_2, undersøger vi om der findes endnu en knude v_5 som er forbundet til to knuder blandt v_1, v_2, v_3, v_4. Hvis der ikke gør, kan vi inddele i to grupper ved at lade v_1, v_2, v_3, v_4 være den ene gruppe. Hvis der gør, må v_5 nødvendigvis være forbundet til v_3 og v_4, da alle knuder har valens tre, og nu er v_1, v_2, v_3, v_4 naboer til tre indenfor gruppen v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, så denne gruppe kan fungere som den ene gruppe da ingen uden for gruppen kan være naboer til to fra gruppen. (Bemærk at der er knuder ud over de nævnte, da $n > 6$.)

Antag at den minimale kreds har længde fire, og kald kredsen for v_1, v_2, v_3, v_4. Vi undersøger nu om der findes en knude v_5 som er nabo til to knuder fra kredsen. Hvis der ikke gør, kan v_1, v_2, v_3, v_4 udgøre den ene gruppe. Hvis der gør, må v_5 være nabo til to knuder som ikke er naboer, fx v_1 og v_3, da der ellers findes en kreds af længde tre. Hvis der ikke findes en knude som er nabo til to af knuderne v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, kan disse fem knuder danne den ene gruppe. Hvis der findes en sådan knude v_6, må den være forbundet til to af knuderne v_2, v_4, v_5, lad os uden tab af generalitet sige v_2 og v_4. Hvis der ikke findes en knude som er forbundet til to af knuderne $v_1, v_2, \dots, v_6$, danner disse en gruppe. Hvis der gør, må denne knude v_7 være forbundet til v_5 og v_6 da det er de eneste som ikke allerede er forbundet til tre andre knuder. Knuderne $v_1, v_2, \dots, v_7$ danner nu en gruppe, da ingen knude uden for denne gruppe kan være forbundet til to knuder fra gruppen fordi alle på nær v_7 allerede er forbundet til tre knuder. (Bemærk at der er knuder ud over de nævnte, da $n > 6$, og der umuligt kan være syv knuder i alt når hver er forbundet til præcis tre andre.)

Hvis den minimale kreds er længere end fire, da findes ingen knude uden for kredsen som er forbundet til to knuder fra kredsen, da kredsen ellers ikke er minimal. Dermed kan knuderne i denne kreds danne en gruppe så det ønskede er opfyldt. Der må desuden være knuder som ikke er indeholdt i kredsen, da hver knude har tre naboer, og kredsen har minimal længde.

Opgave 9.1.1. For $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + a$ er $P(-2) = -8 + a$, $P(0) = a$, $P(1) = -2 + a$ og $P(2) = a$. Hvis vi vælger $a = 1$, er $P(-2) < 0$, $P(0) > 0$, $P(1) < 0$ og $P(2) > 0$. Der er altså en reel rod i hvert af intervallerne $]-2;0[$, $]0;1[$ og $]1;3[$ ifølge mellemværdisætningen. Da P er et tredjegradspolynomium, har P højst tre forskellige rødder, dvs. P har netop tre forskellige rødder.

Opgave 9.1.2. Polynomiet $P(x) = x(x-2)(x-4)(x-6)+(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ har fire reelle rødder da $P(0) > 0$, $P(1) < 0$, $P(3) > 0$, $P(5) < 0$ og $P(7) > 0$, dvs. der er en reel rod i hvert af intervallerne $]0;1[$, $]1;3[$, $]3;5[$ og $]5;7[$ ifølge mellemværdisætningen.

Opgave 9.1.3. Polynomiet

$$P(x) = x(x-2)(x-4)\cdots(x-2n)+(x-1)(x-3)(x-5)\cdots(x-(2n+1))$$

har $n+1$ reelle rødder da $P(0)$, $P(1)$, $P(3)$, ..., $P(2n-1)$ og $P(2n+1)$ har alternerende fortegn, dvs. der er en reel rod i hvert af intervallerne $]0;1[$ og $]m-1;m+1[$ for $m = 2,4,\dots,2n$ ifølge mellemværdisætningen. Polynomiet P kan ikke have flere reelle rødder da et polynomium af grad $n+1$ maksimalt har $n+1$ rødder, altså har P præcis $n+1$ rødder.

Opgave 9.1.4. Lad $h(x) = f(f(x)) - x$. Vi skal vise at der findes et tal a så $h(a) = 0$ og $f(a) \neq a$. Der gælder:

$$h(1) = f(f(1)) - 1 = f(-1) - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$$

og

$$h(2) = f(f(2)) - 2 = f(0) - 2 = 0 - 2 = -2 < 0.$$

Da $h(1)$ og $h(2)$ har forskelligt fortegn, og h er kontinuert, følger det af mellemværdisætningen at der findes et tal a mellem 1 og 2 så $h(a) = 0$. Da grafen for f er en parabel der vender grenene opad, og $f(1) = -1 < 0$ og $f(2) = 0$, ved vi at $f(x) < 0$ for alle x mellem 1 og 2; specielt $f(a) < 0 < a$. Dermed er det ønskede vist.

Opgave 9.1.5. Bemærk at

$$P(x) = x^3\left(1 + 2\cdot\frac{1}{x} - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{x}\right)^3\right),$$

dvs. $Q(x) = 1 + 2x - 3x^2 - 5x^3$ har rødderne $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ og $\frac{1}{c}$.

Opgave 9.1.6. Da $x = 0$ ikke er løsning til ligningen, kan vi dividere begge sider med x^2 og omskrive til en andengradsligning i $x + \frac{1}{x}$.

$$x^2 + 5x - 4 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0.$$

Rødderne i polynomiet $Q(y) = y^2 + 5y - 6$ er $y = -6$ og $y = 1$. Dermed er $x + \frac{1}{x} = -6 \vee x + \frac{1}{x} = 1$. Disse to ligninger omskrives til $x^2 + 6x + 1 = 0 \vee x^2 - x + 1 = 0$. Af første ligning fås $x = -3 \pm 2\sqrt{2}$, mens den sidste ikke har nogen løsninger.

Opgave 9.2.1.

a) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3x - 2 = (x-1)(x^3 + x^2 - x + 2)$.

b) $P(x) = 3x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 9x + 4 = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 5x + 4)$.

c) $P(x) = x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

d) $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1)$.

Opgave 9.2.2. Vi ved at $x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$. Ved at indsætte henholdsvis $x = 1$ og $x = -1$ får man $a + b = 0$ og $-a + b = 4$, dvs. resten er $-2x + 2$.

Opgave 9.2.3. Antag at der findes et førstegradspolynomium Q med reelle koefficienter så $P(x) = Q(x)\cdot D(x)$ for et polynomium D med reelle koefficienter. Førstegradspolynomiet Q har en reel rod, og den er også rod i P. Men det er en modstrid, for $P(x) = x^2 + 2 > 0$ for alle reelle tal x. Dermed er P ikke deleligt med et førstegradspolynomium med reelle koefficienter.

Opgave 9.2.4. Sæt $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$. Antag at $(x-1)^2$ går op P. Da findes et polynomium Q med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x-1)^2 Q(x).$$

Altså er $x = 1$ rod i P. Det betyder at $0 = P(1) = a + b + 1$ og altså $b = -a - 1$. Ved division ses at $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1 = (x-1)(ax^3 - x^2 - x - 1)$. Dermed er $(x-1)Q(x) = ax^3 - x^2 - x - 1$. Altså er $x = 1$ også rod i $ax^3 - x^2 - x - 1$, dvs. at $a - 3 = 0$. Dette giver samlet $a = 3$ og $b = -4$.

Opgave 9.2.5. Vi udnytter at

$$(x_0 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 + x_0^5)(x_0 - 1) = x_0^6 - x_0 = P(x_0) + 9x_0 - 9 = 9(x_0 - 1).$$

Da $x_0 \neq 1$, må $x_0 + x_0^2 + x_0^3 + x_0^4 + x_0^5 = 9$.

Opgave 9.2.6. Bemærk først at

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+1)^6 - 12(x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2\left((x+1)^4 - 12\right) \\ &= (x+1)^2\left(x(x^3 + 4x^2 + 6x + 4) - 11\right). \end{aligned}$$

Da $x_0 \neq -1$ er rod i P, er $x_0(x_0^3+4x_0^2+6x_0+4)-11 = 0$, dvs. $x_0(x_0^3+4x_0^2+6x_0+4) = 11$.

Opgave 9.3.1. Bemærk først at $x_0 = -a$ er rod i $P(x) = x^{2n+1} + a^{2n+1}$. Dermed går $x + a$ op i P. Ved division ses at

$$P(x) = (x+a)(x^{2n} - ax^{2n-1} + a^2x^{2n-2} - \cdots - a^{2n-1}x + a^{2n}).$$

Opgave 9.3.2. Kald rødderne i P for $2a$ og $3a$. Da er

$$P(x) = m(x - 2a)(x - 3a) = mx^2 - 5max + 6ma^2.$$

Altså er $5ma = 10$ og $6ma^2 = 3$. Ved at løse ligningssystemet fås $a = \frac{1}{4}$ og $m = 8$.

Opgave 9.3.3. Da r_1, r_2 og r_3 er rødder i P, er

$$P(x) = x^3 + 5x - 20x + 14 = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3.$$

Dermed er $r_1 + r_2 + r_3 = -5$, og $P(-5) = -5^3 + 5^3 + 20 \cdot 5 + 14 = 114$.

Opgave 9.3.4. Kald de heltallige rødder for x_1, x_2 og x_3. Da er $x_1x_2x_3 = 2^n$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$ og $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Af sidste ligning ses at en eller tre af rødderne skal være ulige, og da $x_1x_2x_3 = 2^n$, kan vi uden tab af generalitet antage at $x_1 = \pm 1$. Hvis $x_1 = 1$, skal $x_2 + x_3 = 0$ og $x_2x_3 = 2^n$ hvilket er umuligt. Altså er $x_1 = -1$ og $x_2x_3 = -2^n$, $x_2 + x_3 = 2$ og $-2 + x_2x_3 = a$. Heraf ses at x_2 og x_3 er henholdsvis 4 og -2, dvs. $a = -10$ og $n = 3$.

Opgave 9.3.5. Oplysningerne giver at $a = -(x_1 + x_2)$, $bc = x_1x_2$, $b = -(x_2 + x_3)$ og $ac = x_2x_3$, og vi skal vise at $c = -(x_1 + x_3)$ og $ab = x_1x_3$. Af ligningerne ses at $a - b = x_3 - x_1$ og $c(a - b) = x_2(x_3 - x_1)$. Da $ac \neq bc$, får vi at $c = x_2$, $a = x_3$ og $b = x_1$. Ved at kombinere dette ses at $c = -(x_1 + x_3)$. Det betyder at x_1 og x_3 er rødder i R.

Opgave 9.3.6. Polynomiet $Q(x) = x^4 + x^3 - 1$ går op i $P(x) = x^n + x^{n-1} - 1$ netop hvis $Q(x)$ går op i $P(x) - Q(x) = x^n + x^{n-1} - x^4 - x^3 = x^3(x-1)(x^{n-4} - 1)$. Polynomiet Q har en reel rod mellem 0 og 1 da $Q(0) = -1$ og $Q(1) = 1$, men denne rod er ikke rod i $P(x) - Q(x)$. Dermed går Q ikke op i P for noget n.

Opgave 9.3.7. Vi ved at $e = P(0) = P(1) = P(2) = P(3)$. Dermed har

$$Q(x) = P(x) - e = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

rødderne 0, 1, 2 og 3, dvs.

$$Q(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x.$$

Her af ses at $b = -6$.

Opgave 9.3.8. Da $P(k) - \frac{k}{k+1} = 0$ for $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, vil $n+1$'te grads polynomiet $Q(x) = P(x)(x+1) - x$ have rødderne $0, 1, 2, \ldots, n$. Dermed er

$$Q(x) = a(x-0)(x-1)(x-2)\ldots(x-n).$$

Da $Q(-1) = 1$, må $a = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$, og dermed

$$P(n+1) = \frac{Q(n+1) + n + 1}{n+2} = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n+2} = \begin{cases} 1 & \text{for ulige } n \\ \frac{n}{n+2} & \text{for lige } n \end{cases}.$$

Opgave 9.3.9. Ved at indsætte $x = 0$ i $(x - 2010)P(x + 67) = xP(x)$, ses at $-2010P(67) = 0$, dvs. $P(67) = 0$. For alle hele tal n, hvor $1 \leq n < 30$ og $P(67n) = 0$, følger det ved at indsætte $x = 67n$ at

$$(67n - 2010)P(67(n+1)) = 0.$$

Fordi $67n < 2010$ for $n < 30$, betyder det at $P(67(n+1)) = 0$. Dermed er $P(67n) = 0$ for alle $n = 1, 2, 3, \ldots, 30$. Vi har altså

$$P(x) = (x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)Q(x)$$

for et polynomium Q.

Ved at indsætte dette i den oprindelige ligning fås

$$\begin{aligned}(x-2010)x(x-67)\cdots(x-29\cdot 67)Q(x+67)\\ = x(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)Q(x),\end{aligned}$$

hvilket viser at $Q(x) = Q(x+67)$ for alle $x \neq 0, 67, 2\cdot 67, \ldots, 30\cdot 67$. Det betyder at Q er konstant. Altså er$P(x) = k(x-67)(x-2\cdot 67)\cdots(x-30\cdot 67)$ for $k \in \mathbb{R}$, og alle disse polynomier opfylder betingelsen.

Opgave 9.3.10. Lad r_1, r_2, r_3 være de tre forskellige reelle rødder i p. Bemærk desuden at

$$q(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2016 + \frac{3}{4} \geq 2016 + \frac{3}{4}.$$

Vi ved yderligere at

$$p(q(x)) = (q(x) - r_1)(q(x) - r_2)(q(x) - r_3) > 0$$

da $p(q(x))$ ikke har nogen reelle rødder og positiv højestegradskoefficient. Da q antager alle værdier større end eller lig med $2016 + \frac{3}{4}$, må $r_1, r_2, r_3 < 2016 + \frac{3}{4}$. Dermed er

$$p(2017) = (2017 - r_1)(2017 - r_2)(2017 - r_3) \geq \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}.$$

Opgave 9.4.1. Sæt først $x = 0$ ind i ligningen

$$(x-26)P(x+13) = xP(x).$$

Da er $26P(13) = 0$, dvs. $x = 13$ er rod i P. Ved at indsætte $x = 13$ i ligningen fås $-13P(26) = 13P(13) = 0$. Dermed er $x = 26$ også en rod i P. Ifølge sætningen om rødder og faktorisering 9.4.1 findes et polynomium Q med heltallige koefficienter så

$$P(x) = (x-13)(x-26)Q(x).$$

Den oprindelige ligning kan dermed omskrives til

$$(x-26)x(x-13)Q(x+13) = x(x-13)(x-26)Q(x)$$

for alle $x \in \mathbb{Q}$. Dermed er $Q(x+13) = Q(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 13, 26\}$, hvilket viser at Q er konstant. Altså er de eneste polynomier P der opfylder det ønskede,

$$P(x) = k(x-13)(x-26),$$

hvor $k \in \mathbb{Z}$.

Opgave 9.4.2. Vælg 33 forskellige heltallige rødder i $p(x)q(x) - 2015$, og kald dem $a_1, a_2, \ldots, a_{33}$. Vi ved at

$$p(a_i)q(a_i) = 2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$$

for alle $i = 1, 2, \ldots, 33$. Altså er både $p(a_i)$ og $q(a_i)$ heltallige divisorer i 2015 for alle $i = 1, 2, \ldots, 33$. Da der er $2 \cdot 2^3 = 16$ forskellige heltallige divisorer i 2015, må der ifølge skuffeprincippet findes mindst tre forskellige rødder a_j, a_k, a_l så $p(a_j) = p(a_k) = p(a_l)$ og $q(a_j) = q(a_k) = q(a_l)$ hvilket viser at p og q har grad mindst 3 da de ikke er konstante.

Opgave 9.4.3. Da a og $a + 1997$ er heltallige rødder i P, er

$$P(x) = (x-a)(x-a-1997)R(x),$$

hvor R er et polynomium med heltallige koefficienter. For et vilkårligt helt tal b har de hele tal $b - a$ og $b - a - 1997$ forskellig paritet, og derfor må

$$P(b) = (b-a)(b-a-1997)R(b)$$

være lige. Fordi $Q(1998) = 2000$, må konstantleddet i Q være lige. Dermed er $Q(P(b))$ lige for alle hele tal b.

Opgave 9.4.4. Lad $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ være rødderne i $p(x) - m$. Da er

$$p(x) - m = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{1000})q(x)$$

for et polynomium q med heltallige koefficienter. Lad n være rod i $p(x) - 1$. Da er

$$m = 1 - (n - x_1)(n - x_2)\cdots(n - x_{1000})q(n).$$

Da $m > 1$, betyder det at $(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_{1000})q(n) < 0$. Udtrykket $(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_{1000})$ består af 1000 forskellige heltallige faktorer som ikke er 0, og derfor er

$$|(n-x_1)(n-x_2)\cdots(n-x_n)| \geq (500!)^2$$

Det betyder at $m \geq (500!)^2+1$. Det er faktisk muligt at realisere dette minimum. Sæt $m = (500!)^2+1$ og

$$p(x) = m - \Big((x-500)(x-499)\cdots(x-1)\Big)\Big((x+1)(x+2)\cdots(x+500)\Big).$$

Da opfylder p det ønskede.

Opgave 9.4.5. Da $a \neq b$, vil $b-a \mid P(b)-P(a) = 3-1 = 2$. Antag at $P(c) = 2$. Da vil $c-a \mid P(c)-P(a) = 1$ og $b-c \mid P(b)-P(c) = 1$. Vi ved altså at $c = a \pm 1$, $c = b \pm 1$ samt at $a = b \pm 2$ eller $a = b \pm 1$. Der findes højst ét tal c der opfylder dette.

Opgave 9.4.6. Vi ved at $2n = n-(-n) \mid P(n)-P(-n)$, dvs. at $P(n)-P(-n) \geq 2n$. Dermed er $P(n)-2n \geq P(-n)$, og vi ved yderligere at $P(n) < n$. Samlet giver dette $P(-n) \leq P(n)-2n < n-2n = -n$.

Opgave 9.4.7. Antag at der findes tre forskellige hele tal a, b og c så $P(a) = b$, $P(b) = c$ og $P(c) = a$. Lad fx uden tab af generalitet $a-c$ være den numerisk største differens mellem de tre tal, dvs. at $|a-c| > |b-a|$. Vi har nu at $a-c$ går op i $P(a)-P(c) = b-a$, hvilket er en modstrid.

Opgave 9.4.8. Bemærk først at $(P(x))^2 = 1 \Longleftrightarrow (P(x)-1)(P(x)+1) = 0$. Antag at $P(a) = 1$ og $P(b) = -1$ for to hele tal a og b. Da vil $a-b \mid P(a)-P(b) = 2$, dvs. at $b = a \pm 1 \vee b = a \pm 2$.
Antag nu at m er den mindste heltallige løsning til $(P(x)-1)(P(x)+1) = 0$, og antag fx at $P(m)-1 = 0$. Da findes højst to heltallige løsninger til $P(x)+1 = 0$, nemlig $m+1$ og $m+2$. Polynomiet $P(x)-1$ er af n'te grad og har derfor højst n rødder. Dermed har $(P(x)-1)(P(x)+1) = 0$ højst $n+2$ heltallige løsninger, dvs. $k \leq n+2$.
Opgave 9.5.1. Lad $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ være et lige polynomium, dvs. at $P(x) = P(-x)$. Dermed er

$$0 = P(x)-P(-x) = 2(a_{2m+1}x^{2m+1} + a_{2m-1}x^{2m-1} + \ldots a_1 x),$$

hvor m er det største hele tal så $n \geq 2m+1$. Da det eneste polynomium der er nul for alle $x \in \mathbb{R}$, ifølge sætning 9.5.1 er nulpolynomiet, består $P(x)$ kun af led af lige potens af x.

At et ulige polynomium kun indeholder led af ulige potens af x, vises på tilsvarende måde ved at betragte $P(x)+P(-x)$.

Opgave 9.5.2. Lad $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ være et normeret polynomium af ulige grad. Sæt $M = \max\{1, |a_{n-1}|, |a_{n-2}|, \ldots, |a_0|\}$. Som i beviset for sætning 9.5.1 ses at $P(2M) > 0$. Desuden er

$$\begin{aligned}
(-2M)^n &\leq -\big(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1\big)M^n \\
&\leq -\big(M(2M)^{n-1}+M(2M)^{n-2}+\cdots+M(2M)+M\big) \\
&\leq -\big(|a_{n-1}||-2M|^{n-1}+|a_{n-2}||-2M|^{n-2}+\cdots+|a_1||-2M|+|a_0|\big) \\
&\leq -\big|a_{n-1}(-2M)^{n-1}+a_{n-2}(-2M)^{n-2}+\ldots+a_1(-2M)+a_0\big|.
\end{aligned}$$

Dermed er $P(-2M) = -(2M)^n + a_{n-1}(-2M)^{n-1} + a_{n-2}(-2M)^{n-2} + \ldots + a_0 < 0$. Ifølge mellemværdisætningen findes dermed et $c \in \mathbb{R}$ så $P(c) = 0$. Altså har alle reelle normerede polynomier af ulige grad en reel rod.

Betragt nu et polynomium Q af ulige grad n og højestegradskoefficient b_n. Da har Q samme rødder som $\frac{1}{b_n}Q$, og da $\frac{1}{b_n}Q$ har en reel rod fordi det er et normeret polynomium af ulige grad, har Q en reel rod.

Opgave 9.6.1. Antag at $\frac{p}{q}$ er rod i P, og at $\frac{p}{q}$ er uforkortelig. Da er

$$q^n P\left(\frac{p}{q}\right) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_0 q^n = 0,$$

og derfor må q gå op i $a_n p^n$ og dermed i a_n, og desuden må p gå op i $a_0 q^n$ og dermed i a_0.

Opgave 9.6.2. Polynomiet $P(x) = x^6+3x^4+6x^3+9x+3$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium, hvor man benytter $p = 3$.

Opgave 9.6.3. Polynomiet $P(x) = x^p + p^2x^2 + px + p - 1$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ for alle ulige primtal p, netop hvis

$$P(x+1) = \left(x^p + \binom{p}{p-1}x^{p-1} + \ldots + \binom{p}{1}x + 1\right) + p^2\left(x^2+2x+1\right) + (px+p) + p - 1$$

er irreducibelt. Da $\binom{p}{i}$ er delelig med p for alle $i = 1, 2, \dots, p-1$, når p er et primtal, er alle koefficienterne på nær højestegradskoefficienten til $P(x+1)$ delelige med p. Desuden er konstantleddet p^2+2p ikke delelig med p^2, når p er et ulige primtal. Dermed er $P(x+1)$, og altså også $P(x)$, irreducibelt i $\mathbb{Q}[x]$ ifølge Eisensteins irreducibilitetskriterium.

Opgave 9.6.4. Antag at $P(x) = Q(x)R(x)$, hvor Q og R er polynomier med heltallige koefficienter. Da er $Q(x_i) = -R(x_i) = \pm 1$ for alle $i = 1, 2, \dots, n$. Dermed er $Q(x)+R(x)$ et polynomium med n forskellige rødder $x_1, x_2, \dots, x_n$, dvs. enten har $Q(x)+R(x)$ grad mindst n, eller også er det nulpolynomiet. Antag at $Q(x)+R(x)$ er nulpolynomiet. Da er $P(x) = -Q(x)^2$ i modstrid med at koefficienten til højestegradsleddet i P er 1. Dermed har $Q(x)+R(x)$ grad mindst n, dvs. et af dem har grad mindst n. Da $P(x) = Q(x)R(x)$ er et polynomium af grad n, følger at enten Q eller R har grad n. Altså er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$ og ifølge Gauss' lemma også i $\mathbb{Q}[x]$.

Opgave 9.6.5. Ifølge Eisensteins udvidede irreducibilitetskriterium med $p = 3$ og $k = n-2$ har P en irreducibel faktor i $\mathbb{Z}[x]$ af grad mindst $n-1$. Dvs. hvis P er reducibelt, må det have en rod. En rod i P er et helt tal som går op i 3, og det ses derfor nemt at P ikke har nogen heltallig rod. Dermed er P irreducibelt i $\mathbb{Z}[x]$.

Opgave 9.7.1. Når $x = -1$ er dobbeltrod i $P(x) = ax^n + nx^{n-2} + b$, n ulige, er $0 = P(-1) = -a - n + b$ og $0 = P'(-1) = an + n(n-2)$, dvs. $a = 2 - n$ og $b = 2$.

Opgave 9.7.2. Polynomiet $Q(x) = P(x) - P(-x)$ har grad højst 5 samt fem forskellige rødder $-b$, $-a$, 0, a og b. Desuden er $Q'(0) = 0$, hvilket viser at 0 er dobbeltrod. Dermed må $Q(x)$ være nulpolynomiet, dvs. at $P(x) = P(-x)$ for alle x.

Opgave 9.7.3. For $P'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ vil diskriminanten være positiv da $b < 0$, dvs. $P'(x)$ har to forskellige reelle rødder x_1 og x_2. Da $P(x)$ er et tredjegradspolynomium, vil det have tre forskellige reelle rødder netop hvis $P(x_1)$ og $P(x_2)$ har forskellige fortegn, dvs. netop hvis $P(x_1)P(x_2) < 0$. Ved at udnytte at $ab = 9c$, får man ved division af $P(x)$ med $P'(x)$ at resten er $x\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)$. Da

$$P(x) = P'(x)\frac{1}{3}x + x\left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)$$

og $x_1 x_2 = \frac{b}{3} < 0$, er

$$P(x_1)P(x_2) = x_1 x_2 \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}a^2\right)^2 < 0.$$

Opgave 9.7.4. Lad $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Ifølge i) er $b = d = 0$, og ifølge iii) er $e = 1$. Yderligere giver ii) at $a > 0$, dvs. $P(x) = ax^4 + cx^2 + 1$, hvor $a > 0$.

Da $P(x)$ har to lokale minima, må $P'(x) = 4ax^3 + 2cx = 2x(2ax^2 + c)$ have tre forskellige reelle rødder, og da $a > 0$, giver dette at $c < 0$. Rødderne i $P'(x)$ er $x = 0$ og $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$, dvs. P har lokalt minimum i $x = \pm\sqrt{-c/(2a)}$. Ifølge iv) betyder det at $2\sqrt{-c/(2a)} = 2$ og dermed $c = -2a$. Endelig giver ii) at $P(x) = ax^4 - 2ax^2 + 1 = a(x^2-1)^2 + 1 - a > 0$, dvs. at $0 < a \le 1$. Det er nemt at tjekke at alle sådanne polynomier opfylder de fire betingelser.

Stikordsregister