Indhold

Funktionalligninger
- løsningsstrategier og opgaver

En funktionalligning er en ligning hvor den ubekendte er en funktion. Man løser en funktionalligning ved at bestemme samtlige funktioner der løser ligningen.

I det følgende betegner $\mathbb{N}$ de positive hele tal, $\mathbb{N}_0$ de ikke-negative hele tal, $\mathbb{Z}$ de hele tal og $\mathbb{R}$ de reelle tal.

1 Introduktion til løsning af funktionalligninger

For at give et billede af hvordan man kan bestemme løsningerne til en funktionalligning, ser vi på et eksempel.

Eksempel
Vi ønsker at bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+yf(x))=f(xf(y))-x+f(y+f(x))$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}$.

For at få information om de funktioner der er løsning til ligningen, prøver vi at indsætte forskellige værdier af x og y.

Først indsætter vi $x=y=0$:

$$\begin{aligned} f(0)&=f(0)+f(f(0))\\ 0&=f(f(0)). \end{aligned}$$

Vi kan altså konkludere at $f(f(0))=0$.

Så indsætter vi $x=y=1$:

$$\begin{aligned} f(1+f(1))&=f(f(1))-1+f(1+f(1))\\ 1&=f(f(1)). \end{aligned}$$

Altså er $f(f(1))=1$. På den måde fortsætter vi med at samle oplysninger om f og kombinerer dem også med tidligere oplysninger.

Hvis vi indsætter $x=1$ og $y=0$, får vi

$$\begin{aligned} f(1)&=f(f(0))-1+f(f(1))\\ f(1)&=0-1+1=0. \end{aligned}$$

Altså er $f(1)=0$. Da $f(f(1))=1$ og $f(1)=0$, kan vi yderligere konkludere at $f(0)=1$. Nu har vi fundet to funktionsværdier.

Da vi ikke kun vil finde én funktionsværdi ad gangen, indsætter vi nu kun en værdi for en af de to variable, for på den måde at nå frem til noget mere generelt.

Sæt $x=1$:

$$\begin{aligned} f(1+yf(1))&=f(f(y))-1+f(y-f(1))\\ 0&=f(f(y))-1+f(y)\\ 1-f(y)&=f(f(y)). \end{aligned}$$

Altså er $f(f(x))=1-f(x)$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

Nu sætter vi $y=0$:

$$\begin{aligned} f(x)&=f(xf(0))-x+f(f(x))\\ f(x)&=f(x)-x+f(f(x)\\ x&=f(f(x)). \end{aligned}$$

Nu ved vi altså yderligere at $f(f(x))=x$ for alle $x\in\mathbb{R}$. Sammenholdt med at $f(f(x))=1-f(x)$ fås at $f(x)=1-x$ for alle $x\in\mathbb{R}$.

Det vi nu har vist, er at hvis der er en løsning, så er den $f(x)=1-x$. Der er altså højst en løsning til funktionalligningen. For at tjekke om $f(x)=1-x$ faktisk løser ligningen, indsætter vi først funktionsudtrykket på venstresiden:

$$f(x+yf(x))=f(x+y(1-x))=1-x-y+xy.$$

Derefter på højesiden:

$$\begin{aligned} f(xf(y))-x+f(y+f(x))&=f(x(1-y))-x+f(y+1-x)\\ &=(1-x+xy)-x+(1-y-1+x)\\ &=1-x-y+xy. \end{aligned}$$

Dette viser at $f(x)=1-x$ løser ligningen, og vi ved at det er eneste løsning.

Nogle funktionalligninger har flere løsninger, fx uendeligt mange, mens andre ikke har løsninger.

Opgave 1.1. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+y)=yf(x)+f(x)$$

for alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Opgave 1.2. Vis at der ikke findes nogen funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(f(x))=xf(x)+2x$$

for alle $x\in\mathbb{R}$, hvor der findes et reelt tal a med $f(a)=-2$.

2 Funktioner defineret på de hele tal

Nu ser vi på funktionalligninger med funktioner der er defineret på de hele tal $\mathbb{Z}$ eller på en delmængde af $\mathbb{Z}$. Når funktionerne er defineret på de hele tal, har man ofte mulighed for at bruge induktion hvilket vi skal se nærmere på.

Eksempel
Hvis vi skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ som opfylder at

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

for alle $x,y\in\mathbb{Z}$, er det en god idé først at prøve sig lidt frem ved at indsætte forskellige værdier for x og y som vi gjorde før.

Først indsætter vi $x=y=0$ i funktionalligningen og får

$$f(0)+f(0)=2f(0)+2f(0).$$

Altså er $f(0)=0$.

Herefter prøver vi at indsætte $x=y=1$ og får

$$f(2)+f(0)=2f(1)+2f(1),$$

dvs. $f(2)=4f(1)$. Hvis man fortsat prøver sig lidt frem med at indsætte små værdier af x og y, ser man hurtigt at $f(3)=9f(1)$, $f(4)=16f(1)$ og $f(5)=25f(1)$.

Det ligner et mønster hvor $f(n)=n^2f(1)$ for alle positive heltal n. Vi prøver ved induktion at teste om denne formodning er rigtig.

Sæt $f(1)=a$. Påstanden om at $\mathrm{f}(n)=n^2a$ for alle positive heltal n er sand for $n=1$ og $n=2$. Antag at påstanden er sand for alle $n\leq N$. Ved at indsætte $x=N$ og $y=1$ fås

$$f(N+1)=2f(N)+2f(1)-f(N-1)=(2N^2+2-(N-1)^2)a=(N+1)^2a,$$

hvilket fuldfører induktionsskridtet.

Vi har nu vist at $f(n) = n^2 a$ for alle $n \in \mathbb{N}$, dvs. vi har fundet funktionsværdierne for alle de positive tal udtrykt ved $f(1)$. Nu mangler vi kun at finde funktionsværdierne af alle de negative tal.

Ofte kan man finde funktionsværdierne for alle de negative tal, når man kender de postive. Når man ser på funktionalligningen, er det ikke svært at se at man ved at sætte $x = 0$ får $f(y) = f(-y)$. Altså må $f(n) = n^2 a$ for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Det vi har vist indtil nu, er kun at hvis der er løsninger til funktionalligningen, da er de på formen $f(n) = n^2 a$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Nu tester vi om disse funktioner rent faktisk er løsninger ved at indsætte:

$$f(x+y) + f(x-y) = (x+y)^2 a + (x-y)^2 a = 2x^2 a + 2y^2 a \quad \text{og}$$
$$2f(x) + 2f(y) = 2x^2 a + 2y^2 a.$$

Altså er alle funktioner $f(n) = n^2 a$ løsninger til ligningen. Vi skal blot kræve at a er et helt tal da funktionsværdierne skal være hele tal.

Denne funktionalligning havde altså uendeligt mange løsninger.

Eksempel
I dette eksempel skal vi se på en funktionalligning hvor der viser sig ikke at være nogen løsninger. Vi ønsker at bestemme samtlige funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som opfylder

$$f(f(n)) = n + 1,$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

For at udnytte at funktionalligningen indeholder $f(f(n))$, er det ofte en god idé at sætte $n = f(n)$. Det giver nemlig:

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1.$$

Det ser umiddelbart mere grimt ud, men det smarte er at $f(f(f(n)))$ også fremkommer hvis vi tager f på begge sider i den oprindelige ligning:

$$f(f(f(n))) = f(n+1).$$

Samlet giver det at $f(n+1) = f(n) + 1$ for alle $n > 1$. Funktionsværdierne vokser altså med 1 når n vokser med 1, dvs. at $f(n) = n - 1 + f(1)$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi tjekker nu for hvilke værdier af $f(1)$ at dette er en løsning ved at indsætte i den oprindelige ligning:

$$n + 1 = f(f(n)) = f(n - 1 + f(1)) = n - 1 + f(1) - 1 + f(1),$$

og altså $3 = 2f(1)$. Dette er umuligt da $f(1) \in \mathbb{N}$. Der er derfor ingen løsninger til ligningen.

Opgave 2.1. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som opfylder
a) $f(1) = 2$
b) $f(f(x)) = f(x) + 1$ for alle $x \in \mathbb{N}$.

Opgave 2.2. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som opfylder
a) $f(1) = 2$ og $f(3) = 5$.
b) $f(f(x)) = f(x) + 2$ for alle $x \in \mathbb{N}$.

Opgave 2.3. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som opfylder
a) $f(2011) = 1$
b) $f(x)f(y) = f(y - x)$ for alle $x, y \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2.4. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ som opfylder

$$f(x+y) + f(x-y) = 2x^2 + 2y^2 + 2,$$

for alle $x, y \in \mathbb{N}$ hvor $x > y$.

Opgave 2.5. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som opfylder at $f(0) = 1$ og

$$f(f(n)) = f(f(n+2) + 2) = n,$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$.

Opgave 2.6. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ som opfylder
a) $f(1) = 0$
b) $f(2x) = 2f(x) + 1$ for alle $x \in \mathbb{N}$.
c) $f(2x+1) = 2f(x)$ for alle $x \in \mathbb{N}$.

3 Funktioner defineret på de reelle tal

I forrige afsnit så vi på funktionalligninger hvor funktionerne var defineret på de hele tal, og det gav mulighed for induktion. Nu udvider vi og ser på funktionalligninger med funktioner defineret på de reelle tal eller en delmængde af de reelle tal. Denne delmængde kan selvfølgelig godt bare indeholde hele tal.

Det er stadig en god idé at starte med at sætte forskellige værdier af de variable ind, ligesom når vi så på funktionalligninger med funktioner defineret på de hele tal, men vi skal også se på flere andre løsningsstrategier

Substitution
Når man skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x)+xf(1-x)=x^2+1 \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R},$$

er det interessant at man ved at erstatte x med $1-x$ får endnu en ligning

$$f(1-x)+(1-x)f(x)=(1-x)^2+1=x^2-2x+2$$

hvor funktionsværdierne $f(x)$ og $f(1-x)$ indgår. Hvis vi ganger denne ligning med x og trækker den fra den oprindelige ligning, får vi

$$f(x)-x(1-x)f(x)=-x^3+3x^2-2x+1$$

og altså at

$$f(x)=\frac{-x^3+3x^2-2x+1}{x^2-x+1} \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R},$$

som eneste mulige løsning. (Bemærk at $x^2-x+1>0$ for alle x). Ved indsættelse ses at denne funktion opfylder betingelserne.

Opgave 3.1. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$4f(3-x)+3f(x)=x^2 \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R}.$$

Opgave 3.2. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\backslash\{0,1\}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x)+f\Big(\frac{1}{1-x}\Big)=x \quad \text{for alle } x\in\mathbb{R}.$$

Symmetri
I nogle funktionalligninger er det interessant at se om der er en form for symmetri. Hvis man fx skal bestemme samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x+y)-f(y)=x^2+2xy \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R},$$

er det vigtigt at lægge mærke til at $f(x+y)$ er symmetrisk i x og y, og dermed $x^2+2xy+f(y)=y^2+2xy+f(x)$ og altså $f(x)-x^2=f(y)-y^2$ for alle $x,y\in\mathbb{R}$. Dette viser nemlig at $f(x)-x^2$ er konstant for alle x, og derfor at løsningerne skal findes blandt funktionerne $f(x)=x^2+a$. Ved indsættelse ses at $f(x)=x^2+a$ løser ligningen for alle reelle tal a.

Opgave 3.3. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ som opfylder at

$$f(xy)f\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big)=f(x)+y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Opgave 3.4. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Nu skal vi se nærmere på funktionsegenskaberne injektiv, surjektiv og bijektiv.

Injektiv En funktion $f:A\to B$ er *injektiv* hvis $f(x)=f(y)$ medfører at $x=y$ for alle $x,y\in A$.

Sujektiv En funktion $f:A\to B$ er *surjektiv* hvis der for hvert $y\in B$ findes et $x\in A$ så $f(x)=y$.

Bijektiv En funktion kaldes *bijektiv* hvis den både er injektiv og surjektiv.

Når man løser funktionalligninger, kan det være en god idé at overveje om en løsning er injektiv, surjektiv eller bijektiv. Hvis man fx ved at funktionsværdierne af to udtryk er identiske, da må udtrykkene også være identiske hvis funktionen er injektiv. Andre gange har man brug for at vide at der findes et x med en bestemt funktionsværdi, fordi det fx kan være interessant at indsætte sådan en værdi. Nu skal vi se på et eksempel hvor man kan udnytte injektivitet.

Injektivt
Hvis vi skal bestemme samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(xy - f(x)) = x - y + f(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R},$$

kan man ret hurtigt se at en løsning må være injektiv: Hvis $f(x) = f(y)$, er $x - y = f(xy - f(x)) - f(y) = f(yx - f(y)) - f(x) = y - x$, og dermed $2x = 2y$ og altså $x = y$. For at kunne udnytte injektivitetsegenskaben, vil vi gerne have to funktionsværdier som er identiske. Ved at sætte $x = y$, får vi $f(x^2 - f(x)) = f(x)$, og dermed $x^2 - f(x) = x$. Dvs. den eneste mulige løsning er $f(x) = x^2 - x$. Ved indsættelse ses at denne funktion ikke løser ligningen, der er altså ingen løsninger.

Opgave 3.5. Bestem samtlige funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at

$$3x + f(2x + 2y - f(x)) = 3y + f(y) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R},$$

Opgave 3.6. En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opfylder at $4f(f(x)) = 2f(x) + x$ for alle reelle tal x. Vis at $f(x) = 0$ netop når $x = 0$.

Opgave 3.7. Bestem alle injektive funktioner $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så

$$f(f(n)) \leq \frac{n + f(n)}{2} \quad \text{for alle } n \in \mathbb{N}.$$

Opgave 3.8. Bestem alle funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x) \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Et par definitioner inden der kommer flere opgaver:

Voksende funktion En funktion f er voksende i et interval I hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, gælder at $f(x_1) < f(x_2)$.

Aftagende funktion En funktion f er aftagende i et interval I hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, gælder at $f(x_1) > f(x_2)$.

Svagt voksende funktion En funktion f er svagt voksende i et interval I hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, gælder at $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Svagt aftagende funktion En funktion f er svagt aftagende i et interval I hvis der for alle $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, gælder at $f(x_1) \geq f(x_2)$.

4 Blandede opgaver

Opgave 4.1. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(x-f(y))=1-x-y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Opgave 4.2. Bestem alle reelle tal a for hvilke der findes en et reelt tal α og en funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$f(\alpha)=0 \quad \text{og} \quad f(f(x))=xf(x)+a$$

for alle $x\in\mathbb{R}$.

Opgave 4.3. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ som opfylder at

$$x^{f(y)}=y^{f(x)} \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}_+.$$

Opgave 4.4. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder

$$f(x)f(y)=f(xy+x)+3f(x+y)+y \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Opgave 4.5. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som opfylder

$$xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x)f(y) \quad \text{for alle } x,y\in\mathbb{R}.$$

Opgave 4.6. Bestem samtlige funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder

$$f(m+n)f(m-n)=f(m^2),$$

for alle $m,n\in\mathbb{N}$ hvor $m>n$.

Opgave 4.7. Bestem alle funktioner $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ som opfylder at

i) $f(ab)=f(a)f(b)$

ii) mindst to af tallene $f(a)$, $f(b)$ og $f(a+b)$ er ens

for alle positive hele tal a og b. (EGMO 2022)

Opgave 4.8. En funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ er svagt voksende og opfylder $f(mn)=f(m)f(n)$ for alle positive hele tal m og n som er indbyrdes primiske. Vis at $f(8)f(13)\geq(f(10))^2$.

Opgave 4.9. Lad $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ være en voksende funktion som opfylder at $f(2)=a>2$ og $f(nm)=f(n)f(m)$ for alle $n,m\in\mathbb{N}$. Bestem den mindst mulige værdi af a.

Opgave 4.10. Lad F være en svagt voksende reel funktion defineret for alle x, $0\leq x\leq 1$, som opfylder følgende:

i) $F(\frac{x}{3})=\frac{F(x)}{2}$,

ii) $F(1-x)=1-F(x)$.

Bestem $F(\frac{173}{1993})$ og $F(\frac{1}{13})$.

Opgave 4.11. Lad f være en funktion defineret på de positive hele tal som opfylder at $f(1)=1995$ og $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$ for alle hele tal $n>1$. Bestem $f(1995)$.

Opgave 4.12. Den reelle funktion f er defineret på intervallet $[0;1]$ og opfylder at

a) $f(x)\geq 0$ for alle $x\in[0;1]$,

b) $f(1)=1$,

c) $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$ for alle $x,y\in[0;1]$.

Vis at $f(x)\leq 2x$ for alle $x\in[0;1]$.

Opgave 4.13. En funktion $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ opfylder følgende:

a) $f(x)-f(y)=f(x)f(1/y)-f(1/x)f(y)$ for alle $x,y\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

b) Der findes mindst et $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ så $f(x)=\frac{1}{2}$.

Bestem $f(-1)$.

5 Løsninger

Opgave 1.1 For $y=-1$ er

$$f(x-1)=-f(x)+f(x)=0$$

for alle $x\in\mathbb{R}$. Altså er $f(x)=0$ for alle $x\in\mathbb{R}$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x)=0$ er en løsning.

Opgave 1.2 For $x=a$ er

$$f(-2)=f(f(a))=af(a)+2a=a(-2)+2a=0.$$

Nu sættes $x=-2$:

$$f(0)=f(f(-2))=-2f(-2)+2(-2)=-4.$$

Dermed fås når $x=0$

$$f(-4)=f(f(0))=0,$$

og yderligere når $x=-4$

$$f(0)=f(f(-4))=-4f(-4)+2(-4)=-8,$$

hvilket er i modstrid med at $f(0)=-4$. Der er altså ingen funktioner der opfylder det ønskede.

Opgave 2.1 Vi viser at $f(n)=n+1$ for alle positive heltal n ved induktion efter n. Vi ved at $f(1)=2$. Antag at $f(n)=n+1$. Da er $f(n+1)=f(f(n))=f(n)+1=n+1+1=n+2$. Dermed er $f(n)=n+1$ eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 2.2 Først viser vi ved induktion efter n at $f(2n)=2n+2$ for alle positive heltal n. For $n=1$ er $f(2\cdot1)=f(f(1))=f(1)+2=4$. Antag nu at $f(2n)=2n+2$. Da er $f(2(n+1))=f(2n+2)=f(f(2n))=f(2n)+2=2n+2+2=2(n+1)+2$. Derefter viser vi at $f(2n+1)=2n+3$ for alle postive heltal n ved induktion efter n. For $n=1$ ved vi at $f(2\cdot1+1)=f(3)=5=2\cdot1+3$. Antag at $f(2n+1)=2n+3$. Da er $f(2(n+1)+1)=f(2n+3)=f(f(2n+1))=f(2n+1)+2=2(n+1)+1+2$. Dermed er den eneste mulige løsning at $f(n)=n+2$ for alle positive heltal $n>1$ og $f(1)=2$. Ved indsættelse ses at det er en løsning.

Opgave 2.3 Bemærk først at $f(0)^2=f(0)$, dvs. at $f(0)=0$ eller $f(0)=1$. Hvis $f(0)=0$, er $f(x)=f(x-0)=f(x)f(0)=0$ for alle x i modstrid med at $f(2011)=1$. Dermed er $f(0)=1$. Nu er $f(n)^2=f(0)=1$, og $f(2n)f(n)=f(n)$ for alle n, og altså $f(n)=1$ eller $f(n)=-1$ for ulige n, og $f(n)=1$ for lige n. Antag at der findes et ulige n så $f(n)=-1$. Da er $f(2011)=f(2011+n)f(n)=-1$ hvilket er en modstrid. Dermed er $f(n)=1$ for alle n eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 2.4 For $x=2$ og $y=1$ er $f(3)+f(1)=12$, for $x=3$ og $y=2$ er $f(5)+f(1)=28$, og for $x=4$ og $y=1$ er $f(5)+f(3)=36$. Ved at løse disse tre ligninger med tre ubekendte fås $f(1)=2$, $f(3)=10$ og $f(5)=26$. På tilsvarende måde kan man bestemme $f(2)=5$, $f(4)=17$ og $f(6)=37$. Vi viser nu ved induktion efter n at $f(n)=n^2+1$ for alle naturlige tal n. Vi ved allerede at $f(1)=2=1^2+1$ og $f(2)=5=2^2+1$. Antag at $f(n)=n^2+1$ for alle positive heltal $n\le N$. Da er $f(N+1)=-f(N-1)+2(N)^2+2(1)^2+2=(N+1)^2+1$. Dermed er $f(x)=x^2+1$ den eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses at den opfylder betingelserne.

Opgave 2.5 Vi ønsker at vise at $f(n)=f(m)$ medfører at $n=m$. En funktion med denne egenskab kaldes injektiv, og det smarte ved at vise at f er injektiv, er at

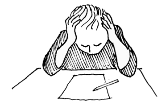
$$f(f(n))=f(f(n+2)+2)$$

så medfører at

$$f(n)=f(n+2)+2.$$

For at vise at f er injektiv, antager vi at $f(n)=f(m)$. Ved at tage f på begge sider opnås $f(f(n))=f(f(m))$, og dermed ifølge betingelsen i opgaven $m=n$. Funktionen f er altså injektiv, og vi ved derfor at at $f(n)=f(n+2)+2$. Desuden er $f(1)=f(f(0))=0$. Dette sammenholdt med $f(n+2)=f(n)-2$ giver ved induktion $f(n)=1-n$.

Opgave 2.6 Først bemærkes at $f(2)=2f(1)+1=1$, $f(3)=2f(1)=0$, $f(4)=2f(2)+1=3$, osv. På denne måde kan man rekursivt finde $f(n)$ for alle naturlige tal n. Der er altså højst en løsning til funktionalligningen.



Påstand: Lad n være et naturligt tal, og skriv n på formen $n = 2^m + l$, $0 \le l < 2^m$. Da er $f(n) = 2^{m+1} - n - 1$. Det eftervises let at denne funktion opfylder de tre betingelser.

Opgave 3.1 Først erstattes x med $3-x$:

$$4f(x)+3f(3-x) = x^2+9-6x.$$

Dermed er

$$7f(x) = 4\Big(4f(x)+3f(3-x)\Big) - 3\Big(4f(3-x)+3f(x)\Big) = x^2-24x+36,$$

og altså $f(x) = \frac{x^2-24x+36}{7}$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at den opfylder betingelsen.

Opgave 3.2 Substituer først x med $\frac{1}{1-x}$ i ligningen:

$$f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) + f\Big(\frac{x-1}{x}\Big) = \frac{1}{1-x}.$$

Substituer nu x med $\frac{x-1}{x}$ i ligningen:

$$f\Big(\frac{x-1}{x}\Big) + f(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Bemærk at de to ovenstående ligninger sammen med den oprindelige udgør tre ligninger med de tre ubekendte $f(x)$, $f\Big(\frac{1}{1-x}\Big)$ og $f\Big(\frac{x-1}{x}\Big)$. For at løse dem, trækker vi først de to ovenstående fra hinanden:

$$f(x) - f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x}.$$

Lægges denne ligning sammen med den oprindelige fås

$$2f(x) = x + \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x} = x+1+\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x},$$

og altså

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}\Big).$$

Ved indsættelse ses at denne funktion er løsning til ligningen.

Opgave 3.3 Af symmetrigrunde er

$$f(xy)f\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\Big) = f(x)+y = f(y)+x \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}_+,$$

og dermed $f(x) - x = f(y) - y$, og altså $f(x) = x + k$. Vi undersøger nu for hvilke reelle tal k at $f(x) = x+k$ er en løsning.

$$(xy+k)\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+k\Big) = x+y+k,$$

som omskrives til

$$k\Big(xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+k-1\Big) = 0.$$

Da denne ligning skal gælde for alle x og y, må $k=0$, dvs. at den eneste løsning er $f(x) = x$.

Opgave 3.4 Ved at dividre med $x^2 - y^2$ under antagelse af at $x \neq \pm y$ fås

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - \frac{f(x-y)}{x-y} = 4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2.$$

Dermed er

$$\frac{f(x+y)}{x+y} - (x+y)^2 = \frac{f(x-y)}{x-y} - (x-y)^2 \text{ for alle } x \neq \pm y.$$

Dette viser at $\frac{f(x)}{x} - x^2$ er konstant for alle $x \neq 0$, og altså at $f(x) = x^3 + kx$ for alle $x \neq 0$. Ved at indsætte $x = y = 1$ i den oprindelige ligning, fås $f(0) = 0$. Dermed er de mulige løsninger $f(x) = x^3 + kx$, hvor k er et reelt tal, og ved indsættelse ses at disse er løsninger for alle reelle tal k.

Opgave 3.5 Først viser vi at f er injektiv. Antag at $f(x) = f(y)$. Da er

$$3y - 3x = f(2x+2y-f(x)) - f(y) = f(2y+2x-f(y)) - f(x) = 3x-3y,$$

og dermed $x = y$. Dette viser at f er injektiv. Når $x = y$ fås

$$3x + f(4x - f(x)) = 3x + f(x).$$

Da f er injektiv, er $4x - f(x) = x$, og dermed $f(x) = 3x$ eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x) = 3x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ er en løsning til funktionalligningen.

Opgave 3.6 Bemærk først at funktionen er injektiv da $f(x) = f(y)$ medfører at $x = 4f(f(x)) - 2f(x) = 4f(f(y)) - 2f(y) = y$. Vi skal dermed blot vise at $f(0) = 0$. Ved at indsætte $x = 0$ fås $4f(f(0)) = 2f(0) + 0 = 2f(0)$, og altså $2f(f(0)) = f(0)$, og ved at indsætte $x = f(0)$ og udnytte det foregående fås $4f(f(f(0))) = 2f(f(0)) + f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Samlet er $f(f(f(0))) = f(f(0))$, og da f er injektiv, er $f(0) = 0$.

Opgave 3.7 Vi ønsker at vise at $f(n) \leq n$, for når f er injektiv, giver det at $f(n) = n$ (overvej). Antag derfor at der findes et n så $f(n) > n$. Lad $f^k(n)$ betegne $f(f(\ldots f(n)\ldots))$ hvor f er taget k gange. Da er

$$f^2(n) \leq \frac{n + f(n)}{2} < f(n)$$
$$f^3(n) \leq \frac{f(n) + f^2(n)}{2} < f(n)$$

Vi viser ved induktion efter k at $f^k(n) < f(n)$. Antag at det er sandt for alle $k \leq K$. Da er

$$f^{K+1}(n) \leq \frac{f^{K-1}(n) + f^K(n)}{2} < f(n).$$

Da der kun findes endeligt mange positive heltal som er mindre end $f(n)$, må der findes to positive hele tal p og q, $p < q$, så $f^p(n) = f^q(n)$. Da f er injektiv, giver dette at $n = f^{q-p}(n) < f(n)$, hvilket er en modstrid. Dermed er $f(n) \leq n$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Som vi allerede konkluderede tidligere, betyder dette at $f(n) = n$ er eneste mulige løsning da f skal være injektiv. Denne funktion opfylder også uligheden.

Opgave 3.8 Sæt $x = 1$. Da er $f(f(y)+1) = y + f(1)$, hvilket viser at f er surjektiv. Derfor findes et $k \in \mathbb{R}$ så $f(k) = -1$. Når $y = k$ fås $f(0) = kx + f(x)$. Altså er f en lineær funktion $f(x) = ax + b$. Vi indsætter i den oprindelige ligning for at finde de mulige værdier af a og b:

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x)$$
$$f(x(ay + b) + x) = xy + ax + b$$
$$a(axy + bx + x) + b = xy + ax + b$$
$$a^2xy + abx = 0$$

Dermed er $a^2 = 1$ og $b = 0$. Samtlige løsninger er derfor $f(x) = x$ og $f(x) = -x$.

Opgave 4.1 Ved at indsætte $x = f(y)$ i $f(x - f(y)) = 1 - x - y$, fås $f(0) = 1 - f(y) - y$ for alle y, og altså $f(y) = -y + 1 - f(0)$. Løsningerne skal derfor findes blandt $f(x) = -x + a$, og ved indsættelse ses at kun $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ er en løsning.

Opgave 4.2 Antag at a er et reelt tal så der findes et reelt tal α og en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som opfylder at $f(\alpha) = 0$ og $f(f(x) = xf(x) + a$, $x \in \mathbb{R}$. Ved at indsætte $x = \alpha$ fås

$$f(0) = f(f(\alpha)) = \alpha f(\alpha) + a = a.$$

Nu sættes $x = 0$:

$$f(a) = f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + a = a.$$

Dette giver nu med $x = a$ at

$$a = f(f(a)) = af(a) + a = a^2 + a,$$

og altså at $a = 0$.

Hvis $a = 0$ opfylder $\alpha = 0$ og $f(x) = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ det ønskede.

Opgave 4.3 Da begge sider er positive, kan vi tage logaritmen. Dermed fås $\frac{f(x)}{\ln x} = \frac{f(y)}{\ln y}$ under forudsætning af at x og y ikke er 1. Dermed er $\frac{f(x)}{\ln x}$ konstant for alle $x \neq 1$. Desuden er $f(1) = \ln(1)\frac{f(y)}{\ln y} = 0$. De eneste mulige løsninger er derfor funktioner af typen $f(x) = c \cdot \ln x$. Ved indsættelse ses at disse er løsninger for alle reelle tal c.

Opgave 4.4 Når vi indsætter $y = 0$, får vi $f(x)f(0) = f(x) + 3f(x) = 4f(x)$ for alle x, dvs. $f(0) = 4$ eller $f(x) = 0$ for alle x. Da $f(x)f(y) - f(xy + x) - 3f(x +$

$y) = y$, kan $f(x)$ ikke være nul for alle x, dvs. $f(0) = 4$. Ved at indsætte $x = 0$ og udnytte at $f(0) = 4$, får vi $4f(y) = 4+3f(y)+y$, og altså $f(y) = y+4$ for alle y som eneste mulige løsning. Ved indsættelse ses at $f(x) = x+4$ opfylder betingelserne.

Opgave 4.5 Sæt $y = x$. Da er $2xf(x) = 2xf(x)^2$, dvs. $f(x) = f(x)^2$ for alle $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dermed er $f(x) = 0$ eller $f(x) = 1$ for $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Antag at der findes et $x \neq 0$ så $f(x) = 1$. Da er $xf(y)+y = (x+y)f(y)$, og altså $y = f(y)y$ for alle y, og $f(y) = 1$ for alle $y \neq 0$. Funktionen $f(x) = 1$ for $x \neq 0$ og $f(0) = a$, hvor a er et vilkårligt reelt tal, er en løsning. (Tjek selv).

Antag at der ikke findes et $x \neq 0$ så $f(x) = 1$. Da er $f(x) = 0$ for alle $x \neq 0$. Hvis man tjekker funktioner af typen $f(x) = 0$ for alle $x \neq 0$ og $f(0) = a$, hvor a er et vilkårligt reelt tal, ser man at den eneste af denne type løsninger er den hvor $a = 0$, dvs. $f(x) = 0$ for alle x.

Opgave 4.6 Bemærk først at $f(4) = f(2^2) = f(3)f(1)$ og $f(9) = f(3^2) = f(4)f(2) = f(5)f(1)$. Hvis $m \geq 3$, gælder desuden at

$$f((m+1)^2) = f(2m+1)f(1) = f(2m)f(2) = f(2m-1)f(3).$$

Hvis $f(1)$, $f(2)$ og $f(3)$ er bestem, kan alle andre funktionsværdier altså herefter bestemmes induktivt. Vi har $f(5) = \frac{f(4)f(2)}{f(1)} = f(2)f(3)$, $f(6) = \frac{f(5)f(3)}{f(2)} = f(3)^2$, $f(7) = \frac{f(6)f(2)}{f(1)} = \frac{f(2)f(3)^2}{f(1)}$ og $f(9) = f(1)f(5) = f(1)f(2)f(3)$. Nu kan vi udregne $f(25)$ på tre forskellige måder, hvilket viser at $f(9)f(1) = f(7)f(3) = f(6)f(4)$, og dermed $f(1)^2f(2)f(3) = \frac{f(2)f(3)^3}{f(1)} = f(1)f(3)^3$. Af dette ses at $f(2) = f(1)^2$ og $f(1)^3 = f(3)^2$. Ved at udregne $f(36)$ på to måder fås yderligere $f(9)f(3) = f(7)f(5)$, og altså $f(1)f(2)f(3)^2 = \frac{f(2)^2f(3)^3}{f(1)}$. Sammenholdt med at $f(2) = f(1)^2$, giver dette $f(3) = 1$, og dermed også $f(1) = f(2) = 1$. Den eneste mulige løsning er derfor $f(n) = 1$ for alle n, og ved indsættelse ses at dette faktisk er en løsning.

Opgave 4.7 Samtlige løsninger er $f(n) = m^{v_p(n)}$, hvor $m \in \mathbb{N}$, p er et primtal, og $v_p(n)$ er eksponenten for p i primfaktoropløsningen af n.

Først viser vi at alle disse funktioner opfylder betingelserne. Antag at $f(n) = m^{v_p(n)}$. Vi har $f(a) = m^{v_p(a)}$ og $f(b) = m^{v_p(b)}$, og da $v_p(a\cdot b) = v_p(a)+v_p(b)$, må $f(a\cdot b) = f(a)\cdot f(b)$. Dermed opfylder f betingelse i). Hvis $v_p(a) \neq v_p(b)$, så vil den største potens af p der går op i $a+b$ være $p^{\min(v_p(a),v_p(b))}$, dvs. $v_p(a+b) = \min(v_p(a), v_p(b))$. Dermed vil $f(a+b) = f(a)$ eller $f(a+b) = f(b)$. Hvis $v_p(a) = v_p(b)$, da er $f(a) = f(b)$. Dermed opfylder f betingelse ii).

Vi viser nu at der ikke findes ande løsninger. Antag at f opfylder betingelserne. Da $f(1)\cdot f(1) = f(1)$, og værdimængden er de positive hele tal, er $f(1) = 1$. Ved at benytte i) induktiovt fås

$$f\left(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1}\right)\cdot f\left(p_2^{\alpha_2}\right)\cdots f\left(p_r^{\alpha_r}\right) = f\left(p_1\right)^{\alpha_1}\cdot f\left(p_2\right)^{\alpha_2}\cdots f\left(p_r\right)^{\alpha_r}. \quad *)$$

Lad S være mængden af alle primtal p hvor $f(p) \neq 1$. Hvis S er tom, da giver *) at $f(n) = 1$ for alle positive heltal n. Hvis S kun indeholder et primtal p, da følger det af *) at $f(n) = f(p^{v_p(n)}) = f(p)^{v_p(n)}$. I begge tilfælde er f på formen $f(n) = m^{v_p(n)}$, hvor $m \in \mathbb{N}$, og p er et primtal.

Antag for modstrid at S indeholder mindst to primtal, og lad $p < q$ være de to mindste. Da $q-p$ er indbyrdes primisk med både p og q, og alle dets primdivisorer dermed er mindre end q, da følger det at $f(q-p) = 1$. Af betingelse ii) får vi dermed at $f(p) = f(q)$. Lad $t \geq 2$ være det mindste hele tal så $p^t > q$, og lad $p^t = aq+b$, $0 < b < q$. Da $q > p^{t-1}$, fås at $p > a$. Dermed er $f(a) = 1$. Det viser også at aq ikke er delelig med p, og dermed at b heller ikke er delelig med p, dvs. $f(b) = 1$. Nu er

$$f(aq) = f(a)f(q) = f(q) = f(p), \quad f(b) = 1, \quad f(aq+b) = f(p^t) = f(p)^t > f(p),$$

hvilket er i modstrid med ii). Altså har S højst et element, og det ønskede er vist.

Opgave 4.8 Da f er svagt voksende, og $f(n)f(m) = f(nm)$ når $(n,m) = 1$, er

$$f(13)f(7) = f(91) \geq f(90) = f(9)f(10).$$

Tilsvarende er

$$f(8)f(9) = f(72) \geq f(70) = f(7)f(10).$$

Ved at kobinere dette fås

$$f(7)f(13)f(8)f(9) \geq f(7)f(9)f(10)^2 \quad \Leftrightarrow f(8)f(13) \geq f(10)^2.$$

Opgave 4.9 Da $f(n)=n^2$ opfylder betingelserne, er $f(2)=4$ en mulig værdi for a. Hvis 4 ikke er den mindst mulige værdi af a, må $a=3$ da $a>2$. Antag derfor at $a=3$. Da er

$$f(3)^4=f(3^4)=f(81)>f(64)=f(2^6)=f(2)^6=3^6=27^2>25^2=5^4,$$

og

$$\begin{aligned}f(3)^8&=f(3^8)=f(6561)<f(8192)=f(2^{13})=f(2)^{13}\\&=3^{13}=3^8\cdot 3^5<3^8\cdot 2^8=6^8.\end{aligned}$$

I alt er $5<f(3)<6$ hvilket er umuligt. Den mindste værdi af a er derfor 4.

Opgave 4.10 Ifølge i) er $F(0)=\frac{1}{2}F(0)$, altså $F(0)=0$. Af dette og ii) ses at $F(1)=F(1-0)=1-F(0)=1$. Desuden giver i) at $F(\frac{1}{3})=\frac{F(1)}{2}=\frac{1}{2}$, og ii) yderligere at $F(\frac{2}{3})=1-F(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$. Da F er en svagt voksende funktion, må $F(x)=\frac{1}{2}$ for alle $x\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$.

Nu kan vi udregne $F(\frac{173}{1993})$:

$$\begin{aligned}F\Big(\frac{173}{1993}\Big)&=\frac{1}{2}F\Big(\frac{519}{1993}\Big)=\frac{1}{4}F\Big(\frac{1557}{1993}\Big)=\frac{1}{4}\Big(1-F\Big(\frac{436}{1993}\Big)\Big)\\&=\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{2}F\Big(\frac{1308}{1993}\Big)\Big)=\frac{1}{4}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)=\frac{3}{16}.\end{aligned}$$

Desuden er

$$\begin{aligned}F\Big(\frac{1}{13}\Big)&=1-F\Big(\frac{12}{13}\Big)=1-2F\Big(\frac{4}{13}\Big)=1-2\Big(1-F\Big(\frac{9}{13}\Big)\Big)\\&=2F\Big(\frac{9}{13}\Big)-1=4F\Big(\frac{3}{13}\Big)-1=8F\Big(\frac{1}{13}\Big)-1\end{aligned}$$

og altså $F(\frac{1}{13})=\frac{1}{7}$.

Opgave 4.11 Ved at kombinere $f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=n^2f(n)$ og $f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)=(n-1)^2f(n-1)$ fås

$$f(n)=\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)}{n^2-1}=\frac{(n-1)^2f(n-1)}{(n-1)(n+1)}=\frac{n-1}{n+1}f(n-1).$$

Dermed er

$$f(n)=\frac{n-1}{n+1}f(n-1)=\frac{n-1}{n+1}\frac{n-2}{n}f(n-2)=\cdots=\frac{2}{n(n+1)}f(1),$$

og $f(1995)=\frac{2}{1995\cdot 1996}f(1)=\frac{1}{998}$.

Opgave 4.12 Bemærk at $1=f(1+0)\geq f(1)+f(0)=1+f(0)$, og altså $f(0)=0$. Først viser vi ved induktion efter n at $f(\frac{1}{2^n})\leq\frac{1}{2^n}$. For $n=1$ er $2f(\frac{1}{2})\leq f(1)=1$, og dermed $f(\frac{1}{2})\leq\frac{1}{2}$. Antag at $f(\frac{1}{2^n})\leq\frac{1}{2^n}$. Da er $2f(\frac{1}{2^{n+1}})\leq f(\frac{1}{2^n})\leq\frac{1}{2^n}$, og dermed $f(\frac{1}{2^{n+1}})\leq\frac{1}{2^{n+1}}$.

For $x\in]0;1]$ vælges $n=0,1,2,\ldots$ således at $x\in[\frac{1}{2^n};\frac{1}{2^{n-1}}]$: Dermed er ifølge c)

$$f(x)\leq f\Big(\frac{1}{2^{n-1}}\Big)-f\Big(\frac{1}{2^{n-1}}-x\Big)\leq\frac{1}{2^{n-1}}\leq 2x.$$

Da yderligere $f(0)=0$ gælder for alle $x\in[0;1]$ at $f(x)\leq 2x$.

Opgave 4.13 I ligningen $f(x)-f(y)=f(x)f(1/y)-f(1/x)f(y)$ erstattes x og y med henholdsvis $1/x$ og $1/y$ hvilket samlet giver $f(x)+f(1/x)=f(y)+f(1/y)$ for alle x og y forskellige fra 0, dvs. at $f(x)+f(1/x)=c$ for en konstant c. Dermed kan $f(x)-f(y)=f(x)f(1/y)-f(1/x)f(y)$ omskrives til $(c-1)f(x)=(c-1)f(y)$. Hvis $c\neq 1$, da er $f(x)=f(y)$ for alle x,y, og dermed er funktionen konstant, dvs. $f(-1)=\frac{1}{2}$ ifølge b). Hvis $c=1$, er $2f(-1)=f(-1)+f(\frac{1}{-1})=1$, dvs. $f(1)=\frac{1}{2}$.